第二套往年考题解答　　　　　　　　　　　　　　杨利军　2018年01月06日

一. 填空题(将答案填在横线上, 每个空4分, 共计36分).

1. 设
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$
二阶方阵 B 满足 $BA-B+2I=0$, 则 B 的行列式 $|B|=\underline{-4}$.

分析解答：由等式 $BA-B+2I=0$ 知 $B(A-I)=-2I$. 两边取行列式得 $|B||A-I|=|-2I|$. 简单计算得 $|A-I|=-1$, $|-2I|=4$. 因此 $|B|=-4$. 解答完毕.

2. 将三阶方阵 A 的第一行的 -1 倍加到第三行得到矩阵 B, 再将 B 的第二列与第三列对换后得到单位阵 I, 则 $A=$____
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

分析解答. 将三阶方阵 A 的第一行的 -1 倍加到第三行得到矩阵 B, 等价于 $B=P_1A$, 再将 B 的第二列与第三列对换后得到单位阵 I, 等价于 $BP_2=I$, 这里 P_1, P_2 为如下初等变换矩阵
$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
于是 $P_1AP_2=I$. 由此得 $A=P_1^{-1}P_2^{-1}$. 简单计算得
$$P_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad P_2^{-1}=P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$A = P_1^{-1}P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

3. 在过点 $(0,0,0)^T$ 与平面 $x+y+z=1$ 垂直的直线上, 满足与点 $(0,0,0)^T$ 到该平面距离相等的另一个点坐标是 $\underline{\frac{2}{3}(1,1,1)^T}$.

分析解答：题目中所求点称为点 $(0,0,0)^T$ 关于平面 $x+y+z=1$ 的对称点. 不难证明, 对于给定平面 $\pi : ax+by+cz+d=0$, 点 (x_0,y_0,z_0) 关于平面 π 的对称点坐标可表示为

$$(x_1,y_1,z_1) = (x_0,y_0,z_0) - 2(ax_0+by_0+cz_0+d)\frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}.$$

上述公式里, 令 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, $(a,b,c,d)=(1,1,1,-1)$, 即可得到
$(x_1,y_1,z_1) = \frac{2}{3}(1,1,1)^T$. 即所求点为 $\frac{2}{3}(1,1,1)^T$. 解答完毕.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3-\alpha_4$, $\beta_4=\alpha_2-\alpha_4$, $\beta_5=\alpha_2-\alpha_3$, 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的秩是 $\underline{3}$.

分析解答：由向量 β_j 的定义知如下线性关系成立

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然秩 $rank\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\} = rank(A)$, 这里 A 记上式中的 4×5 矩阵. 为求 A

的秩, 我们对矩阵 A 作初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见 $rank(A) = 3$. 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ 的秩是 3. 解答完毕.

5. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

给出 $\mathbb{R}^4$ 上化零空间 $N(A)$ 的一组基 ________ 和正交补空间 $N(A)^\perp$ 的一组基 ________.

分析解答：为求零空间 $N(A)$ 的基底, 我们需要求方程组 $Ax = 0$ 的一个基本解组. 为求解我们对 A 作行初等变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: B.$$

由此可见 $rank(A) = 2$, 并且方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 同解. 于是 $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, -1, 0)^T$ 是 $N(A)$ 的基向量. 显然矩阵 A 的三个行向量都与 α_1, α_2 正交. 因此可取 A 的两个线性无关的行向量作为正交补空间 $N(A)^T$ 的基向量, 例如 $\beta_1 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 1, 1, 1)^T$.

6. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&a&1\\b&0&-1\end{bmatrix}$$

有一个特征向量 $(1,1,1)^T$, 则 a,b 分别为 $\underline{a=-1,\ b=3}$.

分析解答：由假设知矩阵 A 有特征向量 $(1,1,1)^T$, 记对应的特征值为 λ, 则

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&a&1\\b&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

由此得 $\lambda=2$, $a=-1$, $b=3$.

7. 若要求二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 正定, 则 t 必须满足 $\underline{t>\frac{1}{2}}$.

分析解答：二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 所对应的实对称矩阵为

$$A(t)=\begin{bmatrix}t&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&t&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&t\end{bmatrix}.$$

若二次型 Q 正定, 即矩阵 $A(t)$ 正定. 根据正定矩阵的充要条件, $A(t)$ 的三个顺序主子式均大于零, 即

$$\Delta_1=t>0,\quad \Delta_2=t^2-\frac{1}{4}>0,\quad \Delta_3=t^3-\frac{3t}{4}+\frac{1}{4}>0.$$

由前两个方程知 $t>\frac{1}{2}$. 直接计算知 $\Delta_3(\frac{1}{2})=0$, 且 $\Delta_3'(t)=3t^2-\frac{3}{4}=3(t^2-\frac{1}{4})>0$, $\forall t>\frac{1}{2}$. 因此二次型 Q 正定, 必须且只需 $t>\frac{1}{2}$.

8. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

试判断 A 与 B 是否相抵, 相似和相合. 你的结论是 相抵, 相合, 但不相似.

分析解答：显然矩阵 A 和 B 的秩均为 3. 故它们相抵. 简单计算知对称矩阵 A 三个特征值为 $1,\pm\sqrt{5}$. 而 B 的特征值为 $1,1,-1$. 因此它们相合, 但不相似.

二. 计算题和证明题,

9.(20分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性空间 V 的一组基, 线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 σ 的所有特征值和对应特征向量空间的一组基;

(2) 写出 V 的一组基 β_1,β_2,β_3, 使得线性变换 σ 在该基下的矩阵为对角阵, 并写出该矩阵.

(3) 设向量 $\gamma\in V$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,2,3)^T$, 写出 $\sigma(\gamma)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标;

(4) 写出向量 γ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解 (1). 先求矩阵 A 的特征值. 简单计算得 $\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)$. 故 A 有三个互异的特征值 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$. 以下求对应的特征向量. 对 $\lambda_1=-1$, 求解 $(\lambda_1 I-A)\xi=0$, 即求解

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-2&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得矩阵 A 的特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^T$. 相应的线性变换 σ 有特征向量

$$\beta_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha_1.$$

对 $\lambda_2=0$, 求解 $(\lambda_2 I-A)\xi=0$, 即求解

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得矩阵 A 的特征向量 $\xi_2=(1,1,1)^T$. 相应的线性变换 σ 有特征向量

$$\beta_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

对 $\lambda_3=2$, 求解 $(\lambda_3 I-A)\xi=0$, 即求解

$$\begin{bmatrix}3&0&-1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得矩阵 A 的特征向量 $\xi_3=(1,-3,3)^T$. 相应的线性变换 σ 有特征向量

$$\beta_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}=\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3.$$

解(2). 根据结论(1)知, 线性变换 σ 在基底 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为对角阵, 即

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

解(3). 由假设向量 γ 可写作

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\sigma(\gamma) = \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

即向量 $\sigma(\gamma)$ 在基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(2, -1, 1)$.

解(4). 根据结论(1)知基底 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 和基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性关系如下

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

于是

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

以下求逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

这表明

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

于是

$$\gamma = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6}.$$

即向量 γ 在基底 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $\frac{1}{6}(-10, 15, 1)$. 解答完毕.

(注: 问题(2)和(4)的答案不唯一. 这是因为特征向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的选择不唯一. 这也导致了向量 γ 对于不同的基底 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 有不同的坐标.)

10.(15分) 将矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

作 QR 分解.

解：记上述矩阵为 A, 并设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 根据 Gram–Schmidt正交化方法, 令

$$\begin{aligned}
&\beta_1=\alpha_1=(1,-2,-2)^T;\\
&\beta_2=\alpha_2-\tfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=(-3,0,-6)^T-\tfrac{9}{9}(1,-2,-2)^T=2(-2,1,-2)^T;\\
&\beta_3=\alpha_3-\tfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\tfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_1=\alpha_3-\tfrac{13}{9}\beta_1+\tfrac{7}{9}\beta_2=\tfrac{11}{9}(2,2,-1)^T.
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\beta_1;\\
&\alpha_2=\beta_1+\beta_2;\\
&\alpha_3=\tfrac{13}{9}\beta_1-\tfrac{7}{9}\beta_2+\beta_3.
\end{aligned}$$

上式可写作

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1&1&\frac{13}{9}\\0&1&\frac{-7}{9}\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

对正交向量 β_1,β_2,β_3 单位化得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}\right)\begin{bmatrix}\|\beta_1\|&&\\&\|\beta_2\|&\\&&\|\beta_3\|\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&\frac{11}{3}\end{bmatrix}.$$

于是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1&1&\frac{13}{9}\\0&1&\frac{-7}{9}\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&6&\\&&\frac{11}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{13}{9}\\0&1&\frac{-7}{9}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&\frac{13}{3}\\0&6&\frac{-14}{3}\\0&0&\frac{11}{3}\end{bmatrix}.$$

上式即为所求矩阵 A 的 QR 分解, 其中

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}3 & 3 & \frac{13}{3}\\ 0 & 6 & \frac{-14}{3}\\ 0 & 0 & \frac{11}{3}\end{bmatrix}.$$

解答完毕.

