清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　线性代数（1）　　2018 年 1 月 14 日　（**A 卷**）

系、班____________________姓名____________________学号______________________

一、填空题（每空 4 分，共 36 分，请直接填在试卷的横线上）

1. 已知直角系中一点 $A(1,0,1)$，以及一个平面 $\pi: 2x-y+3=0$，则 A 关于 π 的对称点 A' 的坐标为________________________.

2. 三个矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 中同时满足相抵、相似、相合的矩阵有____________________________________.

3. 在 $R_2[x]=\{a_1x+a_0 \mid a_i \in R\}$ 中定义内积 $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，用施密特正交化方法将 $R_2[x]$ 中的基 $1,x$ 化为一组标准正交基____.

4. 设 A 为 n 阶负定矩阵，α 为非零的 n 维实向量，则矩阵 $\begin{pmatrix}0&\alpha^T\\\alpha&A\end{pmatrix}$ 的秩为________________.

5. 已知三阶复矩阵 $A=\begin{pmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{pmatrix}$，则 A 的 3 个特征值分别为__________________________.

6. 设线性空间 V 上的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，写出所有包含向量 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的 σ 不变的子空间__________________________.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$ 的秩为__________________________.

8. 两个平面$\pi_1: x+2y+z=0$，$\pi_2: 2x+y+3z-2=0$交线的标准方程为________________

____________________________________.

9. 三维向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$在基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的坐标为______________________.

二、计算和证明题（共 64 分，请写在答题纸上）

10.（18 分）设四维线性空间V上的线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&0&-2&1\\1&1&2&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}.$$

（1）求σ在基α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的矩阵.

（2）设向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$(1,2,3,4)^T$，求$\sigma(\gamma)$在基$\alpha_1$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的坐标.

11.（16 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性空间$V$的基，线性变换$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&\lambda+2\\1&\lambda&-2\end{pmatrix}$。假设$\ker\sigma\neq\{\theta\}$（$\theta$表示零向量），且$\beta=\alpha_1+3\alpha_2\in\mathrm{Im}\sigma$.

（1）求λ的值.

（2）分别求$\ker\sigma$，$\mathrm{Im}\sigma$的基.

12.（16 分）已知实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&3\\2&3&1\end{pmatrix}$，求可逆线性替换将二次型$Q(x_1,x_2,x_3)$化成规范形.

13.（8 分）设V为欧几里得空间，V_1和V_2为V的子空间，满足$V=V_1\oplus V_2$，证明$V=V_1^{\perp}\oplus V_2^{\perp}$.

14.（6 分）设A,B都是n阶正定矩阵，证明AB的特征值都大于零.