考试课程　线性代数（1）　　2015年1月18日　　（**A 卷**）

一、填空题（每题4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$
2. $a\neq 0$ （或者$a\neq 0$, b 任意）；$a=0,b=2$. (**对一组2分**）
3. $\begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. （1）
5. $W^{\perp}=L(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix})$
6. $a>1$.
7. 52.
8. $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{-6}$
9. $f_\sigma(\lambda)=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

二、计算题和证明题（共64分）

10.（14分）设$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$。求一正交替换$x=Qy$将二次型$Q(\alpha)=x^TAx$化为标准形.

解：1. 求A的特征值. (**3分，一个特征值1分**）

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-5)(\lambda+5)$，所以$\lambda_1=0,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$.

2. 求特征向量. （**6分，求对一个特征向量2分，可以不单位化**）

当$\lambda_1=0$时，$(0I-A)x=0$，即$Ax=0$的基础解系为$\eta_1=(-\frac{4}{3},0,1)^T$，单位化得$\gamma_1=(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5})^T$.

当$\lambda_2=5$时，$(5I-A)x=0$的基础解系为$\eta_2=(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1)^T$，单位化得$\gamma_2=(\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}})^T$.

当$\lambda_2=-5$时，$(-5I-A)x=0$的基础解系为$\eta_3=(\frac{3}{4},-\frac{5}{4},1)^T$，单位化得$\gamma_3=(\frac{3}{5\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}})^T$.

3. 求正交替换及标准形.（**5分，Q对3分，标准形对2分**）

由2，令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则$Q^TAQ=\mathrm{diag}(0,5,-5)$. 于是$Q(\alpha)=x^TAx$ 经过正交替换$x=Qy$化为标准形$5y_2^2-5y_3^2$.

12. (12 分) 已知数域F上的线性方程组$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&\lambda+2\\1&\lambda&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$. 求当$\lambda$为何值时方程组有无穷多解，并求出通解。

解: 对增广矩阵高斯消元，

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&\lambda+2&3\\1&\lambda&-2&0\end{bmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&\lambda&1\\0&0&(\lambda-3)(\lambda+1)&\lambda-3\end{bmatrix}.$$

所以当$\lambda=3$时方程组有无穷多解。（**8分，高斯消元对5分，高斯消元不全对3分；得到$\lambda=3$ 给3分**）

且当$\lambda=3$时导出组的基础解系为$\eta=(-4,2,1)^T$，特解为$\xi_0=(3,-1,0)$ 通解为$c\eta+\xi_0$，$c\in F$.（**4分，基础解系对2分，特解对2分。**）

11. (18分) 设σ为数域F上线性空间V上的一个线性变换，σ在V的基α_1, α_2, α_3, α_4下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&0\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},$$

分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$，$\ker(\sigma)$，$\ker(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)$的基.

解：1. 求$\mathrm{Im}(\sigma)$的基.（**6分，对一个基向量3分，若只是求出基向量的坐标，对一个2 分。**）

先求得A的列向量组的极大无关组为$\beta_1=(1,0,1,1)^T,\beta_2=(0,1,-1,-1)^T$，所以$\mathrm{Im}(\sigma)$的基为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\beta_1=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\beta_2=\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$.

2. 求$\ker(\sigma)$的基.（**6分，对一个基向量3分，若只是求出基向量的坐标，对一个2 分。**）

先求得$Ax=0$的基础解系为$\eta_1=(1,1,0,0)^T,\eta_2=(-1,0,0,1)^T$，所以$\ker(\sigma)$ 的基为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\eta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\eta_2=-\alpha_1+\alpha_4$.

3. 求$\ker(\sigma)\cap \mathrm{Im}(\sigma)$的基.（**6分，若只是求出基向量的坐标5分。**）

由维数公式可求得$\dim\ker(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)=1$. 先求得$R(A)\cap N(A)$的基为$\gamma=(1,1,0,0)^T$, 所以$\ker(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)$的基为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\gamma=\alpha_1+\alpha_2$.

13. (12分) 在复数域C上的线性空间$M_n(C)$内定义一个线性变换σ如下：

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{bmatrix},$$

(1) 求σ的特征多项式.

(2) 证明σ的矩阵可以相似对角化.

解：(1) 取$M_n(C)$的基为$E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}$，其中$E_{ij}$表示第$i$行第$j$列的元素为1别的元素都为0的$n$阶矩阵。$\sigma$在上述基下的矩阵为准对角阵$A=\mathrm{diag}(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_1)$，其中$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

所以$f_\sigma(\lambda)=f_A(\lambda)=(f_{A_1}(\lambda))^n=(\lambda^n-1)^n$.（**6分，$A$ 对3分，特征多项式对3分。**）

(2) 由（1）σ在一组基下的矩阵A为准对角证，准对角块A_1的特征多项式为$f_{A_1}(\lambda)=\lambda^n-1$，无重根，故$A_1$有$n$个不同的特征值，所以$A_1$可以相似对角化，从而$A$可以相似对角化。（**6分，$A_1$可以相似对角化4 分，所以$A$可以相似对角化2分。**）

14. （8分）设W为数域F上的n维向量空间F^n的子空间，且$W\neq F^n$. 证明：W为F上某个n元齐次线性方程组的解空间。

证明：当$W=\{0\}$时，W为线性方程组$Ax=0$（A可逆）的解空间。(**2分**)

当$W\neq\{0\}$时，设$\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})^T,\cdots,\alpha_r=(a_{r1},a_{r2},\cdots,a_{rn})^T$ 为W的基，构造线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n & = & 0 \end{array}\right.,$$

其基础解系含$n-r$ 个向量, 设为$\eta_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n})^T, \cdots, \eta_{n-r} = (b_{n-r1}x_1, b_{n-r2}, \cdots, b_{n-rn})$。构造线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n & = & 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ b_{n-r1}x_1 + b_{n-r2}x_2 + \cdots + b_{n-rn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \qquad (1),$$

则(1)的基础解系含$n-(n-r)=r$个向量，显然$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为（1）的解，所以$W$为（1）的解空间。(**6分**)