线性代数·壹

目錄

期中複習資料
幾代期中複習 2
幾代機考題 14
幾代機考模擬題 25
期末複習資料
汽02幾代習題課題目 39
3套幾代樣題 42
2001.1幾何與代數(1)期末真題 48
2002.12幾何與代數(1)期末真題 51
2003.12幾何與代數(1)期末真題 53
2005.1幾何與代數(1)期末真題 55
2007.1代數與幾何真題. 57
2008.1代數與幾何真題. 60
2008.1幾何與代數（1）真題. 62
2009.1幾何與代數（1）真題. .64
2010.1幾何與代數（1）真題.. 66
2012.1线性代数（1）真題. . 68
幾何與代數(1)考試樣題一. 70
幾何與代數(1)考試樣題二. 72

汽車工程系學習部

榮譽出品

/

线代期中复习

Ⅰ、行列式

1. 多项式 $p(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -x & 1 \\ 1 & 4 & x & 3x \end{vmatrix}$ 中，x^4 . x^3 的系数和常数项分别为[redacted]。

-2

A. -6, 2, -6　B. -6, -2, 6　C. -6, 2, 6　D. -6, -2, -6.

2. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} =$ [redacted]。

A. abcd　B. 0　C. 1　D. -1

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$ [redacted]。

2^3　3^3

A. 12　B. -16　C. 16　D. -12

答案 1-5.
D B A C B

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ [redacted]。

A. 0　B. 1　C. -3　D. -1.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} =$ [redacted]。$(n>2)$

A. 1　B. 0　C. -1　D. -2

6. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

A. -306 B. 306 C. $\cancel{316}$ D. $-\cancel{316}$.

7. A, B 3阶. $|A|=-1$ $|B|=2$. 则 $\begin{vmatrix} 2A & A \\ 0 & -B \end{vmatrix} =$

A. -4 B. 4 C. 16 D. -16

8. A m阶, B n阶 $|A|=a$ [redacted] $|B|=b$. $C=\begin{pmatrix} 2A & A \\ -B & 0 \end{pmatrix}$. 则 $C=$ B___.

A. $-ab$. B. $(-1)^{(m+1)n}ab$ C. $(-1)^{(m+n)n}ab$ D. $(-1)^{(m+n)m}ab$.

9. 记 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 求 $f(x)=0$ 的根个数

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ _

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ D. $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$

答案 6-10.

A C B B D

再来几道典型题目：

①定义

1. 确定 k, l 使 $24k6l1$ 是奇排列. $k=3$ $l=5$

2. 证明：$1,2,\cdots,n$ 的所有排列中奇偶排列个数相等.

~~③性质~~ 3. 把 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 每个位置的元素 a_{ij} 换成 $b^{i-j}a_{ij}$, $b\neq 0$,

求 $\dfrac{|b^{i-j}a_{ij}|}{|a_{ij}|}$.

②性质

1. $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 4$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 1$. 则 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2d_1 & 3c_1 \\ a_2+b_2 & 2d_2 & 3c_2 \\ a_3+b_3 & 2d_3 & 3c_3 \end{vmatrix} = ?$ -30

2. $\begin{vmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{vmatrix} = ?$

3. 解方程：($a_1,\cdots,a_{n-1}$ 彼此不等)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$$

a_{n-1}

③ 范德蒙德 (Vandermonde)

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x \\ 1 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix} = ?$$

2

④ Laplace

$$D_n(x,y)=\begin{vmatrix} a_n & x & \cdots & \cdots & x \\ y & a_{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ y & \cdots & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}_n = ?$$

⑤ 加边

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

用 $|A_j|$ ($j=1,2,\cdots,n$) 表示 $|A|$ 中第 j 列元素，换为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$ 后得到的新行列式.

证：$\sum_{j=1}^{n}|A_j|=|A|$

⑥ Cramer

解方程

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

II 矩阵.

1. $\alpha=(1,2,3)$, $\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, $A=\alpha^T\beta$. 则 $A^n=$ ____.

A. 3^nA　B. $3^{n+1}A$　C. $3^{n-1}A$　D. $\frac{3}{2}A$

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $n\geq 2, n\in Z$ 则 $A^n-2A^{n-1}=$ _ .

A. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}2&&1\\&3&\\1&&2\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&&1\\&2&\\1&&1\end{pmatrix}$

3. $A\in M_n$. $\frac{1}{2}(A+A^T)$是对称阵. 则

A. $\frac{1}{2}(A-A^T)$是对称阵 ×　B. $\frac{1}{2}(A^T-A^{-1})$是对称阵

C. $\frac{1}{2}(A-A^T)$是反对称阵　D. $\frac{1}{2}(A^T-A^{-1})$是反对称阵.

4. $A\in M_n$　$A^2-2A-2I=0$. 则 $(A+I)^{-1}=$ _ .

A. $3I-A$　B. $3I+A$　C. $A-3I$　D. $\frac{2A+I}{A-I}$.

5. A为n阶非奇异.则$(A^*)^*=$ _ .

A. $|A|^{n-1}A$　B. $|A|^{n+1}A$　C. $|A|^{n-2}A$　D. $|A|^{n+2}A$.

6. A n阶可逆 _ , _ .

A. $|A^*|=|A|^{n-1}$　B. $|A^*|=|A|$ ✓　C. $|A^*|=|A|^n$　D. $|A^*|=|A^{-1}|$

7. $A,B\in M_n$. $AB=0$. 则.

A. $A=0$ or $B=0$ ×　B. $A+B\neq 0$

C. $|A|=0$ or $|B|=0$　D. $|A|+|B|=0$.

答案 1-7.

C B C A C A C

3.

8. $A, B \in M_n$ $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 则 $C^* =$ D。

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & \\ & |B|B^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |B|B^* & \\ & |A|A^* \end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix} |A|B^* & \\ & |B|A^* \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{pmatrix}$

9. 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 可交换的全部方阵 ＿。

A. $\begin{pmatrix} 2c-d & 2c \\ c & d \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 2c+d & 2c \\ c & d \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2c+d & c \\ c & d \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 2c+d & 2c \\ -c & d \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & \cdots & a_{44} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_{14} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{44} & \cdots & a_{41} \end{pmatrix}$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

A 可逆，则 $B^{-1} =$ ＿。 ~~AP_1P_2~~

A. $A^{-1}P_1P_2$ B. $P_1A^{-1}P_2$ C. $P_1P_2A^{-1}$ D. $P_2A^{-1}P_1$

11. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 C。

A. $AP_1P_2 = B$ B. $AP_2P_1 = B$. C. $P_1P_2A = B$ D. $P_2P_1A = B$.

答案：

D B C C

12. $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_n$ $A=I+J+J^2+\cdots+J^n$. 则 $A^{-1}=$

A. $I+J$　B. $I-J$　C. $I-2J$　D. $2I-J$.

13. $A,B,C\in M_n$　$ABC=I$. 则

A. $ACB=I$　B. $CBA=I$　C. $BAC=I$　D. $BCA=I$.

14. A, B, $A+B$, $A^{-1}+B^{-1}$ n阶可逆. 则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$ ＿.

A. $A^{-1}+B^{-1}$　B. $A+B$　C. $A(A+B)^{-1}B$　D. $(A+B)^{-1}$

15. A. B 同阶可逆. ＿.

A. $AB=BA$.　B. $\exists P$ s.t $P^{-1}AP=B$

C. $\exists C$ s.t $C^TAC=B$　D. $\exists P,Q$ s.t $PAQ=B$.

16. A m阶可逆. D n阶可逆. B为 $m\times n$阶 C为 $n\times m$阶

$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 则 $M^{-1}=$ ＿. (M可逆)

A. $\begin{pmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} I & -B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$

答案 12-16

B D C D D

4.

计算&证明:

① 运算

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = ?$

2. 举一个例子,说明矩阵乘法无交换律.

② A^T

证明: $(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(aA)^T = aA^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

③ $tr(A)$

证: $tr(aA+bB) = a\,trA + b\,trB$.

$tr(AB) = tr(BA)$

④ A^{-1}

证: $AA^* = A^*A$

$(aA)^* = a^{n-1}A^*$

$(A^T)^* = (A^*)^T$

$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

$(AB)^* = B^*A^*$

$ab-cd=1$, $\begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}^{-1} = ?$

$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$ $\begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑤ 方程

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ $AX-B=A+X$ 求 X.

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $AX+I=A^2+X$，求 X.

⑥ 初等.

$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}a_1&c_1&b_1\\a&c&b\\a_2+a&c_2+c&b_2+b\end{pmatrix}$ 求 P Q s.t $PAQ=B$

$\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}^{18}\begin{pmatrix}1&&1\\&1&\\&&1\end{pmatrix}^{19}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}^{20}=\ ?$

Ⅲ. 向量. ⇐ 这个几乎不考，略看一下书好了.

Ⅳ R^n.

1. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 则 $\alpha_3=$ ＿ 时. $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ 线性无关.

A. $(2,1,2)^T$ B. $(1,0,1)^T$ C. $(0,1,0)^T$ D. $(0,0,1)^T$

2. 设 $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ 线性无关，则下列线性无关的是＿＿。

A. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ B. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

C. $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$ D. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

3. 已知 $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ 线性无关，则 ＿.

A. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关.

B. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

C. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

D. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

答案 1-3.
D C C.

5

4. $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是

A. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$　B. $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$　C. $\alpha_1\alpha_2\alpha_5$　D. $\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5$

5. 若向量组 α,β,γ 线性无关；α,β,δ 线性相关，则___.

A. α 必可由 β,γ,δ 线性表示，　B. β 必不可由 α,γ,δ 线性表示.

C. δ 必可由 α,β,γ 线性表示　D. δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

6. 设 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_{m-1},\alpha_m$ 线性表示，不能由(I) $\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}$ 线性表出，记(II) $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1},\beta$. 则

A. α_m 不能由(I)线性表出，也不能由(II)线线表出.

B. ∴不能 - - - -，但可 - - - - - -.

C. ∴可由 - - - - -，也可 - - - - - - -.

D. ∴可 - - -，但不可 - - - -.

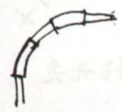
7. 设 n 维列向量 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ $(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件____.

A. $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_m$ 线性表出，

B. $\beta_1\cdots\beta_m$ 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ - - - -

C. $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 与 $\beta_1\cdots\beta_m$ 等价.

D. $A=(\alpha_1\cdots\alpha_m)$ 与 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 等价.



8. 设 $M=\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}$，则.

A. $r(M)\geq r(A)+r(B)$　B. $r(M)<r(A)+r(B)$

C. $r(M)\leq r(A)+r(B)$　D. $r(M)=r(A)+r(B)$.

答案 4-8

B C B D A

9. $M=\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$，且A是可逆的，则.

A. $r(M)\geq r(A)+r(B)$　B. $r(M)=r(A)+r(B)$

C. $r(M)\leq r(A)+r(B)$　D. $r(M)<r(A)+r(B)$

10. $A\in M_n$. 则＿

A. $r(A)<r(A^TA)$　B. $r(A)>r(A^TA)$　C. $r(A)=r(A^TA)$　D. 都不对.

11. $A_{m\times n}$. $r(A)=m<n$，I_m为m阶单位阵. ~~则~~

A. A的任意m个列向量必线性无关.

B. A任意一个m阶子式不等于零

C. 若矩阵B满足$BA=0$，则$B=0$　$r(B)$　$0\leq r(BA)$　$r(B)=0$　列变换+行变换!

D. A通过初等行变换，必可化为$(I_m,0)$的形式.

12. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 4 & t\\ 0 & t & 3 & 0\end{pmatrix}$ 秩为2. 则 $t=$＿

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0.

答案. 9-14
B C C D D D

13. $A\in M_{m\times n}$，则 $Ax=b$ 有解 $\Rightarrow$

A. A的秩＜A的列数.

B. A的秩＜A的行数.

C. A的列向量组线性无关(即A是列满秩).

D. A的行向量组线性无关(行满秩).

14. $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ 有无穷多解. 则 $a=$＿.

A. 1　B. -1　C. 2　D. -2.

6.

15. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 是四元非齐次 $Ax=b$ 的 3个解. $r(A)=3$, ~~$\alpha_1=(1,2,$~~
$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$, $\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$, C表示任意常数, 则
$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
$Ax=b$ 的通解 ___.

A. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, B. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

16. 当 A= ___ 时, $\alpha_1=(1,0,2)^T$, $\alpha_2=(0,1,-1)^T$ 都是 $Ax=0$ 的解.

