2015–2016秋季线性代数(I)期末试题

考试课程　　线性代数(I)　　A卷　　2016 年 01 月 06 日

姓名: ______________　学号: ______________　班级: ______________

1. (24分) 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$为一阶差分矩阵。

(1) 证明A^TA正定，并求正交矩阵Q将A^TA相似对角化。

(2) 记$Q = [q_1, q_2]$，证明Aq_1与Aq_2正交，且它们均为AA^T的特征向量。

(3) 证明$N(A^T)$的维数是1，并求单位向量p_3使得$S(p_3) = N(A^T)$。证明p_3与Aq_1, Aq_2均正交。

(4) 证明存在3阶正交阵P使得$A = P\Sigma Q^T$，其中$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$且$\sigma_1, \sigma_2 > 0$。(此分解称为$A$的奇异值分解)

(5) 将AA^T相似对角化。

解答：(7+5+4+4+4)

(1) 显见A^TA对称。任取$x \in \mathbb{R}^2$且$x \neq \vec{0}$，注意到$r(A) = 2$，所以$Ax \neq \vec{0}$. 从而

$$x^TA^TAx = \|Ax\|^2 > 0.$$

这说明A^TA正定。直接计算得

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

其特征多项式为$f(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$.从而其有两个特征值$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. 直接计算知$q_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$是3对应的特征向量；$q_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$是1对应的特征向量. 由于$A^TA$对称，所以$q_1 \perp q_2$. 令$Q = [q_1, q_2]$, 则易见$Q$是正交矩阵，且

$$A^TA = Q \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T.$$

(2) 首先我们有

$$\|Aq_1\|^2 = q_1^T A^T A q_1 = 3; \quad \|Aq_2\|^2 = q_2^T A^T A q_2 = 1.$$

从而$\|Aq_1\| = \sqrt{3}$, $\|Aq_2\| = 1$. 由于$q_1 \perp q_2$，我们有

$$(Aq_2) \cdot (Aq_1) = q_2^T A^T A q_1 = 3q_2^T q_1 = 0.$$

即两向量正交。最后

$$AA^T(Aq_1) = A(3q_1) = 3Aq_1; \quad AA^T(Aq_2) = Aq_2,$$

所以Aq_1与Aq_2均是AA^T的特征向量，对应的特征值分别为3和1.

(3) 因为$r(A^T) = 2$, 所以$\dim N(A^T) = 3 - 2 = 1$. 直接求解零空间得$N(A^T) = S(p_3)$, 其中$p_3 = (1,1,1)^T/\sqrt{3}$. 由于

$$p_3 \cdot (Aq_i) = p_3^T A q_i = (A^T p_3)^T q_i = 0,$$

从而$p_3 \perp Aq_i$, $i = 1, 2$.

(4) 令$p_1 = Aq_1/\sqrt{3}$, $p_2 = Aq_2$, 则p_1, p_2均为单位向量，且正交。令$P = [p_1, p_2, p_3]$, 则由(3)知，P是正交矩阵。于是

$$AQ = [Aq_1, Aq_2] = [\sqrt{3}p_1, p_2] = [p_1, p_2, p_3] \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P\Sigma.$$

由此可得$A = P\Sigma Q^{-1} = P\Sigma Q^T$.

(5) 由A的奇异值分解可得

$$AA^T = P\Sigma Q^T (P\Sigma Q^T)^T = P\Sigma\Sigma^T P^T = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^T.$$

2. (22分) 给定Markov矩阵$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$。

(1) 证明1是A的特征值。求A的稳定概率p，即求概率向量p使得$Ap = p$。 ($p = (p_1, p_2, p_3)$称为概率向量，如果$p_i \geq 0$ 且$p_1 + p_2 + p_3 = 1$)

(2) 求A的另外两个特征值λ_2, λ_3，并求对应的特征向量v, w。

(3) 设q是任一概率向量，证明存在$t, s \in \mathbb{R}$使得

$$q = p + tv + sw.$$

并由此断言，当$n \to \infty$时，$A^n q \to p$。

(4) 求$\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

解答：(6+6+6+4)

(1)直接计算知，$A^T b = b$, 其中$b = (1, 1, 1)^T$. 从而1是A^T的一个特征值。由于A与A^T有相同特征值，所以1也是A的特征值。求$N(A - I)$的一组基为$(1, 4, 1)^T$. 从而稳定概率为$p = (1/6, 2/3, 1/6)^T$.

