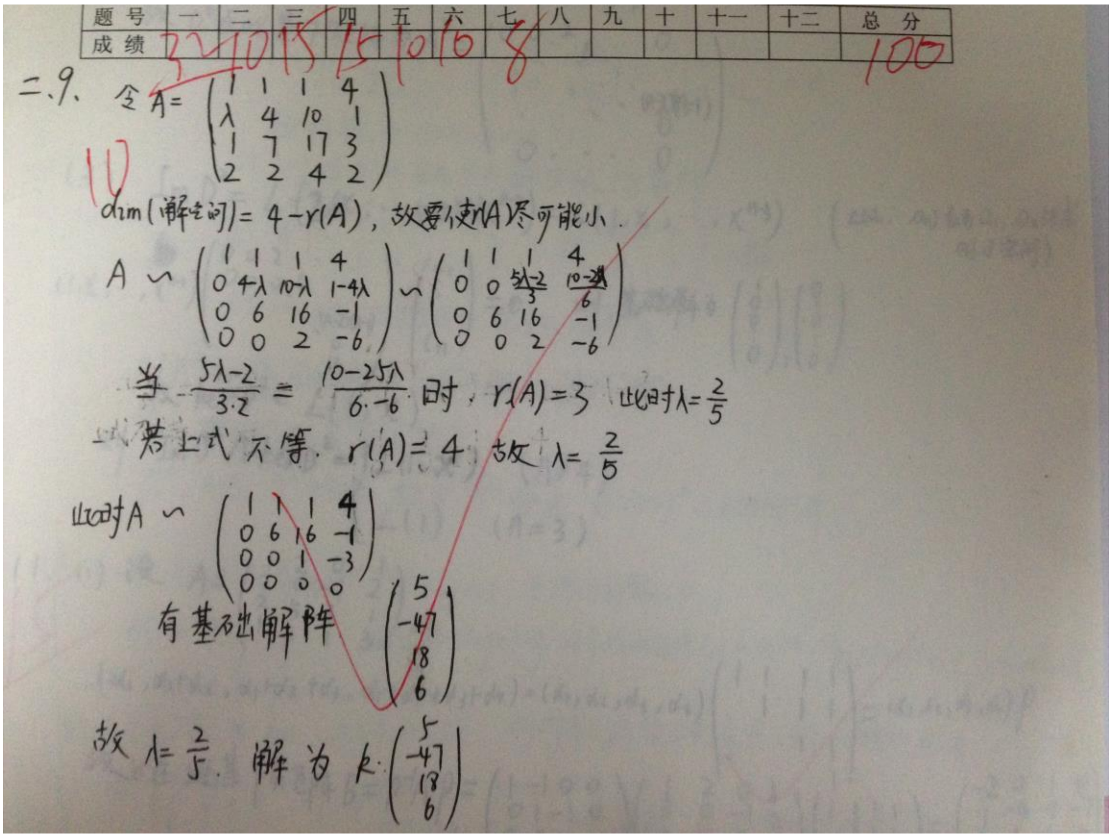
填空

1. $(-1)^n$;　　　2. $3x+2y-z=0$;　　　3. 不共面

4．3;　　　5．2，$2\pm\sqrt{2}$

6．$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{7\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$

7. ${y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$;　　　8. $-2<a<2$



题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总分
成绩	32	10	15	15	10	10	8						100

二.9. 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

11

$\dim$(解空间) $=4-r(A)$，故要使 $r(A)$ 尽可能小.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & 10-\lambda & 1-4\lambda \\ 0 & 6 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5\lambda-2}{3} & \frac{10-25\lambda}{6} \\ 0 & 6 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

当 $\frac{5\lambda-2}{3\cdot 2}=\frac{10-25\lambda}{6\cdot -6}$ 时，$r(A)=3$ 此时 $\lambda=\frac{2}{5}$

若上式不等. $r(A)=4$ 故 $\lambda=\frac{2}{5}$

此时 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有基础解阵 $\begin{pmatrix} 5 \\ -47 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

故 $\lambda=\frac{2}{5}$. 解为 $k\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -47 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

10.(1) 设 D_r 表示小于 r ($r\le n$) 的多项式所构成的向量空间上的微分变换

$V_r = \mathrm{Im}\,D_r \subset V$，

对 $f\in V_r$，设 $f=a_0+a_1x+\cdots+a_{r-1}x^{r-1}$

$D_rf = f' = a_1+2a_2x+\cdots+(r-1)a_{r-1}x^{r-2}\in V_r$

同理 $D_r(f+g)=D_rf+D_rg$，$D_r\cdot kf = kD_rf$，故 D_r 为 D 的不变子空间

15

而基 $1,x,x^2,\cdots,x^{r-1}$ 线性无关

且 $f=(1,x,\cdots,x^{r-1})\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_{r-1}\end{pmatrix}$ 故 $\dim V_r=r$.

