样题（二）简要解答

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。
2. 《样题（二）简要解答》仅给出题目答案与提示。**请同学们在考试作答过程中给出详细解题步骤。**

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}\qquad(b)\begin{bmatrix}100&200\\0&100\end{bmatrix}\qquad(c)\begin{bmatrix}23&69&188\\69&45&202\\188&202&68\end{bmatrix}\qquad(d)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$$

解1. *(a)* 可对角化，因为有两个互异特征值。

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是*100*的几何重数是*1*，小于它的代数重数*2*.

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为*1*的矩阵，故*0*的几何重数是*2*，迹是*17*，故第三个特征值是*17*，*17*的几何和代数重数都为*1*，*0*的几何和代数重数都为*2*.

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}\qquad(b)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad(d)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-6&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解2. *(a)* 正定。理由略。

(b) 不正定。理由略。

(c) 正定。理由略。

(d) 不正定。理由略。

题3 (10分). 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，分别找出$N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$的一组基。

解3. *(1)* $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$, $(0,0,0,1,1)$ 是$C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是$(-1,-1,1,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 的任意一组基均为$C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。

题4 (5分). 设$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求$P$ 的特征多项式，并说明理由。

解4. 特征多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

题5 (16分). 设

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

第一个矩阵记为Q，第二个矩阵记为R.

(1) (2分) 验证$Q^TQ = I$.

(2) (6分) 求到$C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

解5. *(1)* 略。

(2) 到$C(A)$ 的投影矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(3) 最小二乘解是$\hat{x} = (2\sqrt{2}+4, -2, 2)$.

题6 (6分). 已知：整数1653, 2581, 3451, 4582可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

解6. 略。

题7 (6分). 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解7. $x = 1, 2,$ 或-2.

题8 (6分). 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

解8. T 在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

题9 (20分). 设$A=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求A的奇异值分解$A=U\Sigma V^T$，其中U 是3阶正交阵，V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出A的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设$M=\begin{bmatrix}0&A\\A^T&0\end{bmatrix}$. 若$A\boldsymbol{v}=\sigma\boldsymbol{u}$, 其中$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$是奇异向量(singular vector), σ是奇异值(singular value), 证明$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$是$M$的特征向量，并由此应用奇异向量给出5阶正交阵$Q$，使得$Q^TMQ$是对角阵.

解9. *(a)* $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt6&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

(b) 略。

(c)

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac12&\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&0&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac12&-\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac12&-\frac12&\frac12&-\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-\frac12&\frac12&0\end{bmatrix}.$$

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C:3x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2=1$ 是实平面上哪种二次曲线，椭圆、双曲还是抛物线？若C 是椭圆，请算出它的长、短轴长，以及长、短轴所在的直线方程；若C 是双曲线，请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方阵，以及两条渐近线方程；若C 是抛物线，请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A=\begin{bmatrix}\frac12&0&\frac12&0\\0&\frac13&0&\frac23\\\frac12&0&\frac12&0\\0&\frac23&0&\frac13\end{bmatrix}$. 求4阶正交阵$Q$ 和对角阵Λ 使得$Q^TAQ=\Lambda$.

解10. *(1)* 椭圆。长轴长$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 短轴长$\frac{2}{\sqrt{7}}$，长轴所在直线方程是$x+2y=0$, 短轴所在直线方程是$2x-y=0$.

(2)

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

题11 (5分). 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\|=\max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ \|v\|=1}}\|Av\|=\max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ v\neq 0}}\frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

试证：

$$\|A\|=\max_{\substack{u\in\mathbb{R}^m,v\in\mathbb{R}^n\\ \|u\|=\|v\|=1}}u^TAv.$$

解11. 先证对任意的$w\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{u\in\mathbb{R}^m\\ \|u\|=1}}u^Tw=\|w\|.$$

当$w=0$ 时，等式显然成立。当$w\neq 0$ 时，一方面由*Cauchy-Schwarz*不等式知

$$u^Tw\leq|u^Tw|\leq\|u\|\ \|w\|=\|w\|.$$

另一方面，若令$u=\frac{w}{\|w\|}$, 则$u^Tw=\frac{w^T}{\|w\|}w=\|w\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{u\in\mathbb{R}^m,v\in\mathbb{R}^n\\ \|u\|=\|v\|=1}}u^TAv=\max_{\substack{v\in\mathbb{R}^n\\ \|v\|=1}}\|Av\|=\|A\|.$$