A. $(-2,1,1)$ B $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$

17. 设 $Ax=b$ 有m个方程, n个未知量 $(m\neq n)$. 则

A. 若 $Ax=0$ 仅有零解. 则 $Ax=b$ 有惟一解
B. ...... 有非零解 ..... 无穷多解
C. 若 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $Ax=0$ 仅有零解
D. .... 有非零解

8. 设 $A_1 A_2 \in M_n$, $B_1 \in R^n$. $\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\0\end{pmatrix}$ 有解 $\Leftrightarrow$

A. $A_1x_1=B_1$ 有解 B. $A_2x_2=0$ 有解
C. $|A_2|\neq 0$ D. $|A_1|\neq 0$.

答案 15-18
A A D A

$\begin{cases}A_1X_1=B_1\\A_2X_2=0\end{cases}$

2

$-2X_1=0$
$X_2=0$
$X_3=$

D 1 √

答案: A B C D

若直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{t}$ 与 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交，则必有（ ）. $(v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2})=0$

(A) $t=1$

(B) $t=\frac{3}{2}$

(C) $t=-\frac{5}{4}$

(D) $t=\frac{5}{4}$

答案: A B C D

B 2 √

平面 $2x-2y+3=0$，指出下面错误的结论是（ ）

(A) 此方程的法向量为 $\vec{n}=i-j$ ✓

(B) 此平面垂直于 z 轴

(C) 此平面平行于 z 轴 ✓

(D) 此平面与 XOY 平面的交线是 $\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z}{0}$ bug. √

答案: A B C D

C 3 √

设 A 是任一 n 阶实方阵，则必有（ ）

(A) $r(A^2)=r(A)$ $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

(B) $r(A^n)=r(A^{n-1})$

(C) $r(AA^T)=r(A)$ $=r(A^TA)$ 证明 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解 √

(D) 以上均不正确

答案: A B C D

D 4 √

经过点 $P(2,\ -3,\ 1)$ 和平面 π：$3x+y-5z+6=0$ 垂直的直线方程为（ ）

$\vec{v}=(3,1,-5)$

(A) $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{5}$

(B) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{-5}$

(C) $\begin{cases}x=3t-2\\y=t+3\\z=-5t-1\end{cases}$

(D) $\begin{cases}x=3t+2\\y=t-3\\z=-5t+1\end{cases}$

B 5

?

答案： A B C D

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是一组 n 维向量，其中 $\alpha_1 \neq 0$，至少有一个 $\alpha_i\ (2 \le i \le s)$ 使得 α_i 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出这一条件是这组向量线性相关的（ ）条件

(A) 充分但不必要

(B) 充分必要

(C) 必要但不充分

(D) 既不充分也不必要

对 $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ $(i<s)$，$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关. 但没有 $\alpha_i\ (2 \le i \le s)$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 表出

X.

α_s 可表出, 系数全取0即可.

B 6

答案： A B C D

向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 2)^T$，$\alpha_2 = (1, 2, 0, 3)^T$，$\alpha_3 = (2, 3, 1, 5)^T$，$\alpha_4 = (3, 4, 5, 4)^T$ 的秩等于（ ）

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 7

答案： A B C D

使齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

r 最小

的基础解系中解向量个数最多的 λ 等于（ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$n-r$

C 8

答案： A B C D

已知两条直线的方程是 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 和 $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，它们的夹角为 （ ）。

$(1,-2,1)$ $(1,1,-2)$ $\frac{x-0}{1}=\frac{y+6}{1}=\frac{z-15}{-2}$

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

答案： A B C D

B 9

已知 $\alpha=(1\ \ -2\ \ 3)$，$\beta=(-4\ \ 3\ \ k)$ 互相垂直，则 $k=$（ ）

$-4-6+3k=0$

(A) 2

(B) $\frac{10}{3}$

(C) $-\frac{10}{3}$

(D) -2

答案： A B C D

A 10 ? 理解

给定两个 n 阶矩阵 A 和 B，$r(A)=r(A,\ \ B)$ 是矩阵方程 $AX=B$（其中 X 是 n 阶未定方阵）有解的（ ）

(A) 充分必要条件 (B) 必要但不充分条件

(C) 充分但不必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

答案： A B C D

→ 11 ?

已知 $\alpha=(1\ \ 2\ \ t)$，$\beta=(-2\ \ 2\ \ 1)$，且 $(\alpha)_\beta=-2$，则 $t=$（ ）

(A) 8

(B) 6

(C) -8

(D) -2

3

C 12

答案：A B C D

设 β_1, β_2 是线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1, α_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，k_1, k_2 是任意常数，则 $Ax=b$ 的通解是（ ）

(A) $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)$

(B) $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$

(C) $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

(D) $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$

C 13

答案：A B C D

已知平面 π：$X-Y+2Z-4=0$，

$1\ -1\ 2$

直线 L：$x-1=1-y=\dfrac{z+3}{2}$，则（ ）

$1\ -1\ 2$

(A) 直线 L 与平面 π 相交但不垂直

(B) 直线 L 与平面 π 平行

(C) 直线 L 与平面 π 垂直

(D) 直线 L 与平面 π 重合

C 14

答案：A B C D

四元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

$r=3$. $n-r=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_4=0$

的基础解系为（ ）

(A) $(2,\ 1,\ 1,\ -1)^T$

(B) $(1,\ -1,\ 0,\ 0)^T$

(C) $(0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$

(D) $(0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$ 和 $(0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$

C 15 答案 A B C D

下列向量组中线性无关的是（ ）

(A) $(4,\ 2,\ 1)^T,\ (5,\ 1,\ -1)^T,\ (3,\ 0,\ 1)^T,\ (-1,\ 2,\ 4)^T$ $\mathbb{R}^3$ 個数>3，必相关.

(B) $(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T,\ (4,\ 2,\ -1,\ 0)^T,\ (0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ $r=2$ 含0.

(C) $(a,\ 1,\ b,\ 0,\ 0)^T,\ (c,\ 0,\ d,\ -2,\ 1)^T,\ (e,\ 4,\ f,\ 5,\ -1)^T$ r $(1\,0\,0)^T$, $(0\,{-2}\,1)^T$, $(4\,5\,{-1})^T$ 无关.

(D) $(a,\ 1,\ 2,\ 3)^T,\ (b,\ 1,\ 2,\ 3)^T,\ (c,\ 4,\ 2,\ 3)^T,\ (d,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ $r=3$

D 16 答案 A B C D

已知 $A\in M_{3,4}$，则下列结论正确的是（ ）

$r\le 3$

(A) $\underset{3\times4\ 4\times3}{AA^T}$一定可逆 3×3.　　(B) AA^T一定不可逆　　$r(AA^T)=r(A)$.

(C) A^TA一定可逆　　(D) A^TA一定不可逆 4×4　　$|A^TA|=0$.

B 17 答案 A B C D

下列各陈述中，（ ）是对的

(A) 若两组向量的秩相等，则两组向量可互相线性表出 $r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1$.

(B) 若一组向量可由另一组向量线性表出，且两向量组的秩相等，则两向量组等价

$r(\alpha_1\cdots\alpha_n,\ \beta_1\cdots\beta_n)=n$.

(C) 若向量组（1）可由向量组（2）线性表出，则向量组（1）的秩一定小于向量组（2）的秩 $\le$

(D) 以上都不对

B 18 答案 A B C D

设 $A=(a_{ij})$ 是3阶不可逆矩阵，已知 A 的行列式中 a_{22} 的代数余子式 $A_{22}\neq 0$，则（ ）是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

$|A|=0$　　$r(A)=2$

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{vmatrix}$$

(A) $(A_{12},\ A_{22},\ A_{32})^T$

(B) $(A_{21},\ A_{22},\ A_{23})^T$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

(C) $(A_{11},\ A_{21},\ A_{31})^T,\ (A_{12},\ A_{22},\ A_{32})^T$

(D) $(A_{11},\ A_{12},\ A_{13})^T,\ (A_{21},\ A_{22},\ A_{23})^T$

5

$\boxed{AA^*=|A|I=0}$

∴ A^* 的列向量为 $AX=0$ 解

∵ $A_{22}\neq0$ ∴ $\begin{pmatrix}A_{21}\\A_{22}\end{pmatrix}$ 非0解 为一基础解系

B 19

答案： A B C D

设 A, B 是 n 阶矩阵，满足 $AB = A - B$，则 (1) $(A+I)x = 0$ 只有零解；

(2) $(A+I)^{-1} = B - I$；(3) $AB = BA$ 中正确的是

$B - A^{-1}$

$I - B$

$\begin{cases}(I+A)(I-B)=I\\(I-B)(I+A)=I.\end{cases}$ 配凑！

(A) (1) (2)；　(B) (1) (3)；

(C) (2) (3)；　(D) (1) (2) (3).

答案： A B C D

C 20

设 $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，与矩阵 A 乘法可交换的全体 3 阶矩阵记作 $C(A)$，则 $C(A)$ 关于矩阵的

加法和数乘构成线性空间，$C(A)$ 的维数是

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

$CA = AC$

$a \quad b \quad c \quad a+c \quad b \quad c$

$x \quad y \quad z \quad = x+z \quad y$

$p+a \quad q+b \quad r+c \quad p+r \quad q$

$c = z = 0$

$b = c = 0$

$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\d & e & 0\\x & y & a\end{pmatrix}$

$a \quad 0 \quad 0$

0

a

答案：DBCDB　BACBA　CCCCC　DBBBC

答案： A B C D

若由 $AB=AC$ 必能推出 $B=C$，其中 A,B,C 为同阶方阵，则 A 应满足条件（ ）。

(A) $A=0$

(B) $A=0$

(C) $|A|=0$

(D) $|A|\neq 0$

答案： A B C D

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}=$$

范德蒙德

(A) 48 (B) -48 (C) 24 (D) -24

答案： A B C D

设 $A、B、C\in M_n$ 且 $ABC=I$，则 $B^{-1}=$

$B=A^{-1}\cdot C^{-1}$

$B^{-1}=(A^{-1}C^{-1})^{-1}=CA$

(A) $C^{-1}A^{-1}$ (B) $A^{-1}C^{-1}$ (C) CA (D) AC

答案： A B C D

设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的展开式中 x^3 的系数为

(A) 2 (B) -2 (C) -1 (D) 1

A B C D

$A\in M_n$，$A^2=I$，则

(A) $|A|=1$ (B) $A^*=A|A|$

(C) $A^*X=0$ 有非零解 (D) $A-I$，$A+I$ 不同时可逆

答案：A B C D

线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1-4x_2+bx_3=-1 \\ -x_1+2x_2+bx_3=0 \end{cases}$ 有唯一解，则

$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & b & -1 \\ -1 & 2 & b & 0 \end{array}\right)$

(A) $b\neq 0$ 且 $a\neq -\frac{1}{2}$　(B) $b\neq 0$　(C) $a\neq -\frac{1}{2}$　(D) $b=0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$

$b\neq 0$, $a\neq -\frac{1}{2}$

答案：A B C D

已知 n 阶矩阵 A、B 满足 $AA^T=I$，$BB^T=I$，则

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ 总成立　(B) $|A+B|=|A|+|B|$ 总不成立

$A=I$
$B=-I$

(C) 仅当 $|A||B|<0$ 时，$|A+B|=|A|+|B|$ 成立　$A=I_3$，$B=-I_3$

(D) 仅当 $|A||B|>0$ 时，$|A+B|=|A|+|B|$ 成立

答案：A B C D

设 $A\in M_n$，已知 $A^2+2A-2I=0$，$(A+I)^{-1}=$

(A) $3I-A$　(B) $A+I$　(C) $\frac{1}{3}(A+I)$　(D) $\frac{I-2A}{A-I}$

答案：A B C D

设 n、$n-1$、…、1 是 n 阶排列，则以下命题正确的是（　）。

(A) 无论 n 取什么值，n、$n-1$、…、1 是一个偶排列

(B) 无论 n 取什么值，n、$n-1$、…、1 是一个奇排列

(C) 当 n 是 4 的倍数时，n、$n-1$、…、1 是一个偶排列

(D) 当 n 是 4 的倍数时，n、$n-1$、…、1 是一个奇排列

答案： A B C D

设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

以下命题不正确的是（ ）。

$D=0 \to$ 无解 $\to$ 无穷多解

(A) 若方程组有解，则系数行列式 $D \neq 0$

(B) 若方程组无解，则系数行列式 $D = 0$

(C) 若方程组有解，则或者有唯一解，或者有无穷多解 √

(D) $D \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件 √

答案： A B C D

已知 $A \in M_4$，$|A| = 4$，且 $A^2 + A + 2I = 0$，则 $|A + I| =$

$A(A+I) = -2I$

(A) -4 (B) 4 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

答案： A B C D

已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a$，则 $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & b_1 + 2c_1 & c_1 + 2a_1 \\ a_2 + 2b_2 & b_2 + 2c_2 & c_2 + 2a_2 \\ a_3 + 2b_3 & b_3 + 2c_3 & c_3 + 2a_3 \end{vmatrix} =$

(A) $3a$ (B) $5a$ (C) $8a$ (D) $9a$

答案： A B C D

设 $\alpha = (1,\ 2,\ 3)$，$\beta = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$，又 $A = \alpha^T \beta$，则 $A^n =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(A) 1 (B) 3^n (C) I (D) $3^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$

答案： A B C D

设 A 是 n 阶方阵，则方阵（ ）是对称矩阵。

(A) $A-A^T$

(B) CAC^T，C 是任意 n 阶方阵

(C) AA^T

(D) $(AA^T)B$，B 是 n 阶对称矩阵

答案： A B C D

设 $f(x)=\begin{vmatrix} a & b & c & d-x \\ a & b & c-x & d \\ a & b-x & c & d \\ a-x & b & c & d \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的 4 个根分别为

(A) 0，0，$a+b$，$c+d$ (B) 0，0，0，$a+b+c+d$

(C) 0，0，$a-b$，$c-d$ (D) 0，0，0，$-a-b-c-d$

答案： A B C D

设 D 是 6 阶行列式，则（ ）为 D 中带有正号的项。

(A) $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$ $\tau=15$

(B) $a_{11}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{62}$ $\tau=7$

(C) $a_{13}a_{25}a_{32}a_{46}a_{54}a_{61}$ $\tau=9$

(D) $a_{12}a_{26}a_{35}a_{44}a_{51}a_{63}$ $\tau=10$

答案：A B C D

设 $A=I-\alpha\alpha^T$，其中 α 是 $n-1$ 的矩阵，且 $\alpha^T\alpha=1$，则以下命题成立的是（ ）。

(A) $A=I$ (B) $A=0$ (C) A 为可逆矩阵 (D) A 是不可逆矩阵

$|A|=|I-\alpha\alpha^T|$
$=|I-\alpha^T\alpha|=0$

答案：A B C D

$A\in M_3$ 且 $|A|=\frac{1}{3}$，则 $|(3A)^{-1}-(3A)^*|=$（ ）。

(A) $-\frac{512}{9}$ (B) $-\frac{8}{9}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{64}{9}$

~~$-\frac{8}{9}$~~

$|(3A)^{-1}-(3A)^*|$
$=|\frac{1}{3}A^{-1}-(3A)^{-1}|3A||$
$=|\frac{1}{3}A^{-1}-\frac{1}{3}A^{-1}3^3\times\frac{1}{3}|$
$=|-\frac{8}{3}A^{-1}|=-\frac{512}{27}\times|A^{-1}|=-\frac{512}{9}$

答案：A B C D

设 A,B 为 n 阶可逆矩阵，且 $(AB)^2=I$，则以下选项中错误的是

(A) $B^{-1}=A$

(B) $B^{-1}A^{-1}=AB$ ✓

(C) $(BA)^2=I$ ✓

(D) $A^{-1}=BAB$

答案：A B C D

设 A 为 2 阶矩阵，则以下选项中错误的是

(A) 若对任意 2 阶矩阵 B，$AB=0$ 成立，则必有 $A=0$ ✓ 令 $B=I$，$AB=0\Rightarrow A=0$

(B) 若对任意 2 维列向量 X，$AX=0$ 成立，则必有 $A=0$ → 1) $X=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 2) $X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ → $a_{i1}=0$，$a_{i2}=0$

(C) 若对任意 2 阶矩阵 B，$B^TAB=0$ 成立，则必有 $A=0$ $B=I$，$B^TAB=0\Rightarrow A=0$

$|A|=0$.