(2)直接计算得A的特征多项式为

$$f(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1/2)(\lambda - 1/4).$$

从而A的另外两个特征值为$\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/4$. 分别计算其特征向量可得

$$v = (1, 0, -1)^T; \quad w = (1, -2, 1)^T.$$

(3) 直接验证知，$\{v, w\}$是$N(b^T)$的一组基。由于q, p均为概率向量，我们有$b^T(q - p) = b^T q - b^T p = 1 - 1 = 0$. 从而存在实数$t, s \in \mathbb{R}$使得

$$q - p = tv + sw.$$

由于p是稳定概率，且$Av = v/2, Aw = w/4$，我们有

$$A^n q = A^n p + tA^n v + sA^n w = p + \frac{tv}{2^n} + \frac{sw}{4^n} \to p.$$

(4) 注意到A的三个列向量均为概率向量，从而

$$A^{n+1} = A^n[a_1, a_2, a_3] = [A^n a_1, A^n a_2, A^n a_3] \to [p, p, p].$$

3. (22分) 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = [a_1, a_2, a_3]$.

(1) 对向量组$\{a_1, a_2, a_3\}$作Gram-Schmidt正交化，并求A的QR分解。

(2) 求朝A的列空间$C(A)$投影的投影矩阵P_1。

(3) 求朝A的左零空间$N(A^T)$投影的投影矩阵P_2。

(4) 求正交阵Q将P_1, P_2同时相似对角化。

(5) 求由a_1, a_2, a_3张成的平行六面体的体积。

解答：(6+4+4+4+4)

(1) 令$\alpha_1 = a_1$. 令

$$\alpha_2 = a_2 - \frac{\alpha_1^T a_2}{\alpha_1^T \alpha_1}\alpha_1 = a_2 - 2\alpha_1 = (1, -1, 1, -1)^T.$$

则$\alpha_2 \perp \alpha_1$. 令

$$\alpha_3 = a_3 - \frac{\alpha_1^T a_3}{\alpha_1^T \alpha_1}\alpha_1 - \frac{\alpha_2^T a_3}{\alpha_2^T \alpha_2}\alpha_2 = a_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T.$$

则$\alpha_3 \perp \alpha_1, \alpha_2$. 令$\beta_i = \alpha_i/2$, 则$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$是一个标准正交组，其即为$\{a_1, a_2, a_3\}$的Gram-Schmidt正交化。由$\beta_i$的定义直接可得

$$a_1 = 2\beta_1; \quad a_2 = 4\beta_1 + 2\beta_2; \quad a_3 = 2\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3.$$

由此可得A的QR分解为

$$A = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \widehat{Q}R.$$

(2) 注意到$C(A) = C(\widehat{Q})$. 从而投影矩阵

$$P_1 = \widehat{Q}\widehat{Q}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)直接求解$A^T y = \vec{0}$得$N(A^T)$的一组基为$\beta_4 := (1, -1, -1, 1)^T/2$. 从而投影矩阵

$$P_2 = \beta_4 \beta_4^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 令$Q=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]$, 由于$N(A^T)$ 与$C(A)$互为正交补，从而Q是正交矩阵。且我们有

$$P_1=Q\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}Q^T;\quad P_2=Q\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix}Q^T.$$

(5) 考虑由a_1,a_2,a_3,β_4张成的四维平行多面体的体积V。由于β_4是单位向量，且其与a_1,a_2,a_3所在子空间垂直，所以V等于由a_1,a_2,a_3张成的三维平行六面体的体积。另一方面由行列式的线性性，

$$V=\det(a_1,a_2,a_3,\beta_4)=\det(2\beta_1,4\beta_1+2\beta_2,2\beta_1+4\beta_2+2\beta_3,\beta_4)=8.$$

所以所求的体积为8.

