样题1解题提示

2014.1

9. 设3阶实对称矩阵A有3个特征值3,3,-3，已知属于特征值-3的特征向量为$\alpha_1=(1,-2,1)^T$，求矩阵A及A^{-1}.

分析：设$W1=\{x|\ \alpha_1^T x=0\}$，$W2=L\{\alpha_2,\alpha_3\}$，其中，$\alpha_2,\alpha_3$为特征值3对应的线性无关特征向量。

$$R^3=L(\alpha_1)\oplus W1=L(\alpha_1)\oplus W2$$ 。

$\forall\alpha\in W1$, $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,

由$(\alpha_1,\alpha)=0$得到：$k_1=0$. 故有，$\alpha\in W2$。

解：$x_1-2x_2+x_3=0$,

得到$(2,1,0)^T$,$(-1,0,1)^T$为3的特征向量。

对3的特征向量做Schmidt正交化并单位化（可以不做），得到

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1\\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2\\ \sqrt{5} & 0 & 5\end{bmatrix}$$

则有

$$AP=Pdiag(-3,3,3)$$

$$A=Pdiag(-3,3,3)P^T$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

11．设n元$(n\geq 4)$齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+bx_4+\cdots+bx_n=0 \\ bx_1+ax_2=0 \\ bx_1+ax_3=0 \\ -bx_1+ax_4+\cdots+ax_n=0 \end{cases}$$

其中$b\neq 0$．试讨论a,b,n取何值时，方程组只有零解；取何值时，方程组有非零解？在有非零解时，写出方程组的基础解系．

解： Case1：当a=0时

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b & b & b & \cdots & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

一个基础解系为：

$$X_1=(0,-1,1,0,\cdots,0)^T, X_2=(0,-1,0,1,\cdots,0)^T, \cdots X_{n-2}=(0,-1,0,0,\cdots,1)^T$$

当a≠0时,

$$P=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & 0\cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & a\cdots & a \\ b & b & b & a & b\cdots & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & 0\cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & a\cdots & a \\ 0 & 0 & 0 & a-\dfrac{b^2}{a} & 0\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Case2：当a ≠ 0时，$a^2 \neq b^2$，n=4时，有唯一0解。

Case3：当a ≠ 0时，$a^2 \neq b^2$，n>4时，

$$X_1=(0,0,0,-1,1,\cdots,0)^T, X_2=(0,0,0,-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots X_{n-4}=(0,0,0,-1,\cdots,1)^T$$

Case4：当a ≠ 0时，$a^2 = b^2$时，

$$X_1=(1,-b/a,-b/a,b/a,0,\cdots,0)^T, X_2=(0,0,0,-1,1,0,\cdots,0)^T,\cdots X_{n-3}=(0,0,0,-1,\cdots,1)^T$$

12. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，β 是 m 维非零列向量，已知 β 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，试证明

（1）$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关；

（2）$Ax=b$ 的解集合的极大线性无关组含有 $r+1$ 个向量.

证明：（1）对 $k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+k_r(\beta+\alpha_r)=0$ （*）

$\Rightarrow\quad A[k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+k_r(\beta+\alpha_r)]=0$

$\Rightarrow\quad (k_0+k_1+k_2+\ldots+k_r)A\beta=(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_r)b=0$

由 $b\neq 0$，$\Rightarrow\ k_0+k_1+k_2+\ldots+k_r=0$ （**）

由（*）$\Rightarrow\ k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=0$

由基础解系的线性无关性 $\Rightarrow\ k_1=k_2=\ldots=k_r=0$

由（**）$\Rightarrow\ k_0=0$。

（2）容易验证：β，$\beta+\alpha_1$ ，$\beta+\alpha_2$，…，$\beta+\alpha_r$ 为$Ax=b$的解。

对$Ax=b$的任何一个解y，都有$y=\beta+ k_1\alpha_1 +k_2\alpha_2+\ldots+ k_r\alpha_r$

$\Rightarrow y=(1-k_1-k_2-\ldots-k_r)\beta+ k_1(\beta+\alpha_1) +k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+ k_r(\beta+\alpha_r)$

所以，$Ax=b$的解集合中极大线性无关组含$r+1$个向量。□

13．设 A 为任意 n 阶实反对称矩阵（即 $A^T=-A$），试证明 $I-A^2$ 是正定矩阵．

证明1：$(I-A^2)^T=I-A^2$为实对称矩阵。

$$x^T(I-A^2)x=x^Tx-x^TA^2x=x^Tx+(Ax)^TAx\geq x^Tx>0,\ x\neq 0.$$

结果成立。□

证明2：(I-A²)ᵀ=I-A²为实对称矩阵。

现证A的特征值不是1。设λ为A 的任何一个实特征值，x为对应的特征向量，则

$$x^TAx=\lambda x^Tx=(x^TAx)^T=-x^TAx=-\lambda x^Tx,\ x\neq 0.$$

于是$\lambda=0$。故$|I-A|\neq 0$。

再由$I-A^2=(I+A)(I-A)=(I-A)^T(I-A)$, 结果成立。□

样题2提示

13．设齐次线性方程组$(n \geq 2)$

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 = 0, \\ bx_1 + ax_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中$b \neq 0$．试讨论a,b取何值时，该方程组只有零解；a,b取何值时，有非零解，并在有非零解时，求方程组的通解．

