考试课程　线性代数（1）　　2016年1月6日　　（**A 卷**）

一、填空题（每题4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. 37;

2. $L(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$;

3. $A^n=\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 3^n-2^n & 3^n \end{bmatrix}$;

4. $a=0,\ b=0$, 或者$a\neq 0$, b为任意数（等价地，$b=0$, a 任意，或者b, a都不等于0)（对一半2分）;

5. n;

6. (2);

7. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$;

8. $L(\alpha_1,\alpha_3)$;

9. $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$

二、计算题和证明题（共64分）

10.（16分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一。

(1) 求a的值；

(2) 求一正交矩阵Q使得$Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

解：(1)由已知, $r(A,\beta)=r(A)<3$.

$$(A,\beta)=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array}\right]$$

故$a=-2$. **（6分，a不对，但有正确的方法3分。）**

(2) 由于$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$, 得$\lambda_1=0,\ \lambda_2=3,\ \lambda_2=-3.$ **（3分，一个特征值1分。）**

当$\lambda_1=0$时，求解$(0I-A)x=0$，得特征向量$\alpha_1=(-1,0,1)^T$，单位化得$\varepsilon_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$

当$\lambda_1=3$时，求解$(3I-A)x=0$，得特征向量$\alpha_2=(1,1,1)^T$，单位化得$\varepsilon_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$

当$\lambda_1=-3$时，求解$(-3I-A)x=0$，得特征向量$\alpha_3=(1,-2,1)^T$，单位化得$\varepsilon_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T.$

（一个特征向量2分，共6分，这里的特征向量可以不单位化。）

令$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$, 则$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(0,3,-3).$

(Q对1分)

[注：第一问a求得不对，不影响第二问的得分，请自己对照上面的给分办法给分。]

11. (14分) 设F为一数域，在F^3上定义线性变换$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\-x_1-2x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$, 分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$，$\ker(\sigma)$ 的基.

解：σ在自然基下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

由于$Ker(\sigma)=N(A)$, $N(A)$ 的基为$(-2,1,1)^T$;

（7分，若结论错，但有正确的过程给3分。）

又由于$Im(\sigma)=R(A)$, $R(A)$的基为$(1,-1,0)^T,(1,0,1)^T$ (不唯一）.

（7分，若结论错，但有正确的过程给3分。）

12. (14 分) 在数域F上的线性空间$M_2(F)$中分别取基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\varepsilon_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

和基

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},\eta_4=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

(1)求基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵；

(2)求$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标。

解：（1）过渡阵为$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

（6分，若结果错，但有正确的方法3分。）

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$在第一组基下的坐标为$x=(1,2,3,4)^T$. 故$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$在第二组基下的坐标为$y=P^{-1}x=(3,1,-2,1)^T$.

（8分，若结果错，但有正确的方法4分。）

13. (12分) 设A为m阶正定矩阵，B是$m\times n$的实矩阵。证明B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是$r(B)=n$.

证明：“充分性”

任意$0\neq x\in R^n$, 由于$r(B)=n$, $Bx\neq 0$, 故由A的正定性$x^TB^TABx=(Bx)^TA(Bx)>0$, 所以B^TAB正定。

（6分。）

“必要性”

由于A正定，故存在可逆矩阵C使得$A=C^TC$, 又由于$B^TAB=B^TC^TCB=(CB)^T(CB)$正定，故$n=r((CB)^T(CB))=r(CB)=r(B)$. 得证。

（6分。）

14. （8分）设$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$。证明$A$ 可以相似对角化。

证明：A的特征多项式为$|\lambda I-A|=\lambda^n-1$. **（4分。）**

由于λ^n-1无重根，所以A有n个不同的特征值，故A可以相似对角化。

（4分。）