(D) 若对任意 2 维列向量 X，$X^TAX=0$ 成立，则必有 $A=0$

1) $X=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$X^T=(1,0)$

$\underset{1\times2}{X^T}\cdot\underset{2\times2}{A}\cdot\underset{2\times1}{X}=(1,0)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(a,b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=a=0$

2) $X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$X^T\cdot A\cdot X=(0,1)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(c,d)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=d=0$

排列 $a_s\ a_{s-1}\ \cdots\ a_1$ 与排列 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_s$ 的逆序数的和为

A $\frac{s(s+1)}{2}$; C 0;

B s; D $\frac{s(s-1)}{2}$;

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

应该选择 D

解 因为 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_s$ 中任一对数 a_i, a_j 如果在排列 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_s$ 中构成顺序，则在排列 $a_s\ a_{s-1}\ \cdots\ a_1$ 中构成逆序，如果在排列 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_s$ 中构成逆序，则在排列 $a_s\ a_{s-1}\ \cdots\ a_1$ 中构成顺序，所以 排列 $a_1\ a_2\ \cdots\ a_s$ 与排列 $a_s\ a_{s-1}\ \cdots\ a_1$ 逆序数的和为 $C_s^2=\frac{s(s-1)}{2}$.

下一题 返回目录

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$$

2 3 4

A 9 C 3

B 4 D 6

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 排列2431必定经过偶数次对换变为排列1234 4

2. 排列217986354必定经过奇数次对换变为排列123456789. 18

A 1，2; B 2; C 1; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 与排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 的奇偶性相反.

2. 如果 $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6$ 是奇排列，那么 $i_1 i_6 i_2 i_4 i_5 i_3$ 是偶排列.

A 1; B 无; C 1，2; D 2.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$ 是五级行列式中的一项且带有“－”号.

2. 排列217986354必定经过奇数次对换变为排列123456789. 18

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 四级 行列式中的项 $a_{3j_3}a_{2j_2}a_{1j_1}a_{4j_4}$ 与 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 带的符号是互为相反的.

2. $\begin{vmatrix}ka_1 & kb_1 & kc_1\\ ka_2 & kb_2 & kc_2\\ ka_3 & kb_3 & kc_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

A 无; B 2; C 1，2; D 1.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=$$

A $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ C $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3\\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3\end{vmatrix}$

B $3\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ D 0

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & a+b & a+b+c\\ a & 2a+b & 3a+2b+c\end{vmatrix}=$$

A abc C a^3

B $3(a+b+c)$ D 0

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 在一个n阶行列式中等于零的元素个数比 n^2-n 还多，则此行列式必等于零．

2. $\begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$

A 1;　B 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 如果，$x \neq 0$ 则行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

2. $\begin{vmatrix} a+a_1 & b+b_1 & c+c_1 \\ d+d_1 & e+e_1 & f+f_1 \\ g+g_1 & h+h_1 & k+k_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & k_1 \end{vmatrix}$

A 1;　B 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 如果行列式 $d=0$ 那么它一定有两行元素对应成比例.

2. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

A 1;　B 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

A 16　C −4

B 0　D -15

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

A 0　C −2

B 6　D −8

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} =$$

A 0　C -294×10^5

B 1284　D 654000

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

A $-(a-b)^3$　C $(a-b)^2$

B $(a-b)^3$　D $(a-b)$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

应该选择 B

解

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

下一题　返回目录

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

A n;　C $n!$;

B $2!(n-1)!$;　D $3!(n-3)!$;

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

n阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

A $x^n + y^n$ C $x^n + (-1)^{n-1} y^n$

B $x^n - y^n$ D $x^n + (-1)^n y^n$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

应该选择 D

解

$$\begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3)$$

下一题 返回目录

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} =$$

A $a^n + (-1)^{n+1} b^n$ C $a^n - b^n$

B $a - b$ D $a^n + b^n$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

应该选择 C

解

在行列式 $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$ 的展开式中，

有两项不为零，即 x^n, y^n.

前一项是主对角线的元素的乘积，其列标的排列为$12\ldots n$,是偶排列，故该项的符为正.而后一项的列足标的排列为$23\ldots n1$,的逆序数为n-1,故 y^n 的系数为 $(-1)^{n-1}$.

下一题 返回目录

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} =$$

A $(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ C $a_1 a_2 \cdots a_n$

B $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$ D $-a_1 a_2 \cdots a_n$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

4 -1 -2 -3 0

A n^n C $n!$

B 0 D n

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

$$\begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix} =$$

A $x+y$ C $-4(x^3+y^3)$

B $-2(x+y)$ D $-2(x^3+y^3)$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

例题20

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

A $\prod_{i,j=1}^{5}\prod_{k,l,m=1}^{2} a_i b_j c_k d_l e_m$ C $\sum_{i,j=1}^{5} a_i b_j$

B 0 D $a_1 b_2$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

例题21

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

A 0 C -60

B 23 D 120

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} =$$

A $(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$　　C $a_1 a_2 \cdots a_n$

B $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$　　D $-a_1 a_2 \cdots a_n$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

A 60　　C 120

B 0　　D 36

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

A -24　　C 36

B 0　　D 24

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$ 中 x^3 的系数为

A 3　　C -1

B 1　　D -2

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

A 0　　C $(n-2)^n$

B $(n-2)!$　　D $(-2)(n-2)!$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

应该选择 D

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!$$

下一题　返回目录

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} =$$

A $\begin{cases} a_1+b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2, \\ 0, & n\ge 3. \end{cases}$　　C $\prod_{k=1}^{n} a_k + b_k$

B $(a_1-a_2)(b_2-b_1)$.　　D $\begin{cases} a_1+b_1, & n=1,2, \\ 0, & n\ge 3. \end{cases}$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

应该选择 A

解

当　$n=1$时，　$D_1 = a_1 + b_1$

当　$n=2$时，　$D_2 = (a_1-a_2)(b_2-b_1)$

当　$n\ge 3$ 时，把第1行的-1倍分别加到第i行，i=2、3、…、n，行列式不变，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = 0$$

下一题　返回目录

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} =$$

A 0　　C $(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j})$

B $b_1 b_2 \cdots b_n (1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j})$　　D $= b_1 b_2 \cdots b_n$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

选择 [illegible]

解

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=b_1b_2\cdots b_n\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}\right)$$

下一题 返回目录

证明过程略思

$$\begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

原式并非是标准的范德蒙行列式

A $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!(n-1)!\cdots 2!$　　C $\prod_{k=1}^{n}(a+k)$

B 0　　D $a+n$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

应该选择 A

解

$$\text{原式}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ a^2 & (a+1)^2 & \cdots & (a+n)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}(a+i-a-j)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\le j<i\le n}(i-j)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!(n-1)!\cdots 2!$$

下一题 返回目录

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n} =$$

A (a^2-b^2)　　C $-(a^2-b^2)$

B $-(a^2-b^2)^n$　　D $(a^2-b^2)^n$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

应该选择 B

解

$$\text{原式}=D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$$

返回目录

$$(x,\ y,\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

A 不能相乘　　C $\begin{pmatrix} a_{11}x^2 & a_{12}xy & b_1x \\ a_{12}xy & a_{22}y^2 & b_2y \\ b_1x & b_2y & c \end{pmatrix}$

B $(a_{11}+a_{12}+b_1)x+(a_{12}+a_{22}+b_2)y+b_1+b_2+c$　　D $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

应该选择 D

解

$$(x,\ y,\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x+a_{12}y+b_1,\ a_{12}x+a_{22}y+b_2,\ b_1x+b_2y+c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$$

下一题 返回目录

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n =$$

A $\cos n\varphi+\sin n\varphi$　　C $\cos n\varphi-\sin n\varphi$

B $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$　　D $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

应该选择 D

解　用数学归纳法，可证

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

事实上，假设

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n-1}=\begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}$$

则

$$=\begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

下一题 返回目录

若n为偶数，则

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n=$$

A 2^nA　　C 2^nE

B A^2　　D 0

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

应该选择

解

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

即

$$A^2=2^2E$$

于是

$$A^n=A^{2k}=(A^2)^k=(2^2E)^k=2^{2k}E=2^nE$$

下一题　返回目录

---

1. 若 $AC=BC$ 则 $A=B$；

2. 若 $A^2=E$，则 $A=E$ 或 $A=-E$；

A 1;　B 2;　C 1, 2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，则 $AB=BA$；

2. 若 $A^2=A$，则 $A=E$；

A 1;　B 2;　C 1, 2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 若 $A^2=0$，则 $A=0$；

2. $(A+E)=A^2+2A+E$

A 1;　B 2;　C 1, 2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 设 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，则必有 $BCA=E$

2. 设 A,B 是两个 n 阶矩阵，则 $(A+B)(A-B)=A^2-B$

A 1;　B 2;　C 1, 2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

设n阶矩阵A,B,C满足 $ABC=E$ 则必有

A $ACB=E$　　C $BAC=E$

B $CBA=E$　　D $BCA=E$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 设均A,B为阶方阵，则必有 $|A+B|=|A|+|B|$

2. 设n阶方阵A经过初等变换后所得方阵记为B，则若 $|A|=0$ 则 $|B|=0$

A 1;　B 2;　C 1, 2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

若 $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}+X-\begin{pmatrix}2&3&0\\-1&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-3&-1&2\end{pmatrix}$

则 X=

A $\begin{pmatrix}1&4&1\\0&2&3\\0&-2&2\end{pmatrix}$　　C $\begin{pmatrix}3&3&2\\0&3&2\\0&1&2\end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix}6&2&2\\0&4&0\\0&4&2\end{pmatrix}$　　D $\begin{pmatrix}1&4&2\\0&4&3\\0&-2&2\end{pmatrix}$

请选择正确答案

选择 D

$$X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-3&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&0\\-1&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&4&3\\0&-2&2\end{pmatrix}$$

下一页 返回目录

若A,B均为n阶方阵，则下列结论正确的是（ ）

A $AB\neq0\Leftrightarrow A\neq0$且$B\neq0$

B $|A|=0\Leftrightarrow A=0$

C $|AB|=0\Leftrightarrow|A|=0$或$|B|=0$

D $A=E\Leftrightarrow|A|=1$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一页 下一页

判别下列命题是否正确

1. 设A,B是n阶方阵，且$E+AB$可逆，则$E+BA$也可逆，且$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$

2. 设$A=\begin{pmatrix}0&B_1\\B_2&0\end{pmatrix}$且$B_1,B_2$均可逆，则$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&B_2^{-1}\\B_1^{-1}&0\end{pmatrix}$

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一页 下一页

---

2. 若为反对称矩阵，则A^k

A 不是反对称矩阵就是对称矩阵，二者必居其一

B 必为反对称矩阵

C 必为对称矩阵

D 既不是反对称矩阵，又不是对称矩阵

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一页 下一页

判别下列命题是否正确

1. 对矩阵(A,E)施行若干次初等行变换，当A变为E时，E相应地变为A^{-1}

2. 设A是n阶矩阵，k是一个数，则$|kA|=k|A|$.

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一页 下一页

设$P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，则

A $PA=\begin{pmatrix}2a_1&3a_2&4a_3\\2b_1&3b_2&4b_3\\2c_1&3c_2&4c_3\end{pmatrix}$

B $PA=\begin{pmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\3b_1&3b_2&3b_3\\4c_1&4c_2&4c_3\end{pmatrix}$

C $PA=\begin{pmatrix}2a_1&a_2&a_3\\b_1&3b_2&b_3\\c_1&c_2&4c_3\end{pmatrix}$

D $PA=\begin{pmatrix}4a_1&a_2&a_3\\b_1&3b_2&b_3\\c_1&c_2&2c_3\end{pmatrix}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一页 下一页

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

C A

$\begin{pmatrix}2&3&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一页 下一页

设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，则

$(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$ =

A E

B $\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$

C A

D $\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一页 下一页

判别下列命题是否正确

1. 若A或B不可逆，则AB必不可逆.

