考试课程　线性代数（1）　　2015年1月18日　　（**A** 卷）

系、班____________________ 姓名_______________ 学号_______________

一、填空题（每题4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. 求实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+3x_2x_3+4x_1x_3$的规范形：_______________
_________________________.

2. 线性方程组$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$有解的充分必要条件是：__________.

3. 设F为一数域，$A\in M_n(F)$，$r(A)=r<n$，则分块矩阵$\begin{bmatrix} A & A \\ A & 3A \end{bmatrix}$的相抵标准形为：_______________.

4. 设C为复数域，$A\in M_n(C)$，下面选项中能使A相似对角化的有__________。
（1）A满足$A^2+A=0$；（2）A为对称矩阵；（3) A有n个特征向量：（4）A相合于对角阵.

5. 子空间$W=L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix})$ 在$\mathbb{R}^3$中的正交补$W^{\perp}=$______________________.

6. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$为正定的矩阵，则$a$的取值为：___________________.

7. 设$\alpha_1=(4,-1,8)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(3,1,1)$为一右手直角坐标系中的三个向量，则以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为棱的平行六面体的体积为：______________.

8. 已知右手直角坐标系中一点$A(0,1,-1)$, 及两个向量$\alpha=(-1,4,2)$, $\beta=(1,2,3)$. 则过点A方向向量为$\alpha\times\beta$的直线的标准方程为：____________________.

9. 设σ为n维线性空间V上的线性变换，σ的秩为r, $0 < r < n$, 且满足$\sigma^2 = \sigma$，则σ的特征多项式为：_________.

二、计算题和证明题（共64分）

10.（14分）设$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$。求一正交替换$x = Qy$将二次型$Q(\alpha) = x^T Ax$化为标准形.

11. (18分) 设σ为数域F上线性空间V上的一个线性变换，σ在V的基α_1, α_2, α_3, α_4下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$，$\ker(\sigma)$，$\ker(\sigma) \cap \mathrm{Im}(\sigma)$的基.

12. (12 分) 已知数域F上的线性方程组$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求当$\lambda$为何值时方程组有无穷多解，并求出通解。

13. (12分) 在复数域C上的线性空间$M_n(C)$内定义一个线性变换σ如下：

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{bmatrix},$$

(1) 求σ的特征多项式.

(2) 证明σ的矩阵可以相似对角化.

14. （8分）设W为数域F上的n维向量空间F^n的子空间，且$W \neq F^n$. 证明：W为F上某个n元齐次线性方程组的解空间。