第二个等号用的是$\|A\|$ 的定义。

8. 证明：(1) 假设存在 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in R$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$

上式两边与 α_i 作内积，可得 $(\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r) = (\alpha_i, 0) = 0 \quad (i=1,2,\cdots,r)$

由内积的线性性质，可得 $k_1(\alpha_i,\alpha_1) + k_2(\alpha_i,\alpha_2) + \cdots + k_i(\alpha_i,\alpha_i) + \cdots + k_r(\alpha_i,\alpha_r) = 0$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是非零正交向量组，故有 $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ |\alpha|^2 \neq 0, & i = j \text{（}\alpha\text{非零）} \end{cases}$

从而可得 $k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$，即 $k_i = 0 \ (i=1,2,\cdots,r)$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

(2) 因 $r<n$，将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 向量组扩充一个向量 α_{r+1}，要求 α_{r+1} 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 都正交，我们将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 看成行向量时，即要求

$(\alpha_1, \alpha_{r+1}) = \alpha_1\alpha_{r+1}^T = 0 \quad (\alpha_2, \alpha_{r+1}) = \alpha_2\alpha_{r+1}^T = 0 \quad \cdots \quad (\alpha_r, \alpha_{r+1}) = \alpha_r\alpha_{r+1}^T = 0$

合并以上各式，写成矩阵形式，即有 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \alpha_{r+1}^T = A\alpha_{r+1}^T = 0$

其中 A 是以行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 合并的 $r \times n$ 矩阵，$r(A) = r < n$，即 $AX=0$ 有非零解

说明 $A\alpha_{r+1}^T = 0$ 的 α_{r+1} 存在，只要取 $AX=0$ 的一个非零解 x_1 作为 α_{r+1} 即可

取 $\alpha_{r+1} = x_1$. 此时已将正交量扩充到 $r+1$ 个. 若 $r+1<n$，按上述方法继续扩充，直到 n 个正交向量为止.

9. 证明：必要性. 即证 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 和 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是两组标准正交基，则 Q 为正交阵.

由标准正交基的关系 $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = I \qquad \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = I$

而 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)Q$

故 $I = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = [(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)Q]^T(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)Q$

$$= Q^T \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix}(\eta_1, \cdots, \eta_n)Q = Q^T I Q = Q^T Q \quad \text{得证.}$$

充分性，即证 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 为一组标准正交基，Q 为正交矩阵，则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 也是标准正交基.

Q 为正交矩阵，则有 $Q^TQ = I$. 而 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是一组标准正交基，故有 $\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = I$

则 $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = [(\eta_1, \cdots, \eta_n)Q]^T(\eta_1, \cdots, \eta_n)Q = Q^T \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_n^T \end{pmatrix}(\eta_1, \cdots, \eta_n)Q = Q^TQ = I$

即证 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 也是一组标准正交基.

10. 解：由 $AB=0$，知 $r(A)+r(B)\leq 3$，又 $A\neq 0, B\neq 0$，故 $1\leq r(A)\leq 2$，$1\leq r(B)\leq 2$

① 若 $k\neq 9$，必有 $r(B)=2$，此时 $r(A)=1$. 由于 $n-r(A)=3-1=2$

而 $AB=0$ 说明 B 的列向量是 $Ax=0$ 的解，通解为 $k_1(1,2,3)^T+k_2(3,6,k)^T$

② 若 $k=9$，则 $r(B)=1$，此时 $r(A)=1$ 或 2

1、若 $r(A)=2$，则 $n-r(A)=1$，通解为 $t(1,2,3)^T$，t 为任意常数

2. 若 $r(A)=1$，则 $Ax=0$ 与 $ax+by+cz=0$ 同解，由 $n-r(A)=2$，不妨设 $a\neq 0$.

于是 $Ax=0$ 的通解为 $k_1(-b,a,0)^T+k_2(-c,0,a)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

11. 证：由 $AA^*=A^*A=|A|I$，有 $(A^*)^*\cdot A^*=|A^*|I=|A|^{n-1}I$

① 若 $|A^*|\neq 0$，则 $|A|\neq 0$，$(A^*)^*=|A|^{n-1}I(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$

② 若 $|A^*|=0$，则 $|A|=0$（否则矛盾）.