2. 可逆矩阵一定是方阵.

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一页 下一页

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&3&4\end{pmatrix}$ A^* 是 A 的伴随矩阵，

$(A^*)^{-1}=$

A A C A^2

B $\frac{1}{4}A$ D $\frac{1}{12}A$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $ad-bc=1$, 则 $A^{-1}=$

A $\begin{pmatrix}c&b\\d&a\end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix}d&b\\c&a\end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

1. 设A,B均为n阶方阵，则必有 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2. 设A,B为同阶可逆阵，则存在可逆阵P,Q使 $PAQ=B$

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

以下结论正确的是

A 若方阵A的行列式$|A|=0$，则$A=0$

C 若$A^2=0$，则$A=0$

B 若A为对称矩阵，则A^2也是对称矩阵

D 对任意的同阶方阵A,B有$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 设A,B为 n 阶方阵，那么，
$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

2. 设 A为 n 阶方阵，且$A^2=0$, 那么$A=0$.

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

判别下列命题是否正确

1. 矩阵A 可逆的充要条件是 A 可以表示成若干个初等矩阵的乘积.

2. 设A, B, C, D为n 阶方阵,那么.
$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$$

A 1; B 2; C 1，2; D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

若A,B均为 n阶方阵，则必有

A $|A+B|=|A|+|B|$ C $|AB|=|BA|$

B $AB=BA$ D $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

5. 设A是n阶可逆矩阵，A^*是A的伴随矩阵，则（ ）

A $|A^*|=|A|$ C $|A^*|=|A|^n$

B $|A^*|=|A|^{n-1}$ D $|A^*|=|A^{-1}|$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

若 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$均为n阶可逆矩阵，则

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$$

A $A^{-1}+B^{-1}$ C $B(A+B)^{-1}A$

B $A+B$ D $(A+B)^{-1}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

若A是n阶可逆矩阵，下列各式正确的是

A $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

B $AA^{*} \neq 0$

C $(A^{*})^{-1} = \frac{A^{-1}}{|A|}$

D $\left[(A^{-1})^{T}\right]^{-1} = \left[(A^{T})^{-1}\right]^{T}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设A是n阶可逆矩阵，则

A 若$AB = CB$，则$A = C$

B A总可以经过初等行变换化为I

C 对矩阵$(A\ I)$施行若干次初等变换，当A变I时，相应地I变为A^{-1}

只能用行变换、

D 对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$施行若干次初等变换，当$A$变$I$时，相应地$I$变为$A^{-1}$

要求为列变化

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设A是n阶可逆矩阵，则$(-A)^{*}$等于（ ）

A $-A^{*}$

B A^{*}

C $(-1)^{n} A^{*}$

D $(-1)^{n-1} A^{*}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

若向量$(2,3,-1,0,1)$与$(-4,-6,2,a,-2)$线性相关，则a的取值为

A $a = 0$;

B $a > 0$;

C $a \neq 0$;

D a为任何数

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

向量组$(1,1,0),(3,0,-9),(1,2,3),(1,-1,-6)$的秩是

A 1;

B 3;

C 2;

D 4

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

向量组$(2,-1,3,0),(0,3,-2,1),(6,0,7,1),(1,1,1,1)$的秩是

A 1;

B 3;

C 2;

D 4

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

已知向量组$\alpha_1 = (1,0,2,-1)$ $\alpha_2 = (1,2,0,1)$ $\alpha_3 = (0,1,-1,1)$，$\alpha_4 = (1,1,1,0)$，$\alpha_5 = (3,2,4,0)$，则这个向量组的一个极大线性无关组可以取向量组

A α_1,α_2

B $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

C $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设向量组$(a+1,2,-6),(1,a,-3),(1,1,a-4)$线性无关，则$a$的取值为

A $a = 0$

B $a = 1$

C $a \neq 0$

D $a \neq 1$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

已知向量组 $\alpha_1 = (1,0,2)$，$\alpha_2 = (2,0,-3)$，$\alpha_3 = (1,2,1)$，$\alpha_4 = (0,0,-7)$，则数域P上的任何一个三维向量$\beta = (a,b,c)$都可表为下列向组中的一个的线性组合，这个向量组为

A α_1,α_2

B $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

C $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

D α_3,α_4

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设有向量组(I),(II)是(I)的部分组，则下列断语正确的是（ ）

A 若(I)线性相关,则(II)也线性相关

B 若(II)线性相关,则(I)也线性相关 ✓

C 若(I)线性无关，则(II)也线性无关 ✓

D (I)的相关性与(II)的相关性没有联系

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关是向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$线性无关的（ ）

等价的向量组,相关性相同.

A 充分但非必要的条件

B 充分且必要条件 ✓

C 必要但非分条件

D 既不充分也不必要条件

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则 r与 s的关系为

A $r\le s$ ✓

B $r\ge s$

C $r<s$

D $r>s$

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

判别下列命题是否正确

1. 如果向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$唯一线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性无关. ✓

2. 如量向量组I与向量组II的秩相等，那么I~II. ✗ $\binom{1}{0},\binom{0}{1}$ 2 22

A 1; B 2; C 1，2; D 无. ✓A

返回目录 详细解答 上一题 下一题

上命题中正确的有

判别下列命题是否正确

1. 如果向量组线性相关，那么其中每一个向量都能由其余向量线性表出. ✗ $\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}$

2. 如果$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$,那么$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性相关. ✓

A 1; B 2; C 1，2; D 无. ✓B

返回目录 详细解答 上一题 下一题

上命题中正确的有

判别下列命题是否正确

1. 如果向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$唯一线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性无关.

2. 如量向量组I与向量组II的秩相等，那么I~II.

A 1; B 2; C 1，2; D 无. ✓A

返回目录 详细解答 上一题 下一题

上命题中正确的有

判别下列命题是否正确

1. 如果向量组线性相关，那么其中每一个向量都能由其余向量线性表出. ✗

2. 如果$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$,那么$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性相关. ✓

A 1; B 2; C 1，2; D 无. ✓B

返回目录 详细解答 上一题 下一题

上命题中正确的有

判别下列命题是否正确

1. 设$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 是线性空间V中S个n维向量,且 $n>s$,那么 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性无关 ✗

2. 如果 $L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，那么向量组$\{\alpha_1,\alpha_2\}$与向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$等价. ✓

A 1; B 2; C 1，2; D 无. ✓B

返回目录 详细解答 上一题 下一题

上命题中正确的有

如果向量组(I)可由向量组(II)线性表出，那么

A (I) 的秩 ≥ (II)的秩

B (I) 的秩 ≤ (II)的秩 ✓

C (I) 的秩 > (II)的秩

D (I) 的秩 = (II)的秩

返回目录 详细解答 上一题 下一题

请选择正确答案

如果每一个 n 维向量都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，那向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

A 线性相关　　C 线性无关

B 相关性不定　　D 是单位向量

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

如果向量组(I)与向量组(II)等价，那么

A (I)的秩<(II)的秩　　C (I)的秩≤(II)的秩

B (I)的秩 = (II)的秩　　D 以上都错

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

自测题18

设两个向量组(I)与(II)的秩相等，且(I)可由(II)线性表出，则

A (II)可由(I)线性表出　　C (II)不一定能由(I)线性表出

B (I)线性相关　　D (I)的向量个数多于(II)的线性个数

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ (I) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ (II) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ (III)，它们的秩分别为 r_1,r_2,r_3，则

A $\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$　　C $\max(r_1,r_2)\ge r_3\ge r_1+r_2$

B $\max(r_1,r_2)\le r_1+r_2\le r_3$　　D $r_1\le r_2\le r_3$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设有矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{s\times n}$

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

则

A 秩(C)= 秩(A)+ 秩(B)　　C 秩$(C)\le$ 秩(A)+ 秩(B)

B 秩$(\dot{C})\ge$ 秩(A)= 秩(B)　　D 秩$(C)>$ 秩(A)+ 秩(B)

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

自测题21

设有一组 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，使得任一 n 维向量 β 都可由这个向量组线性表出，则（ ）

A $s=n$　　C $s<n$

B $s>n$　　D $s\ge n$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

已知向量组 $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3),\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)$ 则这个向量组等价于向量组

A $\begin{cases}\beta_1=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\\ \beta_2=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)\end{cases}$　　C $\begin{cases}\beta_1=(2a_1,2a_2,2a_3)\\ \beta_2=(0,0,0)\end{cases}$

B $\begin{cases}\beta_1=(a_1,2a_2,3a_3)\\ \beta_2=(-b_1,-b_2,-b_3)\end{cases}$　　D $\begin{cases}\beta_1=(a_1,2a_2,3a_3)\\ \beta_2=(-b_1,-2b_2,-3b_3)\end{cases}$

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

$r(C)=n.$

设A是 n阶矩阵，C是n阶可逆矩阵，矩阵A的秩为r，矩阵$B=AC$的秩为r_1，则

$r=r(A)\ge r(AC)\ge r(A)+r(C)-n=r$

A $r>r_1$　　C $r=r_1$

B $r<r_1$　　D r与r_1的关系依C而定

请选择正确答案

返回目录 详细解答 上一题 下一题

自测题24

下列向量组有几个是线性相关组

1. $\alpha_1=(1,-2,3)$，$\alpha_2=(0,2,-5)$，$\alpha_3=(-1,0,2)$ √
2. $\alpha_1=(2,1,-1,-1)$，$\alpha_2=(0,3,-2,0)$，$\alpha_3=(2,4,-3,-1)$ √
3. $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(3,2,1)$，$\alpha_3=(1,3,1)$ ×

A 1个；B 2个；C 3个；D 无.

上命题中正确的有

返回目录 详细解答 上一题 下一题

设A,B均为n阶非零矩阵，且$AB=0$，则A和B的秩

$n \geq r(A)+r(B)$

A 必有一个等于零　　C 一个小于n，一个等于n

B 都小于n ✓　　D 都等于n

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 如设V_1, V_2是线性空间V的子空间，$\alpha \in V_1 + V_2$，$\alpha \notin V_1$　那么$\alpha \in V_2$．

$V_1+V_2 = \gamma_1+\gamma_2, \gamma_1 \in V_1, \gamma_2 \in V_2$.

2. R看作自身上的线性空间是一维的，数 1 就是它的一个基． ✓

A　1;　　B　2;　　C ✓　1，2;　　D　无．

B

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

如果齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sp}x_p = 0 \end{cases}$有非零解，

系数 矩阵的秩为q，则它的基础解系中含有向量的个数为

A　$s-q$　　C　$q-p$

B　$s-p$　　D ✓　$p-q$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

R^3中由标准基$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$，$e_3=(0,0,1)$，

到基$\alpha_1=(1,1,2)$，$\alpha_2=(1,3,0)$，$\alpha_3=(1,0,1)$的过渡矩阵为．

A $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　　C $\begin{bmatrix} 18 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 3 & \\ 2 & & \end{bmatrix}$　　D ✓ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

R^n中下列子集哪个是子空间：

A $\{(a_1, 0, \cdots, 0, a_n) \mid a_1 + a_n = 2\}$　　C ✓ $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$

B $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in Z, I = 1,2,\cdots,n\}$　　D $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

如果齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$有非零解，

那么

A　$s<n$　　C　$s>n$

B　$s=n$　　D ✓　三种情况都有可能

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

解

$$\because (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所求过渡矩阵为$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

下一题　返回目录

设方程组$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ kx+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$有非零解则

A　$k=1$　　C ✓　$k=2$

B　$k=-1$　　D　$k=-2$

请选择正确答案

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 若线性方程组（I）经方程组的初等变换变为方程组（II），则（I）与（II）是同解方程组．

2. 含有n个未知量$n+1$个方程组

$a_{i1}+x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$，$i=1, 2, \cdots, n+1$

的线性方程组如果有解，那么行列式．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \cdots & a_{n+1n} & b_{n+1} \end{vmatrix}=0$$ ✓

A　1;　　B　2;　　C ✓　1，2;　　D　无．

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

因为这个方程组有解，故系数矩阵与增广矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{bmatrix},\quad \bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{bmatrix}$$

有相同的秩，即秩（A）=秩($\bar{A}$).但由于A只有n列，所以秩（A）≤n.

从而秩$(\bar{A})\le n$, $|\bar{A}|=D=0$.

下一题　返回目录

判别下列命题是否正确

1. 线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=b_1 \\ -2x_2+3x_3=b_2 \\ -3x_3+4x_4=b_3 \\ -x_1-4x_4=b_4 \end{cases}$ 有解的充要条件为 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$. ✓

2. 线性方程组的两个解向量的和还是这个线性方程组的解.

✗ $A(x_1+x_2)=2b$.

A ✓ 1;　B 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

解

1. 证明：方程组的增广矩阵为 $\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & b_3 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & b_4 \end{bmatrix}$ 将第1、2、3、4行都加到末行，得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3+b_4 \end{bmatrix}$ 由此可见，方程组有解的充要条件为系数矩阵A的秩=$\bar{A}$的秩=3，亦即 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$.

下一题　返回目录

判别下列命题是否正确

1. 齐次线性方程组如果有非零解，那么方程的个数小于未知量的个数. ✗

2. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$ 未知量的个数多于方程的个数，则它有非零解. ✓

A 1;　B ✓ 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. n元齐次线性方程组，如果系数矩阵的秩为$n-2$，那么它的任意两个非零解就是它的一个基础解系. ✗

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　$r=1$　$X_1=(0,0,0)$　$X_2=(-1,1,0)$　$X_3=(-1,0,1)$.

