线性代数期末试题解答（A卷）

1. (15分) 问答题

（1）方阵可以相似对角化的充要条件是什么？

（2）设方阵A满足$A^2 = A$，A可以对角化吗？为什么？

（3）向量$v = (1, 1, 1)^T$与向量$w = (1, 2, 3)^T$张成的平行四边形的面积为多少？给出理由。

（4）设A为$2n + 1$阶实反对称阵，即$A^T = -A$。A的特征值有何特点？A的行列式等于多少？

（5）设A是三阶方阵，且其特征根为$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, 求$A$所有可能的Jordan标准型。

【解答】：

（1）n阶方阵A可以相似对角化当且仅当其可以找到n个线性无关的特征向量。

（2）可以。只需说明A可以找到n个线性无关的特征向量。设$r(A) = r$。

当$0 < r < n$时。$A^2 = A$说明$Aa_i = a_i$,即A的每个非零列向量均是1对应的特征向量。从而可以找到r个1的线性无关的特征向量。

另一方面, $dimN(A) = n - r$. 这说明0是A的一个特征值，且可以找到$n - r$个0的线性无关的特征向量。

由于对应不同特征值的特征向量线性无关，所以可以找到n个线性无关的特征向量。

当$r = 0$时，A为零矩阵；当$r = n$时，$A = I_n$（思考：为什么？）从而都可以对角化。

（3）直接计算知$v \times w = (1, -2, 1)^T$. 由叉积的几何意义知，$v \times w$的长度$\sqrt{6}$ 即为v与w张成的平行四边形的面积。

（4）A的特征值为0或纯虚数。事实上，设λ是一个特征值，x是对应λ的一个特征向量，则

$$Ax = \lambda x; \quad -\bar{x}^T A = \bar{x}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

从而

$$-\lambda\bar{x}^T x = (\bar{x}^T A)x = \bar{x}^T Ax = \bar{x}^T(Ax) = \lambda\bar{x}^T x.$$

由此可得$\lambda + \bar{\lambda} = 0$，即$\lambda$为0或者纯虚数。

对等式$A^T = -A$两边同时取行列式得$|A| = |A^T| = (-1)^{2n+1}|A|$. 所以$A$的行列式为0。

（5）按A的线性无关的特征向量个数来考虑，所有可能的Jordan标准型有如下3个

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

2. (20分) 设$V \subset \mathbb{R}^4$是一个三维子空间，且$V = s(v_1, v_2, v_3)$，其中

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

设W是V的正交补。

（1）求V的一组标准正交基。

（2）求朝子空间V投影的投影矩阵P.

（3）求朝子空间W投影的投影矩阵Q.

（4）找到$\mathbb{R}^4$的一组标准正交基，使得其中每个向量均为P的特征向量。利用此基将P相似对角化。

【解答】

（1）对$\{v_1, v_2, v_3\}$做Gram-Schmidt正交化可以得到

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{s_1, s_2, s_3\}$是V的一个标准正交基。

（2）令$S = [s_1, s_2, s_3]$, 则S的列空间$C(S)$即为V, 从而由投影矩阵的定义知

$$P = S(S^TS)^{-1}S^T = SS^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

（解法二：令$A=[v_1,v_2,v_3]$, 则$C(A)=V$, 直接计算$P=A(A^TA)^{-1}A^T$，可得相同结果。）

（3）首先求W。由定义知$W=N(A^T)$。求解零空间得$W=s(w)$，其中$w=(1,-1,0,0)^T$。所以

$$Q=\frac{ww^T}{w^Tw}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & & \\ -1/2 & 1/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

（4）注意到$\{s_1,s_2,s_3,w\}$组成$\mathbb{R}^4$的一个标准正交基。直接计算知

$$Ps_i=SS^Ts_i=S(S^Ts_i)=s_i(1\le i\le 3);\quad Pw=SS^Tw=\vec{0},$$

令$\tilde{S}=[s_1,s_2,s_3,w]$，则$\tilde{S}$是一个正交阵，且

$$\tilde{S}^{-1}P\tilde{S}=\tilde{S}^TP\tilde{S}=\mathrm{diag}(1,1,1,0).$$

($\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$表示$n$阶对角阵，其对角线上的元素正好为$d_1,\cdots,d_n$)

3. (20分) 给定Markov矩阵$A=\begin{pmatrix}2/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 2/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 2/4\end{pmatrix}$.