当 $n>2$ 时，$r(A^*)\leq 1$，$r[(A^*)^*]=0$ 故 $A^*=0$ 于是 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

思考：$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)\leq n-2 \end{cases}$ $\quad r[(A^*)^*]=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & n=2 \\ 0, & n>2 \end{cases}$ $r(A^*)=1$

12. 解：(1) 记 $|A|=D_n$ 按第一列展开，则有

$$D_n=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 2a & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2a(2aD_{n-2}-a^2D_{n-3})-a^2(2aD_{n-3}-a^2D_{n-4})=\cdots$$

由 $D_1=2a$，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$ 代入上述递推关系式，可得 $D_n=(n+1)a^n$

另解：对于三对角矩阵，可用消元技巧化为上三角，将第一行的 $-\frac{a}{2}$ 倍加至第二行，…

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=D_n$$

(2) 由克莱姆法则，当$|A|\neq0$时方程组有唯一解，故$a\neq0$时有唯一解

$$x_1=\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix}1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & a^2 & 2a & 1\end{vmatrix}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(3) 当$a=0$时，方程组有无穷多解，即 $\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

由$r(A)=r(A\vdots b)=n-1$，通解为$(0,1,0,\cdots,0)^T+k(1,0,\cdots,0)^T$，$k$为任意常数

13. 证：由$A^*=A^T$，此时$A_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$

由$A\neq0$，不妨设$a_{ij}\neq0$，由行列式展开定理

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ii}A_{ii}+\cdots+a_{in}A_{in}$

$=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{ij}^2+\cdots+a_{in}^2\geq a_{ij}^2>0\quad$ 故$|A|\neq0$

另证：若$|A|=0$，则$AA^*=A^*A=|A|I=0=AA^T$

设A的行向量为$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则$\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$

于是$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$

进而有$A=0$，与A为非零矩阵矛盾，故$|A|\neq0$

14. $$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2}$$

15. 解: 由对称矩阵的性质, 不同特征值的特征向量必然正交, 并且可对角化.

即 $V_1 \perp V_2$ 且 $V_1 \oplus V_2 = R^3$. 任取 $\alpha=(a,b,c)^T \in V_1$,

则 $(a,b,c)^T \cdot (1,1,-1)^T = 0$ 即 $a+b-c=0$. 取 $\alpha_1=(0,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$

则 $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 故 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

类似: 令 $\lambda_3=-1$ 的一个特征向量是 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, 应用不同特征值的特征向量正交,

有 $a+b+c=0$ 且 $2a+2b+c=0$ 解得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in R$

令 $P_t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & -t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 若 $t \neq 0$, 则 P_t 可逆且 $P_t^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2t} & \frac{-1}{2t} & 0 \end{pmatrix}$

于是可得 $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. 解: 由矩阵A的各行元素之和均为3, 可得 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

故3为A的特征值, $\alpha=(1,1,1)^T$ 是属于3的特征向量.

又 $A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$, $A\alpha_2=0=0\cdot\alpha_2$, 故 α_1,α_2 是A属于 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此A的特征值为3, 0, 0.

属于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^T$, $k\neq 0$ 为常数.

$\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^T+k_2(0,-1,1)^T$, k_1,k_2 是不全为0常数

由于 α_1,α_2 不正交, 需要Schmidt正交化.

取 $\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, $\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

17. 证：只要证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关即可.

法1：用线性无关的定义，直接证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

设存在实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$

即 $k_1(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)+k_2(\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)+\cdots+k_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})=0$

重新整理，可得$(k_2+k_3+\cdots+k_n)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_n)\alpha_2+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})\alpha_n=0$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$R^n$的一组基，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，即

$$\begin{cases} k_2+k_3+\cdots+k_n=0 \\ k_1+k_3+\cdots+k_n=0 \\ \cdots \\ k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=0 \end{cases}$$

解得$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_n=0$，故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

法2：证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可以相互线性表示，即等价向量组

从等价向量组等秩的角度证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

法3：利用过渡矩阵. 由$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

即$B=AP$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为一组基，且

$$|P|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0$$

故P为可逆矩阵，因此$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$也为$R^n$的一组基.

18. 解：线性变换在某组基下对应的矩阵是对角矩阵时，该对角矩阵的对角元素是σ的特征值，相应的基向量为特征值对应的特征向量.