2. n元齐次线性方程组，如果系数矩阵的秩为 r，那么它的任意$n-r$个线性无关的非零解就是它的一个基础解系.

A 1;　B ✓ 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0 \end{cases}$ 的任意两个线性无关的解是它的一个基础解系. ✗

2. 齐次线性方程组，如果有一个基础解系，那么它有无穷多个基础解系. ✓

A 1;　B ✓ 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 齐次线性方程组，如果有非零解，那么系数矩阵的秩与自由未知量的个数相等. ✗ $n-r$

2. ✓ 齐次线性方程组，如果有基础解系，那么一个基础解系中解的个数与自由未知量的个数相等.

A 1;　B ✓ 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 如果向量α_1,α_2是一个齐次线性方程组的基础解系，那么这个齐次线性方程组的全部解为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 是不全为零的任意数. ✗

0向量也是解! k_1、k_2是任意实数.

2. ✓ n元线性方程组$Ax=B$有无穷多个解的充要条件是秩（A）=秩（$\bar{A}$）$<n$

A ✓ 2;　B 1;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

判别下列命题是否正确

1. 如果向量α_1,α_2是n元线性方程组 $Ax=B$ 的两个解向量，那么 $\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$ 也是这个方程组的一个解向量. ✓

2. 如果非齐次的线性方程组 $Ax=B$ 有解，那么一定存在一组解向量，使每个解向量都可由这一组解向量线性表示.

✗ ✓ 基础解系

C

A ✓ 1;　B 2;　C 1，2;　D 无.

上命题中正确的有

返回目录　详细解答　上一题　下一题

若方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 8x_4 = a \end{cases}$ 有解，则

A $a=-7$

B $a \neq -7$

C $a=0$

D $a \neq 0$

请选择正确答案

返回目录 | 详细解答 | 上一题 | 下一题

方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b \end{cases}$ 有无穷多个解的充要条件是

A $a=7, b$为任何数

B $a=7, b=-1$

C $a \neq 7, b=-1$

D a为任何数，$b=-1$

请选择正确答案

返回目录 | 详细解答 | 上一题 | 下一题

若线性方程组 $\begin{cases} k_1x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$ 有唯一解，则

A $k \neq 1$或$k \neq -2$

B $k \neq 1$且$k \neq -2$

C $k=1$或$k=-2$

D $k=-2$

请选择正确答案

如果线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$ 无解，那么

A $k=-2$

B $k=1$

C $k \neq -2$

D $k=0$

请选择正确答案

返回目录 | 详细解答 | 上一题 | 下一题

汽 02 几代习题课题目　2010.12.22

1、　设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ 是 A 的特征值 $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ 是 A 对应于 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$ 的 n 个两两正交的单位特征向量，X_i 均为列向量（i=1,2,3…n）试证明 A 可以表示为

$$A=\lambda_1 X_1 X_1^T+\lambda_2 X_2 X_2^T+\ldots\ldots+\lambda_n X_n X_n^T$$

2、　设 A,B 都是实对称矩阵，试证明：存在正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT=B$ 的充要条件是：A 与 B 有相同的特征多项式。

3、　设 A 为 3 阶方阵，且已知 A-I,A+I,A-2I,均不可逆，试问 A 是否相似于对角矩阵？理由？

4、　求证：$\delta \in L(V)$，δ 可对角化的充分条件是 δ 有 n 个两两不等的特征值。

10

5、　若在 V 上复数域上的线性空间，δ、σ 都是 V 的线性变换，且 $\delta\sigma=\sigma\delta$，求证 δ、σ 一定有公共的特征向量。

6、　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，B 为三阶非零矩阵且 AB=0.求 t 的值

7、　计算行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$

8、设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k 使线性方程组 $A^kX=0$

有解向量α且 $A^{k-1}\alpha\neq0$，证明：向量组α，Aα ……$A^{k-1}\alpha$是线性无关的。

9、设线性方程组 AX=b 有 n 个未知量，m 个方程。则此方程组（ ）

A、r=m 时，有解　B、r=n 时，有唯一解

C、m=n 时，有唯一解 D、r＜n 时，有无穷多个解

10、设 A 为 n 阶方阵，$|A|\neq0$，A^*为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶方阵，若 A 有特征值λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值____。

11、二次型和内积的表达式可以说是惊人的相似，他们有什么联系吗？（这不是一道题，是某个好奇的同学的问题）

12、设 R^3 是欧几里得空间，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^T$，内积规定为 $(\alpha,\beta)=\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$，$\varepsilon_1=(2,-1,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,0,-1)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 是 R^3 的一组基，求 R^3 关于 ε_1，ε_2，ε_3 的度量矩阵。

13、设 α_1，α_2，α_3…… α_n 是欧几里得空间的 n 个向量，行列式 $G(\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=$

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots\cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots\cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ & \cdots\cdots & & \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots\cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{vmatrix}$$

称为 α_1，α_2，… α_n 的格拉姆行列式，证明 $G(\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=0$ 的充要条件是 α_1，α_2，α_3…… α_n 线性相关。

14、设 W_1，W_2 是欧几里得空间的两个子空间，证明

$(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$, $(W_1\cap W_2)^{T}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$

15、设 $\alpha_{1.}$，α_2，α_3…… α_m 和 β_1，β_2…… β_m 是 n 维欧几里得空间的两个向量组，试证明存在一个正交变换 δ，使得 $\delta(\alpha_i)=\beta_i$，i=1，2，3.....m 的充要条件是 $(\alpha_{i.},\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$；i，j=1,2,3……m

16. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间
证明 $\exists \alpha\in V$ s.t. $\alpha\notin W_1$ 且 $\alpha\notin W_2$

17 设 $A\in M_{m\times n}$, $r(A)=r$. 证明 $\exists B\in M_{n\times n}$ 且 $r(B)=n-r$
s.t. $AB=0$

18 一个正交阵中每个元素均为 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$ 则该正交阵是几阶的?

19 欧氏空间中 $\alpha_1\cdots\alpha_k$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_k) \\ \vdots & & & \\ (\alpha_k,\alpha_1) & \cdots & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k) \end{vmatrix}=0$

20 线性变换 $\sigma(\alpha)=A\alpha$ $(A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n))$
那么 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 与 $L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$; $\ker\sigma$ 与 $K(A)$ 有什么关系?

21 $A=(\beta_1\cdots\beta_n)$ $K(A)=\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}$ 的基 $\alpha_1\cdots\alpha_k$. 现将 $\alpha_1\cdots\alpha_k$ 扩为 $\mathbb{R}^n$ 的基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$. 证明 $A\alpha_{k+1}\cdots A\alpha_n$ 是 $L(\beta_1\cdots\beta_n)$ 的基（上次~~册~~没听懂，请再说一遍，$\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n$ 是否就是 $L(\beta_1\cdots\beta_n)$ 的基）

几何与代数（1）考试样题三

一、填空题（共计 48 分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$__________.

2. 已知 $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$,则$r(A) =$__________.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$,则当 a 满足条件________时, A 可逆,当 a=_____时, r(A)=2.

4. $A\in M_3$且是实对称矩阵,已知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$, 又对应于$\lambda=1$的特征向量为 $\xi_1=(2, 1, 2)^T, \xi_2=(1, 2, -2)^T$, 则对应于$\lambda=-1$的特征向量为________.

5. 已知 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 X=____________.

6. 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+x_3-x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系是______________________________.

7. 已知平面过直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$和$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{1}$, 则平面的法向量是____________.

8. 已知四元方程组 AX=b 系数矩阵 A 的秩等于 2,$X_0=(1, 0, 1, 0)^T$是 AX=0 的解,又 X_1, X_2, X_3, 是 AX=b 的三个解. 已知 $X_1+X_2-X_3=(1, -1, -1, 1)^T$, $X_1-X_3=(1, 1, 0, 0)^T$, 则 AX=b 的通解是________________________.

9. 在三维空间中，方程 $4x^2+9y^2=z$ 代表________面,用一组平行于 Oxy 坐标面的平面去截时，得到一组__________曲线.

10. 已知三个平面 x=3y−z， y=az+3x， z=−x+ay，交于一条直线，则 a=______.

11. 已知 A 是三阶方阵，且$|A|=2$，则 $|A^{-1}-A^{*}|=$________.

12. 已知 A 是三阶方阵，其特征值分别为 1，-2，3，则 A 的行列式中元素的代数余子式 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$________.

13. 若 A 可逆且可对角化，则 A^{*}是否可对角化________，理由是____________________________.

二、计算与证明题（共计 52 分）

1. 求点 M(4,3,10) 关于直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的对称点的坐标. (10)

2. 已知矩阵 A 是三阶实对称阵，它的特征值分别是 1,1,2, 且属于 2 的特征向量是 $(1,0,1)^T$，求 A. (10)

3. 设已知 R^3 的一组基为 $\varepsilon_1=(1,2,0)^T$，$\varepsilon_2=(1,-1,2)^T$，$\varepsilon_3=(0,1,-1)^T$，矩阵

$$P=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$，若 P 为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵,

(1). 求基 η_1,η_2,η_3.

(2). 设σ是 R^3 上的一个线性变换，已知 σ 在基η_1,η_2,η_3 下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix}2&3&12\\0&0&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$$，试求 σ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A.

(3). 若 α 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是 $X=(2,1,0)^T$，试求 $\sigma(\alpha)$ 在基η_1,η_2,η_3 下的坐标． (15 分)

4. 设向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，非零向量 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交，证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关. (8 分)

5. 设 A 是 m×n 矩阵，试针对各种 A，讨论是否存在 n×m 矩阵 B，使得 AB=I.

(本题可自由发挥，但请按以下格式答题:

命题:

证明:

举例:

可以用多个命题来叙述，可以讨论存在的条件，或者讨论存在的唯一性问题等.) (9 分)

几何与代数（1）考试样题四

一、填空 (1—11 题, 每空 3 分, 共计 36 分)

1. 设 $\alpha=i+2j-2k,\beta=3i-j$,则 $\alpha\times\beta=$______________.

2. 四元线性方程组

$$\begin{cases}x_2-2x_3+x_4=0\\2x_1-x_2+x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

的基础解系是__________________________________.

3. $\begin{vmatrix}2&4&3&0&-1\\0&-2&0&0&0\\10&20&15&2&4\\0&4&3&0&0\\2&4&-1&0&0\end{vmatrix}=$__________.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&1&-1\\-1&-3&1&1\\1&0&-3&1\end{pmatrix}$, 则 A 的列空间的维数为________.

5. 三维线性空间的基 $\eta_1=(1,-1,1)^T$, $\eta_2=(1,0,2)^T$, $\eta_3=(0,1,2)^T$ 到基 $\varepsilon_1=(1,-1,0)^T$, $\varepsilon_2=(1,2,1)^T$, $\varepsilon_3=(1,0,-1)^T$ 的过渡矩阵 P=__________________.

6. 在三维空间中, 方程 $\begin{cases}4x^2+9y^2=z\\6y+z=1\end{cases}$ 代表________________曲线.

7. 过点 (1, -2, 0) 与直线 $\begin{cases}x+y-2z+1=0\\2x+y-3z-1=0\end{cases}$ 平行的直线的标准方程是__________________.

8. 设 $A\in M_3$ 是实对称矩阵, 已知 A 的特征值是 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$, 对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\xi_1=(2,-2,-1)^T$, 则对应于特征值 $\lambda=2$ 的任意一个特征向量为________________________.

9. 已知 $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2&2&2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 其特征值为 1, -2, 3, 又 $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 则 A

的行列式中元素的代数余子式 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$________.

10. 已知向量 $X=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的一个特征向量，则常数 k=______, X 所对应的 A^{-1} 的特征值=________.

11. 设 A 是 3 阶方阵，已知 X_1,X_2 是 A 的两个线性无关的特征值向量，则 aX_1+X_2 是 A 的特征向量的条件是__________.

