2014-2015秋季线性代数期末试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2015 年 1 月 18 日

姓名: ____________　学号: ____________　班级: ____________

注：填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (30分) 填空题(每空3分)：

(1) 设$A=(a_{ij})$是一个3阶正交矩阵，则A的行列式值可能是$\underline{\pm 1}$.

(2) 关于一元函数$y=y(t)$, 二阶微分方程$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$的通解(complete solution)是$\underline{C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}, C_1, C_2\text{任意常数}}$.

(3) 设$A=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$是一个2阶矩阵, 通过可对角化阵的理论，可以知道当$k\to\infty$, A^k的极限是$\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(4) 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$e^{At}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(5) 设$A=(a_{ij})$是一个4阶实方阵，$rank(A)=3$. 令C_{ij}是a_{ij}的代数余子式, $x=(C_{11}\quad C_{12}\quad C_{13}\quad C_{14})^T$, 则$Ax=\underline{0}$.

(6) 设A是n阶实对称矩阵，P是A的零空间上投影矩阵，则$PA=\underline{0}$.

(7) 设$Q=(q_1\quad q_2)$, 其中q_1和q_2是相互正交的单位列向量. 增加一个列向量a，得到矩阵$A=(Q\quad a)$，则A的QR分解是$\underline{A=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1^Ta \\ 0 & 1 & q_2^Ta \\ 0 & 0 & ||e|| \end{pmatrix}}$, $\underline{\text{其中}, e=a-(q_1^Ta)q_1-(q_2^Ta)q_2}$.

(8) 设A是一个3阶实矩阵，秩$(A)=2$. 令$V=\{M=(m_{ij})_{3\times 3}\mid AM=0\}$, 它是一个向量空间，维数是$\underline{3}$.

(9) 设A是一个3阶非零实方阵，$A^2=0$，则A的秩是$\underline{1}$.

(10) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$. 方程组$Ax=b$在$C(A^T)$($A$的行空间)中的解是$\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$.

2. (9分) 设$A = I_n - cE_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，其中$E_n$的每个元素均为1，$c \in \mathbb{R}$. 分别求$c$的值，使得$A$是正交矩阵、投影矩阵或可对角化矩阵.

解： 记$E_n = ee^T$,其中$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. (1) 设$A$是正交矩阵，则$A^TA = I_n$,注意到$A^T = I_n - cE_n = A$,故有$(I_n - cee^T)^2 = I_n$,即$cE_n^2 = 2cE_n$,故$c = 0$或$\frac{2}{n}$.

(2) 若A为投影矩阵,则$A^T = A$, $A^2 = A$. 因此$(I_n - cee^T)cee^T = 0$,故$c = 0$或$\frac{1}{n}$.

(3) 若A是可对角化矩阵，由于实对称矩阵可对角化，故c为任意实数。

3. (12分) 给定矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 验证A可对角化.

证明： 容易看出$A^2 = 4I$,故A有特征值$\lambda = \pm 2$.可求得属于特征值$\lambda = 2$的线性无关特征向量$x_1 = (1,0,0,1)$, $x_2 = (2,1,1,0)$,属于特征值$\lambda = -2$的线性无关特征向量$x_3 = (-1,2,0,1)$, $x_4 = (0,-1,1,0)$.由此得到4个线性无关的特征向量，故矩阵A可对角化。

(2) 求解微分方程

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解: 如上初值问题的解为$u(t) = e^{AT}u(0)$,注意到给定$u(0) = x_4$为属于特征值$\lambda = -2$的特征向量，故所求解为$u(t) = e^{-2t}u(0)$.

或者，由初值问题的解为$u(t) = c_1e^{2t}x_1 + c_2e^{2t}x_2 + c_3e^{-2t}x_3 + c_4e^{-2t}x_4$, $u(0) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$,这里给定的初值$u(0) = x_4$,故$c_1 = c_2 + c_3 = 0$, $c_4 = 1$, $u(t) = e^{-2t}x_4 = e^{-2t}u(0)$.

(3) 设$v \neq 0 \in N(A+2I)$, 对于以上的微分方程，初值条件改为$u(0)=v$，证明方程的解是$e^{-2t}v$.

证明: 如(2)显然可见。或者：由初值问题的解为$u(t)=c_1e^{2t}x_1+c_2e^{2t}x_2+c_3e^{-2t}x_3+c_4e^{-2t}x_4$, 给定初值$u(0)=v\in N(A+2I)$,则$u(0)=v$为矩阵$A$的属于特征值$-2$的特征向量，故存在常数$c_3,c_4$使得$v=c_3x_3+c_4x_4$,于是有$u(t)=c_3e^{-2t}x_3+c_4e^{-2t}x_4=e^{-2t}(c_3x_3+c_4x_4)=e^{-2t}v$.

4. (12分)假设A是两个秩为1的矩阵之和，即$A=uv^T+wz^T$, 其中$u=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, z=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 求$A$的列空间和行空间的一组基.

解:u,w为A的列空间的一组基，v,z是A的行空间的一组基。

由或者写出$A=\begin{pmatrix}3&2\\4&2\\5&1\end{pmatrix}$.$(3,4,5),(2,2,1)$是列空间的一组基，$(3,2),(4,2)$是行空间的一组基。

5. (14分) 给定一个数列$\{a_n\}$, 满足$a_0=1, a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$.

(1) 求矩阵A使得$\begin{pmatrix}a_{k+2}\\a_{k+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{k+1}\\a_k\end{pmatrix}$, 给出$a_n$的通项公式.

答案：$a_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^n$.

(2) 当$k\to\infty$, 求a_k的极限.

答案: $\frac{2}{3}$.

6. (12分) 求最小二乘意义下的最佳抛物线$y=C+Dt+Et^2$拟合点$(t,y)=(0,6),(1,0),(2,0)$.

答案：$y=6-9t+3t^2$.

注：此题为精确解。

7. (6分) 设A是一个$m\times n$阶矩阵,

(1) 证明：假设$A^TA\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解集$S$, 则对于任意$\alpha,\beta\in S$, $A\alpha=A\beta$.

(2) 证明：假设$A^Ty=b$有解，则$A^Ty=b$在$C(A)$中有唯一解.

证明：(1) 对于任意$\alpha,\beta\in S$, $\alpha-\beta\in N(A^TA)$,而$N(A^TA)=N(A)$,故$\alpha-\beta\in N(A)$, $A\alpha=A\beta$.

(2) 存在性：因$A^Ty=b$有解y，$y\in\mathbb{R}^m=C(A)\oplus N(A^T)$,故可设$y=y_1+y_2$, 其中$y_1\in C(A)$, $y_2\in N(A^T)$.于是$b=A^Ty=Ay_1$, 即方程在$C(A)$中有解y_1.

唯一性：设$A^Ty=A^Tw=b$, $y,w\in C(A)$.则有$y-w\in C(A)\cap N(A^T)$，而$C(A)\cap N(A^T)=\{0\}$,故$y=w$.唯一性得证。

8. (5分) 设n阶实对称矩阵A满足$A^2=A$, 且A的秩为r, 求$\det(2I_n-A)$.

解: 因$A^2=A$,故A有特征值0或1. 已知$r(A)=r$,故特征值0的几何重数为$\dim N(A)=n-r$。因A为实对称矩阵，特征值的几何重数等于代数重数，故特征值0的代数重数为$n-r$,特征值1的代数重数则为r。于是矩阵$2I_n-A$有特征值1(r重)，2 ($n-r$重)，故$\det(2I_n-A)=2^{n-r}$.