2013－2014 秋 线性代数（A卷）

1. (1) -1； (2) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$； (3) $\pm i$（各2重）

(4) $I+(e^t-1)P$ (5) $\{0\}$.

2. (1) 错； 加法不封闭.

(2) 对； A行满秩，则 AA^T可逆，$AA^Ty=b$有解.

(3) 对； $P_CA=A$，$AP_R=A$.

(4) 错； 例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $\underset{C(A^T)}{\overset{\shortparallel}{C(A)}}=\underset{C(B^T)}{\overset{\shortparallel}{C(B)}}=\mathbb{R}^2$

$$N(A)=N(B)=\{0\}=N(A^T)=N(B^T).$$

(5) 对； $Ax=b$有解 $\Leftrightarrow r(A\,\vdots\,b)=r(A)=n\Rightarrow(A\,\vdots\,b)$奇异

反之，$(A\,\vdots\,b)$奇异，A的列无关 $\Rightarrow b\in C(A)$.

3. $(A\,\vdots\,P)\xrightarrow{\text{行变换}}(I_3\,\vdots\,A^{-1}P)$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&2&-3&-4\\0&1&0&-1&2&2\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-3&-3\\0&1&0&-1&2&2\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}P=\begin{pmatrix}2&-3&-3\\-1&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3&-3\\-1&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&-3\\2&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

4. $A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{pmatrix}$ A有4个主元

$\Rightarrow a\neq0,\ b\neq a,\ c\neq b,\ d\neq c.$

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{pmatrix}$$

5. $A = I_5 + \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ \cdots\ 1)$

$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ \cdots\ 1)$ 有5个特征值，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$，$\lambda_5=5$.

$\Rightarrow$ A有5个特征值，$\lambda_1=\cdots=\lambda_4=1$，$\lambda_5=6$.

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A \qquad |A|=\lambda_1\cdots\lambda_5=6$.

$$(A^{-1})_{1,3}=\frac{1}{6}C_{31}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-1&-1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}$$

6. (a) P的7个特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$，$\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=0$

(b) 关于特征值1，特征子空间 $=S$

—— 0，—— …… $=S^{\perp}$

(c) u_0在S上投影为v_1，在$S^{\perp}$上投影为v_2

则 $u(t)=v_1e^{-t}+v_2 \qquad \lim\limits_{t\to\infty}u(t)=v_2$

7. (1) 令 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix} \qquad C(B)=C(A)$.

投影 $p=B(B^TB)^{-1}B^Tb=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(2) $\hat{x}=(B^TB)^{-1}B^Tb=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(3) 矩阵可逆，列空间 $=\mathbb{R}^3$，投影 $=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

8. 令 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

则 $\begin{aligned} a+b+c=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(答案不唯一).