1、判断以下矩阵是否可相似对角化，并说明理由。

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

2. 判断以下实矩阵是否正定，说明理由.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$，分别找出 $N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$ 的一组基

4. 设 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求P的特征多项式.

5. 设 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=QR$，Q为第一个矩阵，R为第二个.

(1) 验证 $Q^TQ=I$ (2) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵 (3) 设 $b=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，求 $AX=b$ 最小二乘解

6. 已知整数 1653, 2581, 3451, 4582 可以被29整除，证明下式也可被29整除

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

7. 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$R^n$的非零正交向量组，证明

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关

(2) 若$r<n$，总可补充$n-r$个向量$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$，使得$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$构成$R^n$的正交基.

9. 若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为一组标准正交基，且$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$也是一组标准正交基的充要条件为$Q$是正交矩阵.

10. 设三阶矩阵$A$的第1行为$(a,b,c)$不全为0，矩阵$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$为常数，且$AB=0$），求$Ax=0$的通解.

11. 设$A$为$n$阶方阵$(n\geq 3)$，证明$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.（$|A|$表示$\det(A)$，下同）

12. 设$n$元线性方程组$Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{bmatrix}_{n\times n}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

(1) 求$|A|$　　(2) 当$a$为何值时，方程组有唯一解，求$x_1$

(3) 当$a$为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

13. 设$A$为$n$阶非零方阵，$A^*$为伴随矩阵，$A^T$为转置，证当$A^*=A^T$时，$|A|\neq 0$.

14. 求$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$

15. 假设 $A\in M_3(R)$ 且 $A=A^T$，若 $1,1,-2$ 是 $A$ 的特征值，且 $(1,1,-1)^T$ 是对应 $-2$ 的特征向量，求矩阵 $A$.

类似：构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为 $1,1,-1$，属于特征值1的线性无关的特征向量有 $(1,1,1)^T$ 和 $(2,2,1)^T$

16. 设三阶实对称矩阵 $A$ 的各行元素之和均为3，$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程 $Ax=0$ 的两个解，求正交矩阵 $Q$ 和对角阵 $\Lambda$，使得

17. 在 $R^n$ 中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $R^n$ 的一组基，
$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\\ \cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\end{cases}$$
证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也为 $R^n$ 的一组基.

18. 设 $\sigma$ 是线性空间 $V$ 的线性变换，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 下对应的矩阵为
$$A=\begin{pmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$
求另一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，使 $\sigma$ 在该基下对应对角矩阵.

19. 设 $f: R^n\to R^n$ 是一个映射，满足：对任意的 $\alpha,\beta\in R^n$，有 $(f(\alpha),f(\beta))=(\alpha,\beta)$. 证明：$f$ 是一个线性映射.

20. 已知 $R^4$ 的子空间 $W$ 的一组基为 $\alpha_1=(1,-1,1,-1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1,0)^T$.
求 (1) $W^\perp$ (2) 将 $\alpha=(1,-3,1,-3)^T$ 表示成 $\alpha=\beta+\gamma$，使 $\beta\in W$，$\gamma\in W^\perp$.

21. 设 $W=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=(1,0,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,2,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-2,1)^T$，求 $W^\perp$ 的一组标准正交基.

22. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$，求SVD.