线性代数（1）期末考题（A卷）答案

一、填空题（每空4分，共36分）

1. $\left(-3,2,1\right)$

2. A, B

3. $1, \sqrt{3}(2x-1)$

4. $n+1$

5. $b-a, b-a, 2a+b$

6. $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

7. 3

8. $\dfrac{x-4/3}{5}=\dfrac{y+2/3}{-1}=\dfrac{z}{-3}$

9. $(1,-1,2)^T$

二、计算和证明题（64分）

10. （18分）（1）从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$的

过渡矩阵是$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，　　　　……………4分

从而$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，所以$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$

下的矩阵是$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-1&1&-1&3\\5&10&8&8\\-2&-5&-2&-6\\-1&-3&-2&-3\end{pmatrix}$。　　……………5分

（2）γ在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的坐标为

$$C^{-1}(1,2,3,4)^T=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$ ……………4分

$\sigma(\gamma)$在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的坐标为为

$C^{-1}ACC^{-1}(1,2,3,4)^T=C^{-1}A(1,2,3,4)^T=(9,37,-25,-12)^T$. ……………5分

11. （16分）（1）由$\ker\sigma\neq\{\theta\}$得$|A|=0$，解得$\lambda=3$或$\lambda=-1$。

因为$\beta=\alpha_1+3\alpha_2\in\operatorname{Im}\sigma$，所以令$b=(1,3,0)^T$，则线性方程组$Ax=b$有解。

将$\lambda=-1$代入，方程组$Ax=b$无解；将$\lambda=3$代入，方程组有解。
故$\lambda=3$。 ……………6分

（2）解方程组$Ax=0$，得其基础解系为$(-7,3,1)^T$，因此$\ker\sigma$的基为

$-7\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$。 ……………5分

对A进行初等行变换可得$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$A$的前两列为其列向量组的极大线性无关组。所以，$\operatorname{Im}\sigma$的基为$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$。……………5分

12. （16分）采用初等变换法：

$$\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&3\\2&3&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\\1&-1&-3/\sqrt{2}\\0&1&1/\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}。$$ ……………10分

所以可逆线性替换为$x=\begin{pmatrix}1&-1&-3/\sqrt{2}\\0&1&1/\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}y$， ……………3分

规范形为$Q(\alpha)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$。 ……………3分

13.（8 分）$\forall\gamma\in V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$，由$V=V_1\oplus V_2$知存在唯一的$\gamma_1$，$\gamma_2$，使得$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$。

故$(\gamma,\gamma)=(\gamma,\gamma_1+\gamma_2)=(\gamma,\gamma_1)+(\gamma,\gamma_2)=0$，所以$\gamma=0$，

从而$V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}=\{0\}$。 ……………4分

又因为$V=V_1\oplus V_1^{\perp}$，$V=V_2\oplus V_2^{\perp}$，所以$\dim V=\dim V_1+\dim V_1^{\perp}=\dim V_2+\dim V_2^{\perp}$。

又因为$\dim V=\dim V_1+\dim V_2$，

故$\dim V_1^{\perp}+\dim V_2^{\perp}=2\dim V-\dim V_1-\dim V_2=\dim V$。 ……………4分

因此，$V=V_1^{\perp}\oplus V_2^{\perp}$。

14.（6 分）法一：因为A，B是正定矩阵，所以存在可逆矩阵P，Q，使得$A=P^TP$，

$B=Q^TQ$，则$QABQ^{-1}=QP^TPQ^T=\left(PQ^T\right)^T PQ^T$。

又因为PQ^T可逆，所以$QABQ^{-1}$正定，所有特征值为正数。

因为AB与$QABQ^{-1}$相似，所以AB的特征值都大于零。

法二：因为A是正定矩阵，所以存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$，所以

$f_{AB}(\lambda)=|\lambda I-AB|=|\lambda I-P^TPB|=|\lambda I-PBP^T|$，因为$PBP^T$正定，所以$AB$的特征值都大于零。