清华大学本科生考试试题专用纸

一. 填空题（请将答案答在此卷的空格上，每题4分，共32分）

1.设V为3维的线性空间，σ为V上的线性变换，假设σ在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，则包含$\alpha_2$的$\sigma$的最小不变子空间是______________.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维的列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且$|A|=1$，令$B=(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$，则$|B|=$______________.

3. 设A为$m\times n$矩阵，A的秩$r(A)=r$，B为n阶矩阵满足$AB=0$，则B的秩$r(B)$的取值范围是______________.

4. 设n阶矩阵A的各行元素之和为常数c，则A^3的各行元素之和为_____.

5. 设$W=L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix})$为$R^3$的子空间，$W$在$R^3$中的正交补$W^\perp$ $=$ __________.

6. 设A是2阶矩阵，$|A|=0$，且A的代数余子式满足$A_{11}=1$，$A_{22}=2$，则A的伴随矩阵A^*的两个特征值分别是______________.

7. 设实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$通过正交线性替换化为标准形$Q(\alpha)=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$，则$a=$______________.

8. 在直角坐标系中，异面直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$和$x-1=y+1=z-2$的距离为______________.

二. 计算题和证明题（共68分）

1. (20分）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$为线性空间$V$上的线性变换$\sigma$在$V$的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的矩阵，分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$，$\ker(\sigma)$, $\mathrm{Im}(\sigma)+\ker(\sigma)$ 的基.

2. （12分）设$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求正交线性替换将实二次型化为标准型.

3. (16分）设V为数域K上的3 维线性空间，σ是V上的一个线性变换，σ在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$，

（1）求σ在基$\eta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3, \eta_2=3\alpha_2-\alpha_3, \eta_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$下的矩阵；

（2）求A的全部特征值和特征向量。

4. （10分）设A 是$m\times n$ 实矩阵，I 是单位矩阵。已知$B=\lambda I+A^TA$. 证明当$\lambda>0$时，矩阵B正定.

5. （10分）设σ为实线性空间V上的线性变换，且$\sigma^2=-\varepsilon$，ε表示恒等变换. 证明：V的维数$\dim V$为偶数，且存在V的一组基，使σ在这组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.