4. (22分) 令M表示所有2阶实方阵的全体。定义

$$\alpha_1:=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\alpha_2:=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\alpha_3:=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\alpha_4:=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\beta_1:=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\beta_2:=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\beta_3:=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\beta_4:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

(1) 证明$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$和$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$均是$M$的基底。

(2) 考虑恒等映射$Id:M\to M$。取出发空间的基为$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$，到达空间的基为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，求$Id$在该基下对应的矩阵$P$。

(3) 取出发空间的基为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，到达空间的基为$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$，求$Id$在该基下对应的矩阵$Q$。

(4) 设$D=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M$. 定义线性变换$T:M\to M$ 如下：

$$T(X)=X\cdot D.$$

取出发空间与到达空间的基均为$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，求$T$在该基下对应的矩阵$A$。

(5) 取出发空间与到达空间的基均为$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$，求$T$在该基下对应的矩阵$B$。

解答：(6+4+4+4+4)

(1) 任取$X \in M$，直接观察得

$$X = x_{11}\alpha_1 + x_{12}\alpha_2 + x_{21}\alpha_3 + x_{22}\alpha_4.$$

从而$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = M$. 另一方面，如果上述的线性组合得到的$X$为零矩阵，则显然有$x_{ij} = 0$, 此即$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关。从而它们构成$M$的一组基。

易见

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\beta_3 - \beta_4}{2}; \quad \alpha_3 = \frac{\beta_3 + \beta_4}{2}; \quad \alpha_4 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}; \qquad (1)$$

从而$M \supset S(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \supset S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = M$，从而必有$\beta_1, \cdots, \beta_4$线性无关。所以其也是$M$的一组基。

(2) 直接计算可得

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_4; \quad \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_4; \quad \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3; \quad \beta_4 = -\alpha_2 + \alpha_3.$$

从而Id在该基下的矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 由(1)得

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 直接计算得

$$T(\alpha_1) = a\alpha_1 + b\alpha_2; \; T(\alpha_2) = c\alpha_1 + d\alpha_2; \; T(\alpha_3) = a\alpha_3 + b\alpha_4; \; T(\alpha_4) = c\alpha_3 + d\alpha_4.$$

从而T在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}.$$

(5)考虑复合映射$Id \circ T \circ \widehat{Id} : M \to M$. 并取基如下:

$\widehat{Id} : (M, \{\beta_i\}) \to (M, \{\alpha_i\})$; $T : (M, \{\alpha_i\}) \to (M, \{\alpha_i\})$; $Id : (M, \{\alpha_i\}) \to (M, \{\beta_i\})$.

从而

$$B = QAP = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{a-d}{2} & \frac{b+c}{2} & \frac{b-c}{2} \\ \frac{a-d}{2} & \frac{a+d}{2} & \frac{-b+c}{2} & \frac{-b-c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{b-c}{2} & \frac{a+d}{2} & \frac{a-d}{2} \\ \frac{-b+c}{2} & \frac{-b-c}{2} & \frac{a-d}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}.$$

5. (10分) 设A, B均为2阶实方阵。

(1) 证明：若$AB = BA$，则A, B至少有一个公共特征向量。

(2) 证明：若A, B均不可对角化，且A, B有一个公共特征向量，则$AB = BA$.

证明：(5+5)

(1) 设λ是A的一个特征值。

情形1，λ的几何重数为1. 此时$N(A-\lambda I)$的维数为1。设x是$N(A-\lambda I)$的一个基，则x是A的特征向量。考虑Bx. 要么$Bx = \vec{0}$, 从而x是B的关于特征值0的特征向量。要么$Bx \neq \vec{0}$, 则

$$ABx = BAx = \lambda Bx.$$

这说明Bx也是A的关于λ的特征向量。由几何重数为1知，$Bx = \mu x$。综上，在这种情形，x也是B的特征向量。

情形2，λ的几何重数是2. 这说明A的特征值λ对应两个线性无关的特征向量。由于A是二阶方阵，从而A可以相似对角化，即存在P可逆使得

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

但这说明$A = \lambda I$. 现任取B的特征向量y,其必也是A的特征向量。

(2) 若A不可对角化，则A必只有一个特征值λ，且其代数重数为2, 而$N(A-\lambda I)$ 维数是1。对B有类似的结论，即B 只有一个特征值μ，且其代数重数为2, 而$N(B-\mu I)$维数是1。由题设$N(A-\lambda I) = N(B-\mu I)$. 取$A$与$B$的一个公共特征向量$x$. 任取$y$与$x$线性无关，则$P = [x, y]$是可逆矩阵。设$Ay = tx + sy$, 则

$$AP = [Ax, Ay] = [x, y] \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & s \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

这说明A与$\begin{pmatrix}\lambda & t\\ 0 & s\end{pmatrix}$相似，从而它们应有相同的特征多项式，这说明$s=\lambda$. 所以我们有

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda & t\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}.$$

类似可以证明

$$B = P\begin{pmatrix}\mu & \hat{t}\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}.$$

现在直接计算知$AB=BA$.