线性代数（工科类）期中考试

2019 年 11 月 2 日

题 1. *(5 分)* 把矩阵 A 的第一行的 *2* 倍加到第二行，之后互换第一列和第二列，得到的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。那么，矩阵 A 是什么？

解答 1. 倒回去 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$

题 2. *(5 分)* 试给出一个 *2* 阶上三角矩阵 U，使得 U 不是对角阵，且 $U^{-1} = U$。

解答 2. $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **注：** 满足这样条件的 U 只可能是 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$.

题 3. *(5 分)* 假设 $A_1, A_2, \ldots, A_4$ 是同阶可逆方阵，$C = A_1A_2A_3A_4$ 是它们的乘积，试用 C^{-1} 和 A_1, A_2, A_4 表示 A_3^{-1}.

解答 3. $C^{-1} = A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$, 故 $A_3^{-1} = A_4C^{-1}A_1A_2$.

题 4. *(8 分)* 试写下两个非零的 *2* 阶方阵 A, B 使得 $A^2 = B^2 = 0$. 所有满足 $A^2 = 0$ 的 *2* 阶方阵的全体是否是 $M_2(\mathbb{R})$ 的线性子空间？若是请证明，若不是请说明原因。

解答 4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 记 $Nil = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^2 = 0\}$. 因为 $A, B \in Nil$ 而 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个 *2* 阶置换阵 P，其平方是 I_2, 所以 $P \notin Nil$, 由此可见，Nil 在加法运算下不封闭，故它不是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间。**注：** 满足 $A^2 = 0$ 的 *2* 阶方阵都形如 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，其中 $a^2 + bc = 0$.

题 5. *(8 分)* 设 $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, 且线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有三组解 $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 试证明 $\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$ 也是该方程组的解。

解答 5. 因为 $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ 都是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解，所以 $\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解。方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解集 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性子空间。既然 $N(A)$ 包含 $\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}$ 和 $\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2}$，那么 $N(A)$ 必然包含这两个向量的所有线性组合。又因 $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 不共线，故它们的所有线性组合是 $\mathbb{R}^2$，也就是说 $N(A) = \mathbb{R}^2$. 所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是 $\mathbf{x_1} + N(A) = \mathbf{x_1} + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$，特别的 $\mathbf{x_4}$ 是该方程组的解。

其他方法：设 $A = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$，则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 等价于 $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ 且 $a_{21}x + a_{22}y = b_2$. 这两个方程都是平面中的直线方程，除非系数 $(a_{11}, a_{12}) = (0, 0)$ 或 $(a_{21}, a_{22}) = (0, 0)$. 因为 $3 = \frac{2+4}{2}$, 而 $4 \neq \frac{7+8}{2}$，所以题设中给出的三点不共线，也就是说没有一条直线会同时包含这三点。这说明 $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, 即 $A = 0$；原方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 又有解，所以必有 $\mathbf{b} = 0$, 所以任意向量都是 $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解。

题 6. *(8 分)* 设 A 是 3×4 阶矩阵，A 的零空间 $N(A)$ 是 $\{c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. 求 *rref*$(A)$.

解答 6. 记 $R = \mathit{rref}(A) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}$，其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}^3$. 从 $N(A) = N(R)$ 的表达形式可以看出，γ_2, γ_4 是 R 的自由列，γ_1, γ_3 是 R 的主元列，并且 $3\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 + 4\gamma_3 + \gamma_4 = 0$. 所以 $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_2 = -3\gamma_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_4 = -\gamma_1 - 4\gamma_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

合起来有 $R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

题 7. *(10 分)* 求下面线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &= 0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &= 2 \end{cases}$$

解答 7. 对增广矩阵作初等变换 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \mid & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \mid & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & \mid & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & \mid & -3 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & \mid & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \mid & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & \mid & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & \mid & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & \mid & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & \mid & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix}$，从行简化后的增广矩阵可以算出方程组的通解是

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

题 8. *(20 分)* 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

1. *(6 分)* 证明：A 可逆的充分必要条件是 a,b,c 两两不同。
2. *(6 分)* 当 A 可逆时，求 A 的 LU 分解。
3. *(8 分)* 当 $a=1,\ b=2,\ c=3$ 时，求 A^{-1}.

