2013-2014秋季线性代数期末试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2013 年 1 月 16 日

姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________

注：填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (15分) 填空题(每小题3分)：

   (1) 有六个互异的三阶置换阵，它们的乘积的行列式是____.

   (2) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$是$\mathbb{R}^3$中的向量, 其中$\alpha_1, \alpha_2$线性无关, 已知$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, 且$\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, 则非齐次线性方程组$Ax = \beta$的通解是____.

   (3) 假设M是一个4阶实矩阵，且是反对称阵和正交阵，则M的全部特征值是____.

   (4) 假设P是一个投影矩阵，则e^{Pt}能写成P的一个多项式，它是____.

   (5) 若$N(A) = N(A^2)$,则$N(A) \cap C(A) =$ ____.

2. (20分) 判断对错，并给出简单的**解释** (每小题4分):

   (1) 3阶不可逆方阵的全体按通常的加法数乘形成3阶方阵的集合的一个子空间。

   (2) 若线性方程组$Ax = b$无解，则A不是行满秩的矩阵.

   (3) 设A是一个$m \times n$阶矩阵，P_C是列空间$C(A)$上的投影矩阵，P_R是行空间$C(A^T)$上的投影矩阵，则$P_C A P_R = A$.

   (4) 若实矩阵A和B有同样的四个基本子空间，则存在实数a使得$A = aB$.

   (5) 设A是一个$(n+1) \times n$阶矩阵，$rank(A) = n$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, 则$Ax = b$有解当且仅当增广矩阵$(A|b)$是奇异矩阵(singular matrix).

3. (7分) 设$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 考虑增广矩阵$B = (A \quad | \quad P)$，对$B$进行行变换得到如下矩阵$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, 求$A^{-1}$.

4. (10分) 设矩阵$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$，求$a, b, c, d$满足什么条件时，$A$有4个主元，并写出相应的$LU$分解。

5. (10分) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求出$A$的全部特征值和$A^{-1}$在第一行第三列的元素。

6. (14分) 设S是$\mathbb{R}^7$的一个4维子空间，P是S上的投影矩阵。

   (a) 求出P的7个特征值；

   (b) 求出P的全部特征向量；

   (c) 考虑一阶齐次微分方程组$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Pu, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$ 其中$u_0 \in \mathbb{R}^7$. 假设$u = u(t)$是解函数，求极限向量$u(\infty) = \lim_{t\to\infty} u(t)$.

7. (15分)

   (1) 求向量$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$在矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$的列空间上的投影.

   (2) 求方程组$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$的最小二乘解$\hat{x}$.

   (3) 不计算,直接写出向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$在矩阵$\begin{pmatrix} 10000 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$的列空间上的投影.

8. (9分) 构造一个3阶实对称矩阵，使其特征值为$1, 1, -1$,其相应特征向量有$(1, 1, 1)$和$(2, 2, 1)$.