由 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5)\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$

即 $\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_5,\ \sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_4,\ \sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_3,\ \sigma(\varepsilon_4)=\varepsilon_2,\ \sigma(\varepsilon_5)=\varepsilon_1$

显然ε_3是σ对应于$\lambda=1$的特征向量，又$\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_5)=\varepsilon_5+\varepsilon_1=1\cdot(\varepsilon_1+\varepsilon_5)$

$\sigma(\varepsilon_2+\varepsilon_4)=\varepsilon_4+\varepsilon_2=1\cdot(\varepsilon_2+\varepsilon_4)$，$\sigma(\varepsilon_1-\varepsilon_5)=\varepsilon_5-\varepsilon_1=-1\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_5)$

故 $\mathscr{A}$ 有特征值为 $\lambda_1=1$(三重), $\lambda_2=-1$ (二重).

$\lambda_1=1$ 对对应的特征向量有 $\varepsilon_1+\varepsilon_5, \varepsilon_2+\varepsilon_4, \varepsilon_3$; $\lambda_2=-1$ 对应 $\varepsilon_1-\varepsilon_5, \varepsilon_2-\varepsilon_4$.

故对应的对角矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&-1&\\&&&&-1\end{pmatrix}$

$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5, \alpha_2=\varepsilon_2+\varepsilon_4$

$\alpha_3=\varepsilon_3$

$\alpha_4=\varepsilon_1-\varepsilon_5, \alpha_5=\varepsilon_2-\varepsilon_4$

19. 证明: 只需要证 $\forall \alpha, \beta\in R^n, a\in R$, 有 $f(a\alpha)=af(\alpha)$; $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$

由 $(f(a\alpha)-af(\alpha), f(a\alpha)-af(\alpha))=(f(a\alpha), f(a\alpha))-2(f(a\alpha), af(\alpha))+(af(\alpha), af(\alpha))$

$=(a\alpha, a\alpha)-2a(a\alpha,\alpha)+a^2(\alpha,\alpha)=0$

$(f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta), f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta))$

$=(f(\alpha+\beta), f(\alpha+\beta))-2(f(\alpha+\beta), f(\alpha))-2(f(\alpha+\beta), f(\beta))+(f(\alpha), f(\alpha))+(f(\beta), f(\beta))$

$+2(f(\alpha), f(\beta))$

$=(\alpha+\beta, \alpha+\beta)-2(\alpha+\beta, \alpha)-2(\alpha+\beta, \beta)+(\alpha, \alpha)+(\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)=0.$

20. 解: (1) $\forall \xi\in W^{\perp}$, 有 $(\alpha_1, \xi)=0, (\alpha_2, \xi)=0$ 即 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$

可得基础解系为 $\xi_1=(2,1,-1,0)^T, \xi_2=(1,0,0,1)^T$

$W^{\perp}=span(\xi_1, \xi_2)$

(2) 由 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\xi_1+x_4\xi_2$, 即

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\-3\end{pmatrix}$$

可得 $x_1=2, x_2=-1, x_3=0, x_4=-1$, 故 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2=(2,-3,1,-2)^T\in W$

$\gamma=-\xi_2=(-1,0,0,-1)^T\in W^{\perp}$ 且 $\alpha=\beta+\gamma$.

21. 解: 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&2&3\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$, 则 $W=R(A^T)$ ← A的行空间

那么 $W^\perp$ 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 $N(A)$，即 $W^\perp=N(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&2&3\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 可得 $x_1=(-2,2,1,0)^T$，$x_2=(1,1,0,-1)^T$

又 $(x_1,x_2)=0$，即 x_1,x_2 正交，故 $\xi_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{1}{3}(-2,2,1,0)^T$

$\xi_2=\frac{x_2}{\|x_2\|}=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,0,-1)^T$ ξ_1,ξ_2 是 $W^\perp$ 的一组标准正交基.

22. 解：可得 $AA^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，$A^TA=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

AA^T 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$（从而 A^TA 的特征值为 2 和 0，代数重数均为 2）

因此 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sigma_2=\sqrt2$

求 AA^T 的一组标准正交特征向量 $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，令 $U=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$v_1=\frac{1}{\sigma_1}A^Tu_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_2=\frac{1}{\sqrt2}A^Tu_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

还要求 v_3 和 v_4（无法用公式）. 而 v_1,v_2,v_3,v_3 为 R^4 的一组标准正交基

从而可以取 $v_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$v_4=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

于是 $V=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ $A=U\Sigma V^T$，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt2&0&0&0\\0&\sqrt2&0&0\end{pmatrix}$

此题也可先将 A^TA 对角化得到 V，计算特征向量时需格外注意.

