第二套往年考题　　　　　　　　　　　　　　　　杨利军　2018年01月06日

一. 填空题(将答案填在横线上, 每个空4分, 共计36分).

1. 设

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

二阶方阵 B 满足 $BA-B+2I=0$, 则 B 的行列式 $|B|=$______.

2. 将三阶方阵 A 的第一行的 -1 倍加到第三行得到矩阵 B, 再将 B 的第二列与第三列对换后得到单位阵 I, 则 $A=$______

3. 在过点 $(0,0,0)^T$ 与平面 $x+y+z=1$ 垂直的直线上, 满足与点 $(0,0,0)^T$ 到该平面距离相等的另一个点坐标是 ______.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3-\alpha_4$, $\beta_4=\alpha_2-\alpha_4$, $\beta_5=\alpha_2-\alpha_3$, 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的秩是 ______.

5. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

给出 $\mathbb{R}^4$ 上化零空间 $N(A)$ 的一组基 ________ 和正交补空间 $N(A)^\perp$ 的一组基 ________.

6. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ b & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有一个特征向量 $(1,1,1)^T$, 则 a,b 分别为 $\underline{a=\quad, b=\quad}$.

7. 若要求二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 正定, 则 t 必须满足 ______.

8. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

试判断 A 与 B 是否相抵, 相似和相合. 你的结论是 ______.

二. 计算题和证明题,

9.(20分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性空间 V 的一组基, 线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 σ 的所有特征值和对应特征向量空间的一组基;

(2) 写出 V 的一组基 β_1,β_2,β_3 使得线性变换 σ 在该基下的矩阵为对角阵, 并写出该矩阵.

(3) 设向量 $\gamma\in V$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,2,3)^T$, 写出 $\sigma(\gamma)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标;

(4) 写出向量 γ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

(注: 问题(2)和(4)的答案不唯一. 这是因为特征向量 β_1,β_2,β_3 的选择不唯一. 这也导致了向量 γ 对于不同的基底 β_1,β_2,β_3 有不同的坐标.)

10.(15分) 将矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

作 QR 分解.

11. (15分) 设 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 其中 $\alpha_1 = (1,1,1,0)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1,1)^T$, $\alpha_3 = (2,5,5,3)^T$, $\beta_1 = (1,0,0,-1)^T$, $\beta_2 = (1,3,3,2)^T$, $\beta_3 = (2,1,1,1)^T$. 试求 W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ 的基与维数.

三. 证明题

12.(8分) 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\sigma^2 = \sigma$. 证明 (1) $Im(\sigma) \cap Ker(\sigma) = \{\theta\}$, θ 表示零元素. (2) $V = Im(\sigma) \oplus Ker(\sigma)$.

13. (6分) 设 A 和 B 为 n 阶实对称矩阵且满足 $A + B$ 正定, 证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^T A P$ 和 $P^T B P$ 同时为对角矩阵.