故 D_r 即为 r 维不变子空间，即 D 有 r 维不变子空间

(2) 取基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$

$D(x^r)=r\cdot x^{r-1}$

故 D 在上述基下矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&&&0\\ &0&2&&\\ &&\ddots&\ddots&\\ &&&&n-1\\ 0&&&&0\end{pmatrix}=A$

故 D^2 在此基下矩阵为 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&2&&&0\\ \vdots&&\ddots&6&&\\ \vdots&&&\ddots&\ddots&\\ &&&&&(n-2)(n-1)\\ &&&&&0\\ 0&\cdots&&&\cdots&0\end{pmatrix}$

(3) $\mathrm{Im}\,D^2=L(2,6x,\cdots,(n-2)(n-1)x^{n-3})=L(1,x,\cdots,x^{n-3})$ （$L(a_1,\cdots,a_n)$ 表示 $a_1,\cdots,a_n$ 张成的子空间）

$(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}0&0&2&\cdots&&\\ 0&0&0&6&&\\ &&&\ddots&&\\ &&&&&(n-2)(n-1)\\ &&&&&0\\ &&&&&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=0$，则基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

故 $\ker D^2=L(1,x)$

则 $\mathrm{Im}\,D^2\cap\ker D^2=\begin{cases}L(1,x) & (n\geq 4)\\ L(1) & (n=3)\end{cases}$

11.(1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$

15

$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ &1&1&1\\ &&1&1\\ &&&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$

故 σ 在上述基下矩阵 $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ &1&1&1\\ &&1&1\\ &&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}$

(2) $\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$

$= (-\alpha_1) + (-1)(\alpha_1+\alpha_2) - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + 4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$

γ 在 $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 下坐标为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$。

$\sigma(\gamma)$ 坐标为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$。

12. $A = \begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & & & & & -B \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda-1 & & & \\ & & & \lambda+1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^m(\lambda+1)^n$

$\lambda=1$ 时. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} 0 & -B \\ 0 & 2I_n \end{vmatrix}$, $r\begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix} = n$

基础解系 $= n+m-n = m$

故 $\lambda=1$ 的几何重数与代数重数均为 m

$\lambda=-1$ 时. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} -2I_m & -B \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $r\begin{pmatrix} -2I_m & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = m$

故 $\lambda=-1$ 时几何重数与代数重数均为 n.

13. $A(A^{-1}+B^{-1}) = I + AB^{-1} = BB^{-1} + AB^{-1} = (A+B)\cdot B^{-1}$

故 $A^{-1}+B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$

A^{-1}, $A+B$, B^{-1} 均可逆, 故 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆 且. $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$

14. 设 $A = \{a_{ij}\}_{(1\le i,j\le n)}$ $B = \{b_{ij}\}_{(1\le i,j\le n)}$ 幻数分别为 a, b

$A+B = \{a_{ij}+b_{ij}\}$. 设 $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. 则 $c_{11}+c_{12}+c_{13} = a+b = c_{11}+c_{21}+c_{23} = \cdots = c_{11}+c_{22}+c_{33}$

故 $A+B$ 亦为幻方.

易知 kA 幻数为 ka., kA 亦为幻方. 则所有幻方集合构成 R 上的一个线性空间

(2) 设 $\begin{pmatrix} a & s & t \\ p & d & q \\ b & r & c \end{pmatrix}$ 则 $p = c+d-b$, $r = a+d-b$

$t = a+c-b$. $s = b+d-a$, $q = a+d-t = b+d-c$

而 $s+d+r = 3d = a+d+c$, $p+d+q = 3d = a+d+c$. 故 $d = \frac{a+c}{2}$

即原矩阵可化为 $\begin{pmatrix} a & \frac{-a+2b+c}{2} & a+c-b \\ \frac{a-2b+3c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+2b-c}{2} \\ b & \frac{3a-2b+c}{2} & c \end{pmatrix}$ 验算知左式即为幻方。且任一幻方可表为左式的形式

故 一组基为

$$\text{上式} = a\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 为一组基，维数为3.