几何与代数(1) 考试样题一

一．填空题（将答案填在下面的空格内，每题 4 分，合计 32 分）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & a & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，已知 B 为 3 阶非零矩阵，满足 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ ________.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则矩阵 AB 的全体特征值为__________.

3．在 R^3 中，已知从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵是______________________.

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则 A 的行列式 $|A|=$_____.

5．在直角坐标系中，已知平面 π 过点 $(1,1,0)$，$(0,0,1)$，$(0,1,1)$，则与平面 π 垂直且过点 $(1,1,1)$ 的直线的对称方程（标准方程）是_________________.

6．设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，η_1,η_2,η_3 为 $Ax=b$ 的 3 个解，已知 $\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,0,1,3)^T$，则 $Ax=b$ 的通解为________________________________.

7．将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 列与第 3 列交换，然后将所得矩阵的第 1 列的 -2 倍加到第 2 列，得到矩阵 B，则矩阵 $A^{-1}B=$ ______________.

8． $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3=1$ 表示的二次曲面是________________.

二．计算题（每题 18 分，合计 54 分）

9．设 3 阶实对称矩阵 A 有 3 个特征值$3,3,-3$，已知属于特征值-3的特征向量为 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$，求矩阵 A 及 A^{-1}.

10．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维线性空间$V$的一个基，$\sigma$是$V$上的线性变换，已知 $\sigma(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_3)=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$，

（1） 求线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵；

（2） 设由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，向量$\gamma$在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标是$X=(0,-1,2)^T$，求$\sigma(\gamma)$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.

11．设n元($n\ge 4$)齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+bx_4+\cdots+bx_n=0\\ bx_1+ax_2=0\\ bx_1+ax_3=0\\ -bx_1+ax_4+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中$b\ne 0$．试讨论a,b,n取何值时，方程组只有零解；取何值时，方程组有非零解？在有非零解时，写出方程组的基础解系.

三．证明题（第 12 题 8 分，第 13 题 6 分）

12．设A是$m\times n$矩阵，β是m维非零列向量，已知β是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是导出组$Ax=0$的基础解系，试证明

（1）$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$线性无关；

（2）$Ax=b$的解集合的极大线性无关组含有$r+1$个向量.

13．设A为任意n阶实反对称矩阵（即$A^T=-A$），试证明$I-A^2$是正定矩阵.