二、计算题 （12—17 题，共计 64 分）

12. 求过点 (1,-2,0) 及点 (2,2,3) 且与平面 x+y+z=1 垂直的平面方程. (10 分)

13. 已知 R^3 的两组基分别是 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T$， $\varepsilon_2=(1,1,1)^T$， $\varepsilon_3=(1,0,1)^T$， $\eta_1=(2,5,-1)^T$， $\eta_2=(2,1,2)^T$， $\eta_3=(7,13,0)^T$，设 R^3 的线性变换 σ 使得 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵是 $B=\begin{pmatrix}2&3&12\\0&0&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$，

(1) 试求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵；

(2) 若 $\gamma=(2,0,-1)^T$，求 $\sigma(\gamma)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标. (15 分)

14. 设 $A=\begin{pmatrix}1&k&2\\-1&-1&-1\\1&-k&0\end{pmatrix}$，问 k 取何值时，A 可对角化？当 A 可对角化时，求矩阵 P 及对角阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$. (15 分)

15. 设 ξ_1,ξ_2 是线性方程组 AX=b 的导出组的基础解系，η_1,η_2 是 AX=b 的两个相异的特解，试证明 i=1，或 2 时，ξ_1,ξ_2,η_i 线性无关，而 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 线性相关. (8 分)

e. 设 A 是一个 n 阶方阵，$r(A^*)\le n-1$，证明存在一个 n 阶矩阵 $B\neq 0$，使得 AB=0. (8 分)

f. 已知四元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3\end{cases}$ 的五个解，它们是

$X_1=(1,1,1,0)^T$，$X_2=(2,2,1,0)^T$， $X_3=(0,0,1,0)^T$，$X_4=(3,1,2,0)^T$，

$X_5=(0,1,1,1)^T$，试求方程组的一般解，并写出该方程组. (8 分)

一 填空题

1 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,则 $B^{-1}=$________

2 $A\in M_4(R)$，$A^*\neq O$。已知方程组 $A\overline{X}=\bar{b}$ 有三个根 $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$ 满足 $\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}=(1,1,0,2)^T,\overline{\alpha_2}+\overline{\alpha_3}=(1,0,1,3)^T$。则方程组 $A\overline{X}=\bar{b}$ 的通解是________

3 A,B 是3阶方阵，将 A 的第一行的 (-2) 倍加到第三行得矩阵 A_1，将 B 的第一列乘以 (-2) 得矩阵 B_1，已知 $A_1B_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$，则 $AB=$______

4 $A\in M_n(R)$，已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$，$a_i\neq a_j,\forall 1\le i,j\le n,i\neq j$，$n$ 维行向量 $\overline{\beta}=\frac{1}{2}(1,1,\cdots,1)$。且 n 维行向量 $\bar{x}$ 满足 $\bar{x}A=\overline{\beta}$，则 $\bar{x}=$________

二 已知平面 $\pi: x_1+2x_2-ax_3=0$ 与直线 $l:\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+ax_2+2x_3=1 \end{cases}$ 平行，求:

（1）a 的值

（2）直线 l 在平面 π 上的正交投影 l'

三 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ & 0 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & c_{n-1} \\ c_n & & & & 0 \end{pmatrix}$，$c_i\in R$，$1\le i\le n$，求

（1）$\det(E-A)$

（2）$\det(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$

四 矩阵 $A=(\overrightarrow{\alpha_1}\quad \overrightarrow{\alpha_2}\quad \overrightarrow{\alpha_3})$ 为三阶实对称矩阵，$\lambda_1=2,\lambda_2=-2$ 是它的两个特征值，且 $\overrightarrow{\alpha_1}-\overrightarrow{\alpha_2}+\overrightarrow{\alpha_3}=(1,-1,1)^T$。矩阵 $B=A^5-4A^3+E$。

（1）证明：$\lambda_3=1$ 也是 A 的特征值，对应的特征向量 $\overline{\beta}$ 为 $(1,-1,1)^T$

（2）证明：$\overline{\beta}$ 也是 B 的特征向量，并求 B 的所有特征值和特征向量

（3）求矩阵 B 和 B^k

五 $A,B,P\in M_n(R)$，A,B 可逆。证明：

$$r(A-P^TB^{-1}P)=r(B-PA^{-1}P^T)$$

六

（1） $A\in M_n(C)$，$\exists m\in N^*$，使得 $r(A^m)=r(A^{m+1})$，

证明：$\forall k\geq 1$，均有 $r(A^m)=r(A^{m+k})$

（2） $A\in M_{m\times n}$，$m<n$，$r(A)=m$，证明：

$$r(E_n-A^TA)-r(E_m-AA^T)\geq n-m$$

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 几何与代数(1)　　2001 年 1 月 8 日

A 卷　　班号__________学号_____________ 姓名__________成绩________

填空（1 - 11 题，每空 3 分，共计 36 分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ______ .

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的列空间的维数为 __________ .

3. 设 $\alpha = i + 2j - 2k, \beta = 3i - j$，则 $\alpha \times \beta =$ ____________________________________ .

4. 四元线性方程组

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

的基础解系是____ .

5. 三维线性空间的基 $\eta_1 = (1, \ -1, \ 1)^T, \eta_2 = (1, \ 0, \ 2)^T, \eta_3 = (0, \ 1, \ 2)^T$ 到基 $\varepsilon_1 = (1, \ -1, \ 0)^T, \varepsilon_2 = (1, \ 2, \ 1)^T, \varepsilon_3 = (1, \ 0, \ -1)^T$ 的过渡矩阵

$P =$ ___________________________________ .

6. 设 $A\in M_3$ 是实对称矩阵，已知 A 的特征值是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$，对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\xi_1=(2,\ -2,\ -1)^T$，则对应于特征值 $\lambda=2$ 的任意一个特征向量为____________________.

7. 过点 $(1,\ -2,\ 0)$ 与直线 $\begin{cases}x+y-2z+1=0\\2x+y-3z-1=0\end{cases}$ 平行的直线的标准方程是__________.

8. 在三维空间中，方程 $\begin{cases}4x^2+9y^2=z\\6y+z=1\end{cases}$ 代表________________曲线。

9. 已知 $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2&2&2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，其特征值为 $1,\ -2,\ 3$，又 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，则 A 的行列式中元素的代数余子式 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$________.

10. 已知向量 $X=(1,\ k,\ 1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的一个特征向量，则常数 $k=$______，X 所对应的 A^{-1} 的特征值 $=$________.

11. 设 A 是3阶方阵，已知 X_1,X_2 是 A 的两个线性无关的特征向量，则 aX_1+X_2 是 A 的特征向量的条件是________________.

计算题（12-17 题，共计 64 分）

12．已知R^3的两组基分别是$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0)^T,\varepsilon_2=(1,\ 1,\ 1)^T,\varepsilon_3=(1,\ 0,\ 1)^T$，

$\eta_1=(2,\ 5,\ -1)^T,\eta_2=(2,\ 1,\ 2)^T,\eta_3=(7,\ 13,\ 0)^T$，设$R^3$的线性变换$\sigma$使得

σ在基η_1,η_2,η_3下的矩阵是$B=\begin{pmatrix}2&3&12\\0&0&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$．

（1）试求σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵；

（2）若$\gamma=(2,\ 0,\ -1)^T$，求$\sigma(\gamma)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标.．（15 分）

13．求过点（1,-2,0）及点（2,2,3）且与平面 $x+y+z=1$ 垂直的平面方程．（10 分）

14．设 $A=\begin{pmatrix}1&k&2\\-1&-1&-1\\1&-k&0\end{pmatrix}$，问$k$取何值时，$A$可对角化？当$A$可对角化时，求可逆矩阵$P$及对角阵$D$，使得$P^{-1}AP=D$．（15 分）

15．设ξ_1,ξ_2是线性方程组$AX=b$的导出组的基础解系，η_1,η_2是$AX=b$的两个相异的特解，试证明$i=1$,或 2 时，ξ_1,ξ_2,η_i线性无关，而$\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$线性相关.（8 分）

16．设A是一个n阶方阵，$r(A^*)\le n-1$，证明存在一个n阶矩阵$B\ne 0$，使得$AB=0$．

（8 分）

17．已知四元线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3\end{cases}$ 的五个解，它们是

$X_1=(1,\ 1,\ 1,\ 0)^T,X_2=(2,\ 2,\ 1,\ 0)^T,X_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0)^T,X_4=(3,\ 1,\ 2,\ 0)^T$，

$X_5=(0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，试求方程组的一般解，并写出该方程组．（8 分）

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 代数与几何（1） 2002年12月30日

A卷

班号________ 姓名__________ 学号__________

一．填空题（每空4分，共计32分）

1．设$\alpha_1=(1,\ 1,\ 2,\ -1)^T$，$\alpha_2=(2,\ 4,\ 6,\ 2)^T$，$\alpha_3=(2,\ 6,\ t,\ 6)^T$，

已知α_1,α_3是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大线性无关组，则$t=$ ______．

2．设$\alpha=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$，$\beta=\vec{j}-\vec{k}$，$\gamma=2\vec{i}+\vec{j}$，则$\alpha\times\beta-\beta\times\gamma$ = __________．

3．设四元齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A的秩为3，η_1,η_2,η_3是$Ax=b$的3个解，

已知$\eta_1+\eta_2=(1,\ 1,\ 0,\ 2)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,\ 0,\ 1,\ 3)^T$，则$Ax=b$的通解是

______________________________________．

4．设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{pmatrix}$，则$A$的四个特征值为 ________．

5．设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$，

A,B,C中与D相似的矩阵为 ________，与D相合（合同）的矩阵为 ________．

6．λ满足条件 ________ 时，二次曲面$x^2+(\lambda+2)y^2+\lambda z^2+2xy=5$是一个椭球面．

7．设$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}$，已知$\alpha=(t,\ 1,\ 1)^T$是矩阵$A$的特征向量，则$t=$ ______．

二．计算题（8题10分，9题12分，10，11每题15分，共计52分）

8．设$A=\begin{pmatrix}-1&1&&\\0&2&&\\&&1&1\\&&2&1\end{pmatrix}$，满足$BA=A+B$，求矩阵$B-I$．

9．向量α在R^3的一组基$\alpha_1=(1,\ -2,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ -1)^T$，

$\alpha_3=(0,\ 1,\ -2)^T$下的坐标是$(1,\ 0,\ 2)^T$，试求α在基$\beta_1=(1,\ 0,\ 1)^T$，

$\beta_2=(1,\ 1,\ -1)^T$，$\beta_3=(0,\ 1,\ 0)^T$下的坐标．

10．　设方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+\lambda x_2+2x_3=1\\x_1+(2\lambda-1)x_2+2x_3=1\\x_1-3x_2-2x_3=1\end{cases}$$

λ为何值时，方程组有无穷多解？试求一般解．

11．　用正交线性替换化二次型$f=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$为标准形，写出正交矩阵及标准形．

三．证明题（每题8分，共计16分）

12．　设A是实对称矩阵，A的特征值为$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，试证明对任意$X\neq0$，

$\lambda_1\le\dfrac{X^TAX}{X^TX}\le\lambda_n$，并讨论等号何时成立．

13．　设η_1，η_2，η_3是n维向量，A是$m\times n$矩阵，已知A的秩为$n-3$，齐次线性方程组$Ax=0$的每个解向量都可由η_1，η_2，η_3线性表出，试证明η_1，η_2，η_3是$Ax=0$的一个基础解系．

清华大学本科生考试试题专用纸

A 卷　　考试课程 几何与代数(1)　2003 年 12 月 29 日

________ 系________班 姓名________ 学号__________

一．填空题（将答案填在空格内．每空 4 分，合计 40 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&-3&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $(AB)^{-1}=$__________

2. 设 $\alpha=(2,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\beta=(1,\ 2,\ 0,\ 0)^T$，若 $A=\alpha\beta^T$，B 是一个秩为 3 的 4 阶方阵．则秩 $r(BA-2B)=$________．

3. 已知 3 阶非零矩阵 B 的每个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases}2x_1+x_2+kx_3=0\\ x_1-x_3=0\\ x_1-x_2=0\\ 5x_1-x_2+(k-1)x_3=0\end{cases}$$

则 $k=$_____，$|B|=$_____．

4. 设 A 是 3 阶矩阵，已知 1 是 A 的一个特征值，且 $|A|=-2$，$trA=2$，则 A^2-I 的 3 个特征值是__________．

5. 与直线 $x=\frac{y}{0}=\frac{z}{3}$ 平行且与平面 $x-y+z+1=0$ 垂直的平面的法向量为__________．

6. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_1x_3$ 的正惯性指数为______．

7. 当初等矩阵 $A=$______，$B=$________ 时，有 $A\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 成立．

8. 在 $M_2(R)$ 上，向量组 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的秩=________．

二. 解答题（第 9，10 题各 15 分，11 题 14 分，12 题 8 分，13 题（1）5 分（2）3 分，合计 60 分）

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$，$t$ 为实数，$b=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间是 2 维的，求线性方程组 $Ax=b$ 的通解.

10. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$，

（1） 求正交线性替换化二次型为标准型；

（2） $f=1$ 为何种二次曲面？

11. R^3 上，设平面 π 在给定的直角坐标系中的方程是 $x+y+z=0$，点 P 的坐标是 (a,b,c)，令 $\alpha=(a,b,c)^T$，

（1）求与点 P 关于平面 π 对称的点 Q 的坐标；

（2）求 3 阶矩阵 A，使得 $A\alpha=\beta$，其中 β 是 Q 点坐标的转置；

（3）设平面 π_1 的方程是 $x-y+z=1$，求平面 π_2 的方程，使得 π_1 与 π_2 关于平面 π 对称.

12. 设 n 阶方阵 A 的非零互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其对应的特征向量分别为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，又设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，若 $1\le t<s$，试问向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_t+\beta_t$ 是否线性无关，证明你的结论.

13. 在 n 维线性空间 V 上，设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，其关系式为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)A$，其中 A 是 $s\times t$ 矩阵，试证明：

（1）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 A 的秩 $r(A)=t$；

（2）$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(A)$，其中 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩.

清华大学本科生考试试题专用纸

A 卷　　考试课程 几何与代数(1)　2005 年 1 月 6 日

________ 系_______班 姓名________ 学号__________

一．填空题（将答案填在下面的空格内，每题 4 分，合计 32 分）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & a & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，已知 B 为 3 阶非零矩阵，满足 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ ________.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则矩阵 AB 的全体特征值为__________.

3．在 R^3 中，已知从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵是__________________.

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则 A 的行列式 $|A|=$_____.

5．在直角坐标系中，已知平面 π 过点 $(1,1,0)$，$(0,0,1)$，$(0,1,1)$，则与平面 π 垂直且过点 $(1,1,1)$ 的直线的对称方程（标准方程）是________________.

6．设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，η_1,η_2,η_3 为 $Ax=b$ 的 3 个解，已知 $\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,0,1,3)^T$，则 $Ax=b$ 的通解为_____________________________.

7．将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 列与第 3 列交换，然后将所得矩阵的第 1 列的 -2 倍加到第 2 列，得到矩阵 B，则矩阵 $A^{-1}B=$ ______________.

8．$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3=1$ 表示的二次曲面是________________.