求如下推广的n阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

解:(加边法) 将其扩充成一个标准的$n+1$阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix} = D_{n+1} = \prod_{1\le i\le n}(y-x_i)\prod_{1\le j<k\le n}(x_k-x_j)$$

原来的行列式为D_{n+1}关于y^{n-1}的代数余子数的相反数，因此等于D_{n+1}关于y的次幂的展开式中y^{n-1}的系数的相反数，即$\left(\sum_{1\le i\le n} x_i\right)\prod_{1\le j<k\le n}(x_k-x_j)$.

设A是一个n阶反对称矩阵，即$A^T=-A$且A为实矩阵.证.

(1) I_n+A可逆且$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$是正交阵.

(2) 假设$n=3$，则存在正交阵Q和向量b，使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$

证: (1) 设$x\in\mathbb{R}^n$满足$(I_n+A)x=0$，则有$Ax=-x$，$x^TAx=-x^Tx$.

而$x^TAx=(x^TAx)^T=x^TA^Tx=-x^TAx$，即$x^TAx=0$，故$x^Tx=0$

从而$(I_n+A)x=0$只有零解，即I_n+A可逆，令$Q=(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$

$Q^TQ=(I_n+A^T)^{-1}(I_n-A^T)(I_n-A)(I_n+A)^{-1}=(I_n-A)^{-1}(I_n+A)(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$

$=(I_n-A)^{-1}(I_n-A)(I_n+A)(I_n+A)^{-1}=I_n$.

(2) 由于$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^3|A|$，则$|A|=0$，A不可逆. 存在α_1使$A\alpha_1=0$

向量α_1可以扩充成$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是一个正交阵

且$AQ=(0\ A\alpha_2\ A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_4 \\ 0 & c_2 & c_5 \end{pmatrix}$，故$c_1=c_4=c_2=c_6=0$, $c_3=-c_5$. 则阵

1、已知三阶矩阵A的第1行是(a,b,c)不全为零，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ (k为常数)，且$AB=0$，求线性方程组$Ax=0$的通解。

解：由$AB=0$，知$r(A)+r(B)\le 3$，又$A\ne 0$，$B\ne 0$，故$1\le r(A)\le 2$，$1\le r(B)\le 2$

① 若$k\ne 9$，必有$r(B)=2$，此时$r(A)=1$。由于$n-r(A)=3-1=2$，又因$AB=0$知B的列向量是$AX=0$的解，故$AX=0$的通解为：$k_1(1,2,3)^T+k_2(3,6,k)^T$，$k_1,k_2$为任意常数。

② 若$k=9$，则$r(B)=1$，此时$r(A)=1$或2。

1. 若$r(A)=2$，则$n-r(A)=1$，$AX=0$的通解为$k(1,2,3)^T$，k为任意常数。

2. 若$r(A)=1$，则$AX=0$与$ax+by+cz=0$同解。由$n-r(A)=2$，不妨设$a\ne 0$。
那么$AX=0$的通解为$k_1(-b,a,0)^T+k_2(-c,0,a)^T$，$k_1,k_2$为任意常数。

2、设三阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$AX=0$的两个解。

① 求A的特征值和特征向量。 ② 求正交矩阵Q和对角阵Λ，使$Q^TAQ=\Lambda$

解：① 由于矩阵A的各行元素之和均为3，即有$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

所有3是A的特征值，$\alpha=(1,1,1)^T$是A属于3的特征向量，

又$A\alpha_1=0=0\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\alpha_2$，故α_1,α_2是矩阵A属于$\lambda=0$的两个线性无关的特征向量。因此，矩阵A的特征值是3，0，0。

$\lambda=3$的特征向量为$k(1,1,1)^T$，其中$k\ne 0$为常数

$\lambda=0$的特征向量为$k_1(-1,2,-1)^T+k_2(0,-1,1)^T$，其中$k_1,k_2$是不全为0的常数

② 由于α_1,α_2不正交，故要Schmidt正交化。$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 单位化 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$