(1) 求A的所有特征值.

(2) 求A的稳定概率p，即求概率向量p使得$Ap=p$.

(3) 将A相似对角化.

(4) 求$\lim_{k\to\infty}A^k$.

【解答】

（1）计算$4A$的特征多项式得

$$\det(4A-\lambda I)=(4-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

所以$4A$有两个不同特征值$4,1$. 所以A有两个不同特征值: $\lambda_1=1$，其代数重数为1；$\lambda_2=1/4$，其代数重数为2。

（2）即求A关于特征值1的特征向量。计算$N(A-I)$的一组基得$v_1 = (1,1,1)^T$。因为p是一个概率向量，所以$p = v_1/3 = (1/3,1/3,1/3)^T$.

（3）首先由A对称知，其一定可以相似对角化。已经求得λ_1对应的特征向量为v_1。下面计算λ_2的线性无关的特征向量，即求$N(A-I/4)$的一组基。直接计算得

$$v_2 = (-1,1,0)^T; \quad v_3 = (-1,0,1)^T$$

是$N(A-I/4)$的一组基。现令$S = [v_1, v_2, v_3]$, 则S可逆，且

$$S^{-1}AS = \mathrm{diam}(1, 1/4, 1/4).$$

（4）易见$\{p, v_2, v_3\}$也是$\mathbb{R}^3$的一组基。任给概率向量$\tilde{p}$, 设

$$\tilde{p} = xp + yv_2 + zv_3.$$

因为$\tilde{p}$是概率向量，所以其三个分量的和为1，由此可得$x = 1$. 从而

$$A^n\tilde{p} = p + y4^{-n}v_2 + z4^{-n}v_3 \to p.$$

注意到A的三个列向量均为概率向量，所以

$$A^n = A^{n-1}[a_1, a_2, a_3] = [A^{n-1}a_1, A^{n-1}a_2, A^{n-1}a_3] \to [p,p,p] \ (n \to \infty).$$

4. (15分) 设$\{e_1, e_2\}$是$\mathbb{R}^2$的自然基. 令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \beta_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 证明$\{\alpha_1, \alpha_2\}$是$\mathbb{R}^2$的一组基。考虑恒等映射$Id:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$。取出发空间的基为$\{\alpha_1, \alpha_2\}$，到达空间的基为$\{e_1, e_2\}$，求$Id$在该基下对应的矩阵$P$。

(2)取出发空间的基为$\{e_1, e_2\}$，到达空间的基为$\{\alpha_1, \alpha_2\}$，求Id在该基下对应的矩阵Q。

(3)设$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$是一个线性变换，使得

$$T(\alpha_1) = \beta_1; \quad T(\alpha_2) = \beta_2.$$

取出发空间与到达空间的基均为自然基$\{e_1, e_2\}$。求T在该基下对应的矩阵A。

【解答】

（1）因为矩阵$[\alpha_1, \alpha_2]$的行列式为-2, 所以α_1, α_2线性无关。从而其是$\mathbb{R}^2$的一组基。因为

$$Id(\alpha_1) = (e_1, e_2)\alpha_1; \quad Id(\alpha_2) = (e_1, e_2)\alpha_2,$$

由线性变换在基下矩阵的定义知

$$P = [\alpha_1, \alpha_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

（2）因为

$$Id(e_1) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \quad Id(e_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

由线性变换在基下矩阵的定义知

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(解法二：我们已经证明，当交换出发与到达空间的基时，对应的矩阵互为逆矩阵，从而直接可得$Q = P^{-1}$)

（3）直接计算知

$$T(\alpha_1) = \alpha_1 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad T(\alpha_2) = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