二．计算题（每题 18 分，合计 54 分）

9．设 3 阶实对称矩阵 A 有 3 个特征值 $3,3,-3$，已知属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$，求矩阵 A 及 A^{-1}.

10．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基，σ 是 V 上的线性变换，已知 $\sigma(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_3)=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$，

（1） 求线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵；

（2） 设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $X=(0,-1,2)^T$，求 $\sigma(\gamma)$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

11．设 n 元 $(n\geq 4)$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+bx_4+\cdots+bx_n=0\\ bx_1+ax_2=0\\ bx_1+ax_3=0\\ -bx_1+ax_4+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $b\neq 0$．试讨论 a,b,n 取何值时，方程组只有零解；取何值时，方程组有非零解？在有非零解时，写出方程组的基础解系.

三．证明题（第 12 题 8 分，第 13 题 6 分）

12．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，β 是 m 维非零列向量，已知 β 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，试证明

（1） $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关；

（2） $Ax=b$ 的解集合的极大线性无关组含有 $r+1$ 个向量.

13．设 A 为任意 n 阶实反对称矩阵（即 $A^T=-A$），试证明 $I-A^2$ 是正定矩阵.

清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程　　代数与几何　　2007 年 1 月 11 日

（请将所有题目的答案写在试卷上，并写清题号）

一（选择题，每题 4 分）

① 另辩证法

$r(A)$ ... 时 $r(A)+r(B)\le n$

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 6 & x\\ 3 & 0 & -6\end{pmatrix}$，三阶矩阵 $B\neq 0$，且满足 AB=0，则（A）

A. $x=-8$， $r(B)=1$；　　B. $x=-8$， $r(B)=2$；

C. $x=8$， $r(B)=1$；　　D. $x=8$， $r(B)=2$.

2. 设 $\vec{\alpha}_1=(0,2,1,1)^T,\vec{\alpha}_2=(-1,-1,-1,-1)^T,\vec{\alpha}_3=(1,-1,0,0)^T,\vec{\alpha}_4=(0,0,1,-1)^T$，则极大线性无关组是 D .

A. $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$； *B.* $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$； *C.* $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$； *D.* $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$.

3. 已知 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的两个不同解，$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$ 是齐次线性方程组 $A\vec{X}=0$ 的基础解系，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解是 B .

A. $\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}+k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)$； *B.* $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}+k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$；

C. $\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}+k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)$； *D.* $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}+k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)$.

4. 设 $V(F)$ 是欧氏空间，则 $\sigma\in L(V(F),V(F))$ 是正交变换的充要条件是 D .

辅平 ⟹ 平行

A. σ 保持 $V(F)$ 中任意两个向量的角度不变；

B. σ 在 $V(F)$ 的任意一组正交基下的矩阵是正交矩阵；

C. σ 把 $V(F)$ 任意一组正交基变成一组正交基；不是单位

D. σ 把 $V(F)$ 中任意单位向量变成单位向量.

若把基全映射为某单位向量

即 $\sigma(\alpha_1)=\sigma(\alpha_2)=\sigma(\alpha_3)=\varepsilon$，

不能保证单位向量 ...

二(填空题，每题 4 分).

1．设 $D_4=\begin{vmatrix}3&1&3&2\\3&3&1&-1\\3&0&-1&2\\3&1&2&2\end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列的元素的余子式，则

$M_{12}-M_{22}+M_{32}-M_{42}=$ 0 .

$-A_{12}-A_{22}-A_{32}\cdot A_{42}$

2. 设 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_3&c_3\end{vmatrix}^{T}=5$，则 $\begin{vmatrix}3a_1&b_1-c_1&2c_1\\3a_2&b_2-c_2&2c_2\\3a_3&b_3-c_3&2c_3\end{vmatrix}=$ 30 .

③ $|f(A)|=f(|A|)$?

3. 三阶矩阵 A 满足 $|E+A|=0,|2E-A|=0,r(E+2A)=2$，则 $|2A-A^*|=$ $\frac{?}{2}$

4．三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=1$，属于特征值的特征向量分别是 $\bar{\alpha}_1=(1,0,-1)^T,\bar{\alpha}_2=(0,2,0)^T,\bar{\alpha}_3=(1,-1,1)^T$，则 $A^k=$ ______.

$$\begin{bmatrix}-2^{k-1}+\frac{1}{2}&0&2^{k-1}+\frac{1}{2}\\0&1&0\\2^{k-1}+\frac{1}{2}&0&-2^{k-1}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

三（总 8 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 的逆.

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&-\frac{3}{25}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

四（15 分）已知直线 $L_1:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}\right.$，直线 $L_2:\begin{cases}x+ty+2z=3s\\x+2y+sz=3s\end{cases}$，平面 $S:x+2y+2z=6$.

$\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$

1（6 分）求直线 L_1 在 S 上的投影直线.

2（9 分）根据参数 t 和 s 的取值情况，判定平面S和直线L_2的相互关系.

$t\neq2$ 相交，又 $t=2$ $s\neq2$ 时 平行 ___ $t=s=2$ 在平面内 X L_2不是直线

$s\neq2$ $t\neq2$ 相交

五（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&-5&5\\-4&4&-7\\-4&-2&5\end{pmatrix}$. 求 A 的 Q-R 分解，即求正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R，使 A=QR.

六（15 分）设线性空间

$R[x]_n=\left\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}：\text{其中每个}a_i\in\square\right\}$，$\sigma$是$R[x]_n$上的线性变换：$\sigma(f)(x)=\dfrac{df}{dx}(x)$（即函数$f$ 的导数）.

1（8分）求σ的特征多项式.

2（7分） 证明σ不可对角化.

七（15 分）设 V 是一个 n 维欧氏空间，(,) 表示 V 的内积，$\sigma\in L(V,V)$是对称变换，即对任意的$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}\in$V，都有$\left(\sigma(\vec{\alpha}),\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\alpha},\sigma(\vec{\beta})\right)$.

1（7分）证明 σ在任意一组标准正交基下的矩阵都是实对称矩阵.

2（8分）设λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n为σ的n个特征值，则对任意$\vec{\alpha}\in$V，均有$\left(\sigma(\vec{\alpha}),\sigma(\vec{\alpha})\right)\le \mathrm{M}^2\left(\vec{\alpha},\vec{\alpha}\right)$，其中$\mathrm{M}=\max\left\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\right\}$.

$(\sigma(\vec{\alpha}),\vec{\beta})=(A\vec{\alpha},\vec{\beta})=A\vec{x}^Ty^T$

取 $\alpha=\varepsilon_i$ $\beta=\varepsilon_j$

可证

$(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=a_{ij}$

$(\varepsilon_i,\sigma(\varepsilon_j))=a_{ij}$

$\alpha^TA^TA\alpha$

$P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}$

$=\alpha^T(P\Lambda P^{-1})^TP\Lambda P^{-1}\alpha$

$=\alpha^TP\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}$

$=\alpha^TP\Lambda^2P^{-1}\alpha$

$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n}$

$\vec{\alpha}=\vec{\alpha_1}+\cdots+\vec{\alpha_n}$ $\vec{\alpha_i}\in V_{\lambda_i}$

$(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))$

清华大学本科生考试试题专用纸(A 卷)

考试课程　代数与几何　2008 年 1月 8 日

（请将所有题目的答案写在试卷上，并写清题号）

一（填空题，每题 6 分，共 24 分）

1. 设 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $B^{-1}=$_.

2. 设 $A\in M_{4\times4}(\mathbb{R})$, 且 $A^*\neq 0$, $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 是方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的三个解向量, 满足 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T$, $\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3=(1,0,1,3)^T$, 则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为__.

3. 设 A,B 都是三阶矩阵. 将A的第一行的-2倍加到第三行得到三阶矩阵 A_1, 将B的第一列乘以-2后得到三阶矩阵 B_1, 若 $A_1B_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $AB=$____.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, 且 $a_i\neq a_j\,(i\neq j)$, $\vec{\beta}=\frac{1}{2}(1,1,\cdots,1)$ 为 n 维行向量, 试求 n 维行向量 $\vec{x}=$_ 使得 $\vec{x}A=\vec{\beta}$.

二（13 分）

设 a 为实数, 且平面 $\pi: x_1+2x_2-ax_3=0$ 与直线 $l:\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+ax_2+2x_3=1 \end{cases}$ 平行.

(1). 求 a 的值.

(2). 求直线 l 在平面 π 上的正交投影.

三(16 分).

令矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & c_1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & & & 0 \end{pmatrix}$,其中$c_i(1\le i\le n)$为实数.

(1). 求$\det(E-A)$的值. $1 - c_1 c_2 \cdots c_n$

(2). 求$\det(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})$的值.

四(25 分)

设三阶实对称矩阵$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)$的三个列向量满足$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3=(1,-1,1)^T$.
已知A有两个特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=-2$. 记$B=A^5-4A^3+E$.

(1). 证明$\lambda_3=1$是A的一个特征根, 且对应的特征向量为$\vec{\beta}=(1,-1,1)^T$.

(2). 验证$\vec{\beta}=(1,-1,1)^T$也是矩阵B的一个特征向量, 并求B的全部特征根和特征向量.

(3). 求矩阵B及B^k(k为正整数).

五(10 分)

设$A,B,P\in M_n(F)$,且A,B可逆. 证明:

$$r\left(A-P^TB^{-1}P\right)=r\left(B-PA^{-1}P^T\right).$$

六(12 分)

(1).设$A\in M_n(\mathbb{C})$. 若$r\left(A^m\right)=r\left(A^{m+1}\right)$对某个正整数$m$成立.

证明:$\forall k\ge 1$,有$r\left(A^m\right)=r\left(A^{m+k}\right)$.

(2).设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,且$n>m,r(A)=m$.

证明: $r\left(E_n-A^TA\right)-r\left(E_m-AA^T\right)\ge n-m$.

第 2 页共 2 页

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 几何与代数（1）　　2008 年 1 月 12 日

A 卷　　精仪 系 学号 2007010502 姓名 戴△

一．填空题（将答案填在横线上，每题 4 分，共计 32 分）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，二阶矩阵 B 满足 $AB=B-3I$，则 B 的行列式 $|B|=$ 3 .

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 2 & -4 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系是 ~~(0,0,0)^T~~ . $(2,1,-1)^T$

3．已知 $\alpha_4=(2,0,5,10)^T$ 可以由向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,2,1,2)^T$，$\alpha_3=(1,-1,2,1)^T$ 线性表示，表示式 $\alpha_4=$ $2\alpha_1+\alpha_2$.

4．三元实二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2kx_1x_3$ 当 k 满足 ~~k<0~~ $|k|<\sqrt{2}$ 时 f 正定.

5．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2，$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_3=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$，$\beta_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为 2 .

6．已知三阶实对称矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，属于它们的特征向量分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，已知 $\alpha_1=(1,1,-2)^T$，$\alpha_2=(1,1,1)^T$，则 $\alpha_3=$ $k(1,-1,0)^T\ (k\neq 0)$.

7．与矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}$ 相似的对角矩阵是 $\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -2 & \\ & & -3\end{bmatrix}$.

8．设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第二行加到第一行得到矩阵 B，对 B 作一次初等列变换得到矩阵 C，已知 A 和 C 相似，对 B 所作的初等变换是 ~~将B的第二列加到第一列~~ .

~~将B的第一行加到第二行~~

即右乘矩阵

~~即右乘矩阵~~

将第二列的 −1 倍加到第一列

即右乘矩阵 [ ]

二. 计算题（每题 12 分，共计 48 分）

9．在直角坐标系下，光线从 $A(2,1,2)$ 点射至镜面上的 $C(1,1,0)$ 点，设镜面方程是 $x-y+z=0$，试求反射光线所在的直线的对称（标准）方程.

10．设 σ 是 3 维线性空间 R^3 上的线性变换，$\sigma(x_1,x_2,x_3)^T=(2x_2+x_3,x_1-2x_2,2x_1)^T$，$\alpha_1=(0,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,0)^T$ 是 R^3 的一个基，求线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵. 又设 $\alpha=(2,1,3)^T$，求 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

11．已知 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&k&1\end{pmatrix}$ 与对角矩阵相似，(1)求参数 k；(2)求可逆矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$，求 A^{2008}.

12．已知三元二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2，其中 a 为实常数，求当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 时，上述三元二次齐次函数 f 的值域.

三. 证明题（13 题 12 分，14 题 8 分）

13．已知 β_1,β_2,β_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关的解，

（1）证明其导出组 $Ax=0$ 至少有两个线性无关的解；

（2）若非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\2x_1+x_2+3x_3-3x_4=-1\\ax_1+2x_2+bx_3-4x_4=0\end{cases}$$

其中 a,b 为常数，已知它有三个线性无关的解，则方程组的系数矩阵 A 的秩是多少？证明你的结论；

（3）试求出（2）中方程组的三个线性无关的解.

14．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&5&1&0\\5&0&5&0\\1&5&0&5\\0&0&5&0\end{pmatrix}$，不求 A 的特征值，证明 A 有两个正的特征值和两个负的特征值.

二列

清华大学本科生考试试题专用纸

A卷

考试课程 几何与代数（1）　　2009年1月7日

班号________学号________姓名________

一．填空题（请将答案直接填在横线上，每题5分，合计40分）

1．设R^4的3维子空间W的两组基分别为$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,0,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,1,0)^T$及$\beta_1=(2,1,1,0)^T$，$\beta_2=(0,1,1,2)^T$，$\beta_3=(1,3,3,1)^T$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵是________________.

2．设$\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,2,3)^T$，矩阵$A=\alpha\beta^T$，A的全部特征值为__________.

