2011-2102 学年秋季学期线性代数试题

一、填空题（将答案填在下面的空格内，每题 4 分，合计 32 分）

1. n阶方阵A满足$\left(A+I\right)^m=0$，则$|A|=$（　　　　　）

2.过点$A\left(2,-1,4\right)$平行于向量$\alpha_1=\left(1,-1,1\right),\alpha_2=\left(0,1,2\right)$的平面方程是（　）

3.向量$\alpha_1=\left(4,1,2\right),\alpha_2=\left(6,2,9\right),\alpha_3=\left(6,3,3\right)$是否共面？（　　　　　　）

4.矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的列空间的维数为（　　　　　　　　）

5.矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的全部特征值为（　　　　　　　　　　）

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$的$QR$分解为（　　　　　　　）

7.实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_3$的规范型为（　　　　）

8.参数a满足（　　　）时，三元实二次型$x_1^2+ax_1x_2+x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型。

二、计算和证明题

9.（10 分）确定参数λ，使齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0 \\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0 \end{cases}$

解空间的维数最大，并在这种情况下求解这个线性方程组。

10.(15 分)我们用D表示次数小于$n(n\geq 3)$的多项式（包括零多项式）所构成的向量空间$R_n\left[x\right]$上的微分变换。证明

（1）对于任何正整数$r, 1 \le r \le n, D$有r维不变子空间。

（2）写出D^2在$R_n[x]$的某组基下的矩阵。

（3）求$\operatorname{Im} D^2 \cap \ker D^2$

11.（15 分）设R^4上的线性变换σ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

（1） 求σ在基$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$下的矩阵。

（2）设向量γ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha$下的坐标为（1,2,3,4）。求$\sigma(\gamma)$在基

$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_4+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$下的坐标。

12.（10 分）确定分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$的特征值的几何重数和代数重数。

13.（10 分）设$A, B, A+B$均为可逆矩阵。证明$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵。

14.（8 分）一个3×3的矩阵如果满足：每行元素的和、每列元素的和、每个对角线上元素的和都相等，则称为一个幻方。这个共同的和称为幻方的幻数。

例如，矩阵$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$就是一个幻方，其幻数为 15。

（1）证明：所有幻方的集合对于普通矩阵加法和数量乘法构成 R 上的一个线性空间。

（2）找出此线性空间的一组基，并确定此线性空间的维数。