由此可知，当出发与到达空间的基均取为$\{\alpha_1, \alpha_2\}$时，T对应的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

我们已经证明A与B之间有如下相似关系

$$A = PBQ = PBP^{-1}.$$

经计算可得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. (10分) 定义数列a_n如下：

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1; \quad a_{n+1} = 6a_n - 11a_{n-1} + 6a_{n-2}, \ (n \geq 2).$$

求a_n的通项公式。

【解答】

令$v_n = (a_{n+1}, a_n, a_{n-1})^T$，则上述递推关系及初值条件可以表达为

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = Av_{n-1}; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而有$v_{n+1} = A^n v_1$. 我们需要求v_{n+1}的第三分量。

直接计算知A的特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

分别求得$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$对应的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而$v_1 = \alpha_1$是特征值1对应的特征向量。从而

$$v_{n+1} = A^n v_1 = A^n \alpha_1 = \alpha_1.$$

由此说明$a_n \equiv 1$是一个常数列。

6. (10分) 考虑二次曲线$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$.

（1）给出曲线为双曲线的一个充要条件。

（2）考虑二次曲线$x^2 + 2xy - y^2 = 1$. 找到一个坐标系（一组标准正交基），使得在该坐标系下双曲线的方程形如

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1.$$

求A与B.

【解答】

（1）首先可以将曲线方程写成如下形式：

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

当对称矩阵C不定时，二次曲线为双曲线。C不定当且仅当C有一个正特征根λ_1和一个负特征根λ_2。由于C是二阶矩阵，上述条件又当且仅当$\det C < 0$。所以曲线为双曲线的一个充要条件为

$$\det C = ac - b^2 < 0.$$

（2）令

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

因为$\det C = -2 < 0$, 由（1）知曲线确实为双曲线。现在我们来找合适的坐标系，使得在该坐标系下，方程有标准形式。直接计算得C的特征多项式为$\lambda^2 - 2$。从而其有特征值$\lambda_1 = \sqrt{2}$ 和$\lambda_2 = -\sqrt{2}$。分别求得对应的特征向量为

$$v_1 = (1, \sqrt{2} - 1)^T; \quad v_2 = (1, -\sqrt{2} - 1)^T.$$

由于C对称，所以v_1与v_2垂直。将它们单位化得

$$q_1 = v_1/\|v_1\|; \quad q_2 = v_2/\|v_2\|.$$

令$Q = [q_1, q_2]$，则Q是一个正交矩阵。且

$$C = Q\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}Q^T.$$

令$(X,Y) = (x,y)Q$, 则原曲线方程变为

$$1 = (X,Y)\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2.$$

从而$A = B = 1/\sqrt[4]{2}$.

7. (10分) 设n阶方阵A可逆。证明：存在正定矩阵B与正交矩阵Q使得

$$A = BQ.$$

【证明】

考虑矩阵A^TA。因为A可逆，所以A^TA正定。从而存在正交阵P使得$P^TA^TAP = \Lambda$, 这里$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$为对角阵，且$\lambda_i > 0$。记$P = [p_1, \cdots, p_n]$, 记$v_i = Ap_i$. 我们可以改写$P^TA^TAP = \Lambda$ 为

$$[v_1, \cdots, v_n]^T[v_1, \cdots, v_n] = (AP)^TAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

上式表明

$$v_i^Tv_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i & i = j. \end{cases}$$

即$\{v_1, \cdots, v_n\}$相互正交，且$\|v_i\| = \sqrt{\lambda_i}$. 令$s_i = v_i/\sqrt{\lambda_i}$以及$S = [s_1, \cdots, s_n]$, 则$S$是一个正交阵，且

$$AP = [v_1, \cdots, v_n] = [s_1, \cdots, s_n]\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) = S\tilde{\Lambda}.$$

从而

$$A = S\tilde{\Lambda}P^T = (S\tilde{\Lambda}S^T)(SP^T) = BQ.$$

注意到$B = S\tilde{\Lambda}S^T$是正定矩阵，$Q = SP^T$是正交矩阵，从而命题得证。