3．两条异面直线$L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$，$L_2:\begin{cases}x=-2-4t\\ y=2+t\\ z=3+2t\end{cases}$的距离是________.

4．设3阶实对称方阵A的特征值1的特征向量为$X_1=(1,0,1)^T$，特征值2的特征向量为$X_2=(1,1,-1)^T$，则特征值3的特征向量为________________.

5．设$\alpha,\beta\in R^n$，$\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，$\beta=(2,2,\cdots,2)^T$，则$\left|E_n-\alpha\beta^T\right|=$__________.

6．设A^*是n阶可逆方阵A的伴随矩阵，A的特征值是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则$A^*$的特征值是________________.

7．已知A相似于$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$，则$A$的秩与$A-2E$的秩的和$r(A)+r(A-2E)=$__________.

8．设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，试判断$A$与$B$是否相抵，相似，

你的结论是______________________.

9. 设A是3阶矩阵，已知α是A的属于特征值λ的一个特征向量，B是与A相似的矩阵，且$B=P^{-1}AP$，则____________是B的属于特征值λ的一个特征向量.

10. 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_3$的规范形为______________.

二. 解答题（第11，12，13题各15分，14题7分，15题8分，合计60分）

11. 已知R^3的两个基分别为$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\varepsilon_2=(0,\ 1,\ 1)^T$，$\varepsilon_3=(0,\ 1,\ 0)^T$和$\eta_1=(1,\ -1,\ 0)^T$，$\eta_2=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\eta_3=(0,\ 0,\ 1)^T$，

（1） 设σ是R^3上的线性变换，已知σ在基η_1,η_2,η_3下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

求σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵.

（2）设$\alpha=(1,\ -1,\ 1)^T$，求$\sigma(\alpha)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标.

12. 设三元二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2+ax_3^2-x_2x_3$的秩为2，

（1）求参数a；

（2）求正交矩阵Q，作正交替换$X=QY$，化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形；

（3）指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面.

13. 设齐次线性方程组$(n\geq 2)$

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2=0,\\ bx_1+ax_3=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ bx_1+ax_n=0,\end{cases}$$

其中$b\neq 0$. 试讨论a,b取何值时，该方程组只有零解；a,b取何值时，有非零解，并在有非零解时，求方程组的通解.

14. 设A是n阶方阵，已知齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，若$\beta$不是方程组$Ax=0$的一个解，试证明向量组$\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$线性无关.

15. 设A是n阶可逆实矩阵，试证明

（1）A^TA是正定矩阵；

（2）A可分解为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积，即$A=QS$，其中Q是正交矩阵，S是正定矩阵.

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　《几何与代数 1》期末考试　(A 卷)

2010 年 1 月 13 日

一、填空题（每空 5 分，共 40 分）

1. 设 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，则 $P_1^4AP_2^5=$________.

2. 设 $\mathbb{R}^3$ 的两组基分别为 $B_1=\{\vec{\alpha},\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3\}$，$B_2=\{\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3\}$，其中

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\vec{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\vec{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\vec{\beta}_3=\begin{bmatrix}-1\\-5\\1\end{bmatrix}.$$

则基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵为________________；若 $\vec{\gamma}$ 在基 B_1 下的坐标为

$\vec{\gamma}_{B_1}=(1,2,1)^T$，则 $\vec{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标为 $\vec{\gamma}_{B_2}=$________________.

3. 设 3 阶方阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

$B=$________________.

4. 设 $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{R})$，满足 $A_{ij}=a_{ij}$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $(1\leqslant i,j\leqslant 3)$，即 $A^T=A^*$，并且 $a_{11}\neq 0$. 则 $|A|=$____________.

5. $\mathbb{R}^3$ 中，若直线 L_1 过点 $(-7,1,13)$，且 L_1 与平面 $3x+z-2=0$ 垂直，直线 L_2 的方程为 $\begin{cases}x=t-2\\y=6\\z=-t+5\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$，则 L_1 与 L_2 的位置关系为____________(重合，相交，平行或异面)；而 L_1 与 L_2 的距离为____________.

6. $\det\begin{bmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{bmatrix}=$____________(用 a,b,c,d 表示结果).

二、计算题（第 1 题 12 分，第 2 题 16 分，共 28 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&2&0\\0&0&0&1&1\\1&2&3&0&0\\3&3&2&0&0\\-1&0&1&0&0\end{bmatrix}\in M_5(\mathbb{R})$，试求 A^{-1}.

2. 设 4 阶实对称阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

(1). 求 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$;

(2). 求正交阵 Q，使得 $Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$.

三、证明与解答题（第 1 题 14 分，第 2 题 12 分，第 3 题 6 分，共 32 分）

1. 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $m\leqslant n$,, $U=(\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_m)\in M_m(\mathbb{R})$, $V=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)\in M_n(\mathbb{R})$ 为两个正交矩阵，且

$$U^TAV=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0&\cdots&0\\&\ddots&&\vdots&&\vdots\\&&\lambda_m&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

若 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_m=0$. 证明:

(1). $\{\vec{v}_{r+1},\cdots,\vec{v}_n\}$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间 $N(A)$ 的一组标准正交基;

(2). $\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_r\}$ 是矩阵 A 的列空间 $R(A)$ 的一组标准正交基.

2. 设 $V(F)$ 为线性空间，$\dim V=l$, $\sigma\in L(V,V)$，且对某个 $\lambda\in F$，有 $(\sigma-\lambda I)^l=\theta$ (零变换), 但 $(\sigma-\lambda I)^{l-1}\neq\theta$.

(1). 证明 $\exists\vec{\alpha}\in V$，使得向量组 $\{\vec{\alpha},(\sigma-\lambda I)(\vec{\alpha}),\cdots,(\sigma-\lambda I)^{l-1}(\vec{\alpha})\}$ 为 V 的一组基;

(2). 求 σ 在上述基（(1) 中所证）下的矩阵表示;

(3). 证明 σ 不可对角化.

3. 设 V 为域 F 上 n 维线性空间，$\sigma\in L(V,V)$，且 σ 在某基下的矩阵表示为对角阵。令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为 σ 的全部互异的特征值。证明：存在 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\in L(V,V)$，使得

(1). $\sigma_i(V)=V_{\lambda_i}$，其中 V_{λ_i} 表示属于 λ_i 的特征子空间 $(1\leqslant i\leqslant m)$.

(2). $\sigma=\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_m\sigma_m$.

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程: 线性代数（1）A 卷　　　2012年 1 月 4 日

~~汽车~~系: 汽车系 班:汽11 姓名: 孙志涛 学号: 2011010710

一． 填空题（将答案填在下面的空格内，每题4分，合计32分）

1. n阶方阵A满足$(A+I)^m=0$, 则$|A|=$(　　　　).

2. 过点$A(2,-1,4)$ 平行于向量$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(0,1,2)$ 的平面方程是(　　　　　　　　).

3. 向量$\alpha_1=(4,1,2),\alpha_2=(6,2,9),\alpha_3=(6,3,3)$是否共面? (　　　　　　　　)..

4. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的列空间的维数为(　　　　　　　　).

5. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的全部特征值为(　　　　　　　　).

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$的QR-分解为(　　　　　　　　).

7. 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_3$ 的规范型为(　　　　　　　　).

8. 参数a满足(　　　)时,三元实二次型$x_1^2+ax_1x_2+x_2^2+x_3^2$是正定二次型.

二. 计算和证明题.

9.(10分）确定参数λ，使齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0 \\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0 \end{cases}$
解空间的维数最大，并在这种情况下求解这个线性方程组.

10.(15分）我们用D表示次数小于$n(n\geq 3)$的多项式（包括零多项式）所构成的向量空间$R_n[x]$上的微分变换. 证明
（1）对于任何正整数$r, 1\leq r\leq n$, D有r维不变子空间.
(2) 写出D^2在$R_n[x]$的某组基下的矩阵.
（3)求 $ImD^2\cap kerD^2$.

11.(15分）设R^4上的线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
(1). 求σ在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$下的矩阵.
(2). 设向量γ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$(1,2,3,4)$. 求$\sigma(\gamma)$在 基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$下的坐标.

12. (10分）确定分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$的特征值的几何重数和代数重数.

13。(10分）设$A,B,A+B$均为可逆矩阵。证明$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵。

14. (8分）一个3×3的矩阵如果满足：每行元素的和、每列元素的和、每个对角线上元素的和都相等，则称为一个幻方。这个共同的和称为幻方的幻数。例如，矩阵$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$就是一个幻方，其幻数为15.
(1) 证明：所有幻方的集合对于普通矩阵加法和数量乘法构成 R 上的一个线性空间。
(2) 找出此线性空间的一组基，并确定此线性空间的维数。

几何与代数(1) 考试样题一

一．填空题（将答案填在下面的空格内，每题 4 分，合计 32 分）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & a & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，已知 B 为 3 阶非零矩阵，满足 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ ________.

2．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则矩阵 AB 的全体特征值为__________.

3．在 R^3 中，已知从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，则从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵是______________________.

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 相似，则 A 的行列式 $|A|=$_____.

5．在直角坐标系中，已知平面 π 过点 $(1,1,0)$，$(0,0,1)$，$(0,1,1)$，则与平面 π 垂直且过点 $(1,1,1)$ 的直线的对称方程（标准方程）是_________________.

6．设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，η_1,η_2,η_3 为 $Ax=b$ 的 3 个解，已知 $\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,0,1,3)^T$，则 $Ax=b$ 的通解为________________________________.

7．将 3 阶可逆矩阵 A 的第 1 列与第 3 列交换，然后将所得矩阵的第 1 列的 -2 倍加到第 2 列，得到矩阵 B，则矩阵 $A^{-1}B=$ ______________.

8．$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3=1$ 表示的二次曲面是________________.

二．计算题（每题 18 分，合计 54 分）

9．设 3 阶实对称矩阵 A 有 3 个特征值 $3,3,-3$，已知属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$，求矩阵 A 及 A^{-1}．

10．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基，σ 是 V 上的线性变换，已知 $\sigma(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，$\sigma(\alpha_3)=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$，

（1） 求线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵；

（2） 设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $X=(0,-1,2)^T$，求 $\sigma(\gamma)$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标．

11．设 n 元($n\geq 4$)齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+bx_4+\cdots+bx_n=0\\ bx_1+ax_2=0\\ bx_1+ax_3=0\\ -bx_1+ax_4+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $b\neq 0$．试讨论 a,b,n 取何值时，方程组只有零解；取何值时，方程组有非零解？在有非零解时，写出方程组的基础解系．

三．证明题（第 12 题 8 分，第 13 题 6 分）

12．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，β 是 m 维非零列向量，已知 β 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，试证明

（1） $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关；

（2） $Ax=b$ 的解集合的极大线性无关组含有 $r+1$ 个向量．

13．设 A 为任意 n 阶实反对称矩阵（即 $A^T=-A$），试证明 $I-A^2$ 是正定矩阵．

几何与代数(1)考试样题二

一．填空题（将答案填在空格内．每空 4 分，合计 40 分）

1． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ = __________________ ．

2． 设 A,B 都是 3 阶矩阵，满足 $AB = 2A + B$，已知行列式 $|A - I|$=1，则行列式

$|B - 2I|$=_______ ．

3． 设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第一行的 -2 倍加到第三行，再将第二行和第三行对换，得到

矩阵 B，则 $BA^{-1} =$ __________________ ．

4． 过点 $(3,\ 2,\ 1)$ 与直线 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{0} = z$ 平行且与平面 $x - y + z + 1 = 0$ 垂直的平面的方程为

________________________________ ．

5． 设 R^3 上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，当 $a =$______ 时，向量

组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性相关．

6． 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵 A 与矩阵 B 相似，则秩 $r(AB - A) =$ __________ ．

7． 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & a \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$，则 $a =$ ________ ．

8． 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 R^3 上的向量，其中 α_1, α_2 线性无关，已知 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$，
且 $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$， $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解

是____________________________ ．

9．设 A 是3阶矩阵，已知 α 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，B 是与 A 相似的矩阵，且 $B=P^{-1}AP$，则________________是 B 的属于特征值 λ 的一个特征向量.

10．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_3$ 的规范形为______________________.

二．解答题（第11，12，13题各15分，14题7分，15题8分，合计60分）

11．已知 R^3 的两个基分别为 $\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\varepsilon_2=(0,\ 1,\ 1)^T$，$\varepsilon_3=(0,\ 1,\ 0)^T$ 和 $\eta_1=(1,\ -1,\ 0)^T$，$\eta_2=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\eta_3=(0,\ 0,\ 1)^T$，

（1） 设 σ 是 R^3 上的线性变换，已知 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

（2）设 $\alpha=(1,\ -1,\ 1)^T$，求 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标.

12．设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\dfrac{1}{2}x_2^2+ax_3^2-x_2x_3$ 的秩为2，

（1）求参数 a；

（2）求正交矩阵 Q，作正交替换 $X=QY$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形；

（3）指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

13．设齐次线性方程组 $(n\geq 2)$

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \qquad bx_1+ax_2=0,\\ \qquad bx_1+ax_3=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad bx_1+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $b\neq 0$．试讨论 a,b 取何值时，该方程组只有零解；a,b 取何值时，有非零解，并在有非零解时，求方程组的通解.

14．设 A 是 n 阶方阵，已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，若 β 不是方程组 $Ax=0$ 的一个解，试证明向量组 $\beta,\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_t+\beta$ 线性无关.

15．设 A 是 n 阶可逆实矩阵，试证明

（1）A^TA 是正定矩阵；

（2）A 可分解为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积，即 $A=QS$，其中 Q 是正交矩阵，S 是正定矩阵.