11. (15分) 设 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $W_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 其中 $\alpha_1=(1,1,1,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,1,1)^T$, $\alpha_3=(2,5,5,3)^T$, $\beta_1=(1,0,0,-1)^T$, $\beta_2=(1,3,3,2)^T$, $\beta_3=(2,1,1,1)^T$. 试求 W_1, W_2, W_1+W_2, $W_1\cap W_2$ 的基与维数.

解：(1). 求 W_1 的基底和维数. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 即

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

显然 A 的秩即为子空间 W_1 的维数. 为求 A 的秩, 以下对 A 作初等行变换.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由此可见 A 的秩为 2. 这表明 $\dim W_1=2$, 且 α_1,α_2 就是 W_1 的一个基底.

(2). 求 W_2 的基底和维数. 记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 即

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

同理矩阵 B 的秩即为子空间 W_2 的维数. 为求 B 的秩, 以下对 B 作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见 B 的秩为 3, 即向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关. 这表明 $\dim W_2 = 3$, 且 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 就是 W_2 的一个基底.

(3) 求 $W_1 + W_2$ 的基与维数. 显然 $W_1 + W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若记 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 即

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

则矩阵 C 的秩即为子空间 $W_1 + W_2$ 的维数. 以下通过对矩阵 C 作初等变换来求其秩.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见矩阵 C 的秩为 3, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 可选为子空间 $W_1 + W_2$ 的基底. (基底的选择有许多. 例如 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是另外两种选择).

(4) 求 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数. 根据维数公式

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2,$$

可知 $\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 3 - 3 = 2$. 在上一步骤中, 我们对矩阵 C 作行初等变换得

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见矩阵 C 的前三列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均可表为后三列 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合. 实际上 $W_1 \subset W_2$ 是 W_2 的子空间. 因此 W_1 的基底, 例如 α_1, α_2 就是 $W_1 \cap W_2 = W_1$ 的基底. 解答完毕.

三. 证明题

12.(8分) 设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\sigma^2 = \sigma$. 证明 (1) $Im(\sigma) \cap Ker(\sigma) = \{\theta\}$, θ 表示零元素. (2) $V = Im(\sigma) \oplus Ker(\sigma)$.

证明: 证(1). 设 $\alpha \in Im(\sigma) \cap Ker(\sigma)$. 由 $\alpha \in Im(\sigma)$ 知存在 $v \in V$, 使得 $\alpha = \sigma(v)$. 再由 $\alpha \in Ker(\sigma)$ 知 $\sigma(\alpha) = \theta$. 另一方面 $\sigma(\alpha) = \sigma(\sigma(v)) = \sigma^2(v) = \sigma(v) = \alpha$. 故 $\alpha = \theta$. 这就证明了 $Im(\sigma) \cap Ker(\sigma) = \{\theta\}$.
证(2). 根据结论(1)知两个子空间 $Im(\sigma)$ 和 $Ker(\sigma)$ 构成直和. $\forall \alpha \in V$, 令 $\alpha_1 := \sigma(\alpha)$, $\alpha_2 := \alpha - \alpha_1$, 则 $\alpha_1 \in Im(\sigma)$,

$$\sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha - \alpha_1) = \sigma(\alpha) - \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha) - \sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha) - \sigma(\alpha) = \theta.$$

这表明 $\alpha_2 \in Ker(\sigma)$. 因此 V 的每个向量均可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in Im(\sigma)$, $\alpha_2 \in Ker(\sigma)$. 这就证明了 $V = Im(\sigma) \oplus Ker(\sigma)$. 证毕. ∎

13. (6分) 设 A 和 B 为 n 阶实对称矩阵且满足 $A + B$ 正定, 证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^T AP$ 和 $P^T BP$ 同时为对角矩阵.

证明. 由正定矩阵的性质(正定矩阵与单位矩阵相合)可知, 对于正定矩阵 $A + B$,

存在可逆矩阵 Q, 使得 $Q^T(A+B)Q=I$, 即 $Q^TAQ+Q^TBQ=I$. 再根据实对称矩阵的性质知, 对于实对称矩阵 Q^TAQ, 存在正交矩阵 R, 使得 $R^TQ^TAPR=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. 于是 $R^TQ^TAQR+R^TQ^TBQR=R^TR=I$. 由此得

$$R^TQ^TBQR=I-R^TQ^TAQR=diag(1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_n).$$

记 $P=QR$, 则 P 为可逆矩阵, 满足题中的要求. 证毕. ∎