线性代数小测验-II

考试课程　线性代数　A卷　2014 年 12 月 09 日

姓名____________　学号____________

1. (10分) 设$r(AB)=r(B)$，求证：对任意可乘的矩阵C，均有$r(ABC)=r(BC)$.

   证明. 先可证明命题：$r(AB)=r(B)$，当且仅当方程组$ABx=0$的解均为$Bx=0$的解.

   于是，设y是$ABCy=0$的解，则$x=Cy$是$ABx=0$的解，进而由条件和命题知x是$Bx=0$的解，即y是$BCy=0$的解. 最后再由命题知，$r(ABC)=r(BC)$. □

2. (10分) 求与$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$乘法可交换的所有矩阵$B$，以及所有$B$形成空间的维数.

   解. 实际上等价于求与$A'=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$可交换的$B=(b_{ij})$.

   则$A'B=BA'$给出
$$\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\0&0&0&0\\b_{41}&b_{42}&b_{43}&b_{44}\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{11}&0&b_{13}\\0&b_{21}&0&b_{23}\\0&b_{31}&0&b_{33}\\0&b_{41}&0&b_{43}\end{pmatrix}.$$
   于是
$$B=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&0&c\\r&s&t&p\\0&r&0&t\end{pmatrix}.$$
   所形成空间是8维的.

   □

3. (15分) 设A是$m\times 3$矩阵，秩$r(A)=1$.若非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足
$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求$Ax=b$的通解.

解. 因为A是$m\times 3$矩阵，$r(A)=1$,故$Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.可以求得

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\3/2\\3/2\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}0\\1/2\\3/2\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-1/2\end{pmatrix}.$$

则$\xi_1=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ 为$Ax=0$的基础解系中的解向量。故$Ax=b$的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta_1$,其中$k_1,k_2$为任意实数。

□

4. (10分) 证明: $N(A^TA)=N(A)$; $C(A^TA)=C(A^T)$.

证明. 显然有$N(A)\subset N(A^TA)$, 又因为$A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow Ax=0$, 所以$N(A^TA)=N(A)$. 则$C(A^TA)=N(A^TA)^\perp=N(A)^\perp=C(A^T)$.

□

5. (15分) 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&1&2&1&-3\\0&2&1&2&6\\5&3&4&3&-1\end{pmatrix}$.

(1) 分别给出四个基本子空间的一组基.

(2) 求方程组$Ax=\begin{pmatrix}7\\-2\\23\\12\end{pmatrix}$的通解.

解.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\-3&1&1&0\\-2&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&1&2&1&-3\\0&2&1&2&6\\5&3&4&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-1&-2&-6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$C(A^T)$的一组基：$(1,1,1,1,1)$, $(0,2,1,1,6)$.

$C(A)$的一组基：$(1,3,0,5)$, $(1,1,2,3)$.

$N(A)$的一组基：$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0,0),(0,-1,0,1,0),(2,-3,0,0,1)$.

$N(A^T)$的一组基：$(-3,1,1,0),(-2,-1,0,1)$.

(2) 通解为$x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\\frac{23}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3为任意常数.

□

6. (15分) 假设$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解, 解集记为S.

(1) 证明：S中的解向量在A的行空间$C(A^T)$上的投影均相等(记作$\mathbf{x}_{row}$);

(2) 证明：$\mathbf{x}_{row}$是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的长度最小的解;

(3) 假设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}10\\-23\end{pmatrix}$, 求$\mathbf{x}_{row}$.

(1) **证明:** 因为$S\subseteq\mathbf{R}^n=N(A)+C(A^T)$,所以对任意$x_1,x_2\in S$，有$x_1=x_{1r}+x_{1n}$, $x_2=x_{2r}+x_{2n}$, 其中$x_{1r},x_{2r}\in C(A^T)$, $x_{1n},x_{2n}\in N(A)$. 由$x_1,x_2\in S$知$x_{1r},x_{2r}\in S\cap C(A^T)$. 又$A(x_{1r}-x_{2r})=0$,故$x_{1r}-x_{2r}\in C(A^T)\cap N(A)=\{0\}$,即$x_{1r}=x_{2r}$,也即任意解向量在$A$的行空间的投影相等。

(2) **证明：** 任意$x\in S$, $x=x_{\text{row}}+x_n$, 其中$x_{\text{row}}\in C(A^T)$, $x_n\in N(A)$.而

$$||x||^2=||x_{\text{row}}||^2+||x_n||^2\geq||x_{\text{row}}||^2,$$

即x_{row}是$Ax=b$的长度最小的解。

(3) **解：** 设$x_{\text{row}}=A^T\alpha$,则由$Ax_{\text{row}}=b$得$AA^T\alpha=b$, 即$\begin{pmatrix}14&1\\1&6\end{pmatrix}\alpha=\begin{pmatrix}10\\-23\end{pmatrix}$, 解得$\alpha=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.因此$x_{\text{row}}=A^T\alpha=\begin{pmatrix}-7\\-2\\7\end{pmatrix}$.

7. (10分) 设S为$\mathbb{R}^3$中由向量$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}$张成的子空间.

(a) 用Gram-Schmidt正交化求S的一组单位正交基.

(b) 求到子空间S的正交投影3×3矩阵P.

解. (1) $\frac{1}{3}(1,2,2),\frac{1}{3}(2,1,-2)$.

(2) $P=QQ^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}$.

□

8. (15分) 求最小二乘意义下拟合数据点$(t, y) = (2, 1), (5, 2), (7, 3), (8, 3)$的最佳直线$y = Ct + D$.

解：求解方程$A^T A\hat{x} = A^T b$, 得最小二乘曲线为$y = \frac{5}{14}t + \frac{2}{7}$.