2011-2012秋季线性代数期末试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2013 年 1 月 4 日

姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________

注：填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (30分) 填空题(每小题3分)：

(1) 设A是一个$m\times n$阶矩阵, B是一个$n\times s$阶矩阵, $r(A)=n$, $r(B)=r$, 则$\dim N(AB)=$____.

(2) 设A和B是可逆矩阵, 则分块矩阵$C=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵是____.

(3) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且$A$与$B$相似，则$x, y=$____.

(4) 设a_1, a_2, a_3是$\mathbf{R}^4$中相互正交的单位向量，矩阵$P=I_4-(a_1a_1^T+a_2a_2^T+a_3a_3^T)$的全部特征值是____(写明重数).

(5) 设A, B是两个n阶矩阵, 且$AB=0$, $Ax=0$和$Bx=0$无公共非零解,则$r(A)+r(B)$____n(填写$<$,$>$或$=$).

(6) 关于一元函数$y=y(t)$, 二阶微分方程$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0$的通解(complete solution)是____.

(7) 设4阶矩阵A与B相似, I是4阶单位阵, A的特征值是$1,1,2,2$, 则$|B^{-1}+I|=$____.

(8) 补齐2阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ & \end{pmatrix}$的第二行元素, 使$A$有特征向量$x_1=(3,1)$和$x_2=(2,1)$.

(9) 设$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 与$S$交换的3阶矩阵全体形成的向量空间维数是____.

(10) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P_1是A的第一列形成的1维空间上的投影矩阵, P_2是A的列空间上的投影矩阵, 则$P_2P_1=$____.

2. (10分) 设a, b, c, d为不全为0的实数，矩阵$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix}$，

求A的特征值和相应特征子空间。

3. (12分) 设A是一个$m \times n$阶矩阵, 假设$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解,解集为S.

   (1) 证明：S中的解向量在A的行空间$C(A^T)$上的投影均相等(记作$\mathbf{x}_{row}$);

   (2) 证明：$\mathbf{x}_{row}$是$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的长度最小的解；

   (3) 假设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$, 求$\mathbf{x}_{row}$.

4. (12分)$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 16 \\ 5 & 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   求A的四个基本子空间的基.

5. (10分) 给定两个数列$\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足$a_1 = 1, b_1 = -1$, $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$.

   (1) 定义$u_k = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, 求矩阵$A$使得$u_{k+1} = Au_k$.

   (2) 求A的特征值和a_n和b_n的通项公式.

6. (12分) 给定$\mathbb{R}^2$上3个点(x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

   (1) 设最小二乘意义下拟合这三个点的最佳曲线是$y = C + Dx$, 证明这条直线过平均值点$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$;

   (2) 令$e_i = y_i - (C + Dx_i)$, i=1,2,3. 证明$e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

   (3) 假设三个点是$(-2, 1), (0, 2), (2, 4)$, 验证以上结论.

7. (14分) 设$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{pmatrix}$, 其中$t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$.

   (1) 假设A的秩为2, 求A的列空间(column space)$C(A)$的一组标准正交基(写出计算公式即可)；

   (2) 求A的QR分解$A = QR$；

   (3) 具体写出R不可逆的条件；

   (4) 假设A的秩为2, $b \in \mathbb{R}^4$,证明b在$C(A)$上投影是QQ^Tb.