解：

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

当a=0，n=2时有唯一0解。

当a=0，n>2时，　　　有无穷多解，通解

$$X=k_1(0,-1,1,0,\cdots,0)^T+k_2(0,-1,0,1,0,\cdots,0)^T+\cdots+k_{n-2}(0,-1,0,0,\cdots,1)^T$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a-(n-1)\dfrac{b^2}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

当a≠0,a^2≠(n-1)b^2时，方程组有唯一0解。

当a≠0,a^2=(n-1)b^2时，方程组有无穷多解。解为：

$$X=k(1,-\frac{b}{a},-\frac{b}{a},\cdots,-\frac{b}{a})^T,k\in R$$

14．设 A 是 n 阶方阵，已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，若 β 不是方程组 $Ax=0$ 的一个解，试证明向量组 $\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$ 线性无关.

证明：对 $k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+k_t(\beta+\alpha_t)=0$ （*）

$\Rightarrow$ $A[k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\ldots+k_t(\beta+\alpha_t)]=0$

$\Rightarrow$ $(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t)A\beta=0$

由 $A\beta\neq 0$，$\Rightarrow$ $k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t=0$ (**)

由（*）$\Rightarrow$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_t\alpha_t=0$

由α向量组线性无关性 $\Rightarrow$ $k_1=k_2=\ldots=k_t=0$

由（**）$\Rightarrow$ $k_0=0$。

故结论成立。

15. 设A是n阶可逆实矩阵，试证明

（1）$A^T A$是正定矩阵；

（2）A可分解为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积，即$A = QS$，其中Q是正交矩阵，S是正定矩阵.

证明：（1）A可逆且Ax ≠0，当x≠0。

另外 $x^TA^TAx=(Ax)^TAx>0$, 当x≠0。所以A^TA正定。

（2）由$A^T A$正定，则通过主轴化方法，存在正交阵P使得

$$
\begin{aligned}
A^T A &= P^T diag(d_1, d_2, \cdots, d_n) P \\
&= P^T diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}) P P^T diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}) P \\
&= B^2 \qquad (B = P^T diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}) P)
\end{aligned}
$$

$$B^{-1}A^{T}AB^{-1}=(AB^{-1})^{T}(AB^{-1})=I$$

令Q=AB^{-1}，则Q为正交阵。

故有A=QB，其中Q为正交阵，B为正定阵。证完

1、设A为实对称矩阵，记其最小、大特征值分别为$\lambda_{\min}$和$\lambda_{\max}$。证明：对任意$x \neq 0$, 有

$$\lambda_{\min} \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_{\max}$$

证明1：设Q为正交阵且满足

$$Q^T A Q = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

由于

$$Q^T(\lambda_{max} I - A)Q = \lambda_{max} I - diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

为半正定矩阵，所以

$$x^T(\lambda_{max} I - A)x \geq 0,$$ 对任意x成立。

故证明右端成立。左侧可同法证明。

法2　　设Q为正交阵且满足$Q^T AQ = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则令$x = Qy$, 有

$$\frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{y^T Ay}{y^T y} = \frac{\lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2}{y^T y}$$

$$\leq \lambda_{max}.$$

同理证明另一侧结论。

2、设A为正定矩阵，B为实对称矩阵，证明：A和B可以同时合同对角化。

证明：存在可逆矩阵C，满足$C^TAC = I$。由C^TBC为实对称阵，存在正交阵Q，使得

$$Q^T(C^TBC)Q = diag(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

为对角阵。令$\mathrm{P} = \mathrm{CQ}$，有

$$Q^T(C^TAC)Q = I,$$

为对角阵。

3、设A为正定矩阵，B为实对称矩阵，证明:
存在实数t，使得tA+B正定。

证法1：利用特征值的大小。由

$$x^T Ax \geq \lambda_{min}(A) x^T x,$$

$$x^T Bx \geq \lambda_{min}(B) x^T x.$$

得到

$$x^T(tA + B)x \geq [t\lambda_{min}(A) + \lambda_{min}(B)]\, x^T x。$$

由A为正定矩阵，得到$\lambda_{min}(A) > 0$, 于是当

$t > -\frac{\lambda_{min}(B)}{\lambda_{min}(A)}$时，对任意$x \neq 0$，得到

$x^T(tA + B)x > 0$。即得结论。

证法2：利用同时合同对角化。由存在可逆P使得

$$P^TAP = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$P^TBP = diag(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

由A正定，得到$a_i > 0, i = 1,2, \ldots, n.$取

$$t_0=\max\{-\frac{b_i}{a_i}|i = 1,2, \ldots, n\},$$

就有当$t > t_0$时， $tA + B$正定。

考试安排

- **答疑，地点一教103**
  - **元月15日上午9：00-11：30，下午2：30-5：00**
  - **元月16日上午9：00-11：30**
- **考试：元月16日下午2：30-4：30**
  - **结31-32及散选，一教104**
  - **结33-34， 一教101**
  - **水工31-33，一教201**