解答 8. *1.* 对 A 作两次行倍加变换得到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$，再作一次行倍加变换得到

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix},$$

其中右下角的元素通过计算 $c^2-a^2-(c-a)(b+a)=(c-a)(c+a)-(c-a)(b+a)=(c-a)(c-b)$ 得来。因为初等行变换不影响矩阵是否可逆，所以 A 可逆当且仅当 U 可逆，而上三角阵 U 可逆当且仅当它的对角线元素 $b-a,(c-a)(c-b)$ 都非零，也就是 a,b,c 两两不同。

2. 把上面消元过程中用到的乘子放在合适的位置上就得到了 LU 分解中的 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\a^2&b+a&1\end{bmatrix}$, U 如上。

3. 当 $(a,b,c)=(1,2,3)$ 时，可以用 *Gauss-Jordan* 方法计算 A 的逆矩阵如下

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\1&4&9&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&3&8&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&2&2&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&2&2&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

题 9. *(6 分)* 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\end{bmatrix}$.

1. *(2 分)* 把 A 写成 $\alpha\beta^T$ 的形式，其中 α,β 均是列向量。

2. *(4 分)* 计算 A^{2019}.

解答 9. *1.* $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}$.

2. 记 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\beta^T=\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}$, 则 $A=\alpha\beta^T$. 又因为 $\beta^T\alpha=\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1+4+12=17$, 所以 $A^{2019}=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)^{2018}\alpha\beta^T=17^{2018}A$.

题 10. *(8 分)* 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. 求所有与 A 可交换的矩阵。

解答 10. A 可以写成 I_3+N 的形式, 其中 $N = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$. A 与 B 交换当且仅当 $(I_3+N)B = B(I_3+N)$, 也就是 $NB = BN$. 不妨设 $B = (b_{ij})$, 那么

$$NB = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & b_{31} \end{bmatrix},$$

所以 $NB = BN$ 当且仅当 $b_{31} = b_{32} = b_{21} = 0$ 且 $b_{11} = b_{33}$. 这样的矩阵形如 $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{bmatrix}$.

题 11. *(12 分)* 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明:

1. *(3 分)* A^TA 是对称矩阵;
2. *(6 分)* 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是非零向量, 且 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $A^TA\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$. 证明 $c \geq 0$;
3. *(3 分)* 证明 A^TA 的对角线元素都不小于零.

解答 11. *1.* $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.

2. 因为 $A^TA\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$, 所以 $\boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^Tc\boldsymbol{x}$. 等式的左边是 $(A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x})$, 这是 m 维实向量 $A\boldsymbol{x}$ 的范数平方, 故是一个 ≥ 0 的数。等式的右边是 $c\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ 是 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数平方, 故是一个正实数。综上有 $c\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \geq 0$, 所以 $c \geq 0$.

3. 由矩阵乘法的定义知 A^TA 的 (i,i)-元素是 A^T 的第 i 行与 A 的第 i 列的点积, 而 A^T 的第 i 行就是 A 的第 i 列 (在不计转置意义下), 所以 A^TA 的 (i,i)-元素是 A 的第 i 列与自身的内积, 也就是它的范数平方, 这总是一个非负的实数。

题 12. *(5 分)* 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $A^k = 0$, 其中 k 是一个正整数。

1. *(2 分)* 证明 $I_n - A$ 可逆,
2. *(3 分)* 若 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.

解答 12. *1.* 验证 $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k) = I_n - A^k = I_n$，所以 $I_n - A$ 可逆，且 $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$.

2. 把 $AB + BA = B$ 重新写成 $AB = B(I_n - A)$，左乘 A 得到

$$A^2B = A(AB) = AB(I_n - A) = B(I_n - A)^2,$$

再乘一次 A 得到

$$A^3B = AA^2B = AB(I_n - A)^2 = B(I_n - A)^3,$$

以此类推，不难看出对任意的正整数 m，

$$A^mB = B(I_n - A)^m$$

成立。特别的，等式对 $m = k$ 成立。当 $m = k$ 时，等式的左边是 $A^kB = 0B = 0$, 等式的右边是 $B(I_n - A)^k$, 故 $0 = B(I_n - A)^k$. 又由 *1* 知 $I_n - A$ 可逆，所以它的 k 次幂也可逆，右乘 $(I_n - A)^{-k}$ 即得 $B = 0$.