

## 2011-2012秋季线性代数期末试题

考试课程      线性代数      A卷      2013年1月4日

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_

注: 填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (30分) 填空题(每小题3分):

- (1) 设 $A$ 是一个 $m \times n$ 阶矩阵,  $B$ 是一个 $n \times s$ 阶矩阵,  $r(A) = n$ ,  $r(B) = r$ , 则 $\dim N(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (2) 设 $A$ 和 $B$ 是可逆矩阵, 则分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- (3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 且 $A$ 与 $B$ 相似, 则 $x, y = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (4) 设 $a_1, a_2, a_3$ 是 $\mathbf{R}^4$ 中相互正交的单位向量, 矩阵 $P = I_4 - (a_1 a_1^T + a_2 a_2^T + a_3 a_3^T)$ 的全部特征值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (写明重数).
- (5) 设 $A, B$ 是两个 $n$ 阶矩阵, 且 $AB = 0$ ,  $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 无公共非零解, 则 $r(A) + r(B) \underline{\hspace{1cm}} n$ (填写 $<$ ,  $>$ 或 $=$ ).
- (6) 关于一元函数 $y = y(t)$ , 二阶微分方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$ 的通解(complete solution)是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- (7) 设4阶矩阵 $A$ 与 $B$ 相似,  $I$ 是4阶单位阵,  $A$ 的特征值是1, 1, 2, 2, 则 $|B^{-1} + I| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (8) 补齐2阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ 的第二行元素, 使 $A$ 有特征向量 $x_1 = (3, 1)$ 和 $x_2 = (2, 1)$ .
- (9) 设 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 与 $S$ 交换的3阶矩阵全体形成的向量空间维数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- (10) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_1$ 是 $A$ 的第一列形成的1维空间上的投影矩阵,  $P_2$ 是 $A$ 的列空间上的投影矩阵, 则 $P_2 P_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. (10分) 设 $a, b, c, d$ 为不全为0的实数, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix}$ ,

求 $A$ 的特征值和相应特征子空间。

3. (12分) 设 $A$ 是一个 $m \times n$ 阶矩阵, 假设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 解集为 $S$ .

(1) 证明:  $S$ 中的解向量在 $A$ 的行空间 $C(A^T)$ 上的投影均相等(记作 $\mathbf{x}_{row}$ );

(2) 证明:  $\mathbf{x}_{row}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的长度最小的解;

(3) 假设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ , 求 $\mathbf{x}_{row}$ .

4. (12分)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 16 \\ 5 & 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

求 $A$ 的四个基本子空间的基.

5. (10分) 给定两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 满足 $a_1 = 1, b_1 = -1, a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$ .

(1) 定义 $u_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ , 求矩阵 $A$ 使得 $u_{k+1} = Au_k$ .

(2) 求 $A$ 的特征值和 $a_n$ 和 $b_n$ 的通项公式.

6. (12分) 给定 $\mathbb{R}^2$ 上3个点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ .

(1) 设最小二乘意义下拟合这三个点的最佳曲线是 $y = C + Dx$ , 证明这条直线过平均值点 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ ;

(2) 令 $e_i = y_i - (C + Dx_i), i=1,2,3$ . 证明 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ .

(3) 假设三个点是 $(-2, 1), (0, 2), (2, 4)$ , 验证以上结论.

7. (14分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{pmatrix}$ , 其中 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ .

(1) 假设 $A$ 的秩为2, 求 $A$ 的列空间(column space) $C(A)$ 的一组标准正交基(写出计算公式即可);

(2) 求 $A$ 的QR分解 $A = QR$ ;

(3) 具体写出 $R$ 不可逆的条件;

(4) 假设 $A$ 的秩为2,  $b \in \mathbb{R}^4$ , 证明 $b$ 在 $C(A)$ 上投影是 $QQ^T b$ .