考试课程　线性代数（1）　　2016年1月6日　　（**A 卷**）

系、班____________________ 姓名_______________ 学号_______________

一、填空题（每题4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. 设$\alpha=(4,-1,5)$，$\beta=(1,2,3)$，$\gamma=(3,1,1)$为一右手直角坐标系中的三个向量，则混合积$(\beta,\alpha,\gamma)=$______________.

2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$为欧几里得空间$V$的一组标准正交基，则$W=L(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2)$的正交补$W^{\perp}=$_______________.

3. 设$A=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$，$n$为正整数，则$A^n=$___________________.

4. 线性方程组$\begin{bmatrix}a&1&1\\0&b&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$有解的充分必要条件是：__________.

5. 设A,B为n阶矩阵，其中A可逆，则矩阵$\begin{bmatrix}A&B\\B^T&B^TA^{-1}B\end{bmatrix}$的秩为：__________.

6. 下面选项中既相似又相合于$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$的矩阵为：_______________.

（1）$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}0&0&3\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

7. 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_2x_3$的规范形为：_______________.

8.设V为3维的线性空间，σ为V上的线性变换，假设σ在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&0\\3&5&1\end{pmatrix}$，则包含$\alpha_3$的$\sigma$的最小不变子空间是_______________.

9. 已知右手直角坐标系中一点$A(0,1,-1)$, 及两个平面$\pi_1: -x+4y+2=0$, $\pi_2: x+2y+3z=0$, 则过点A且同时平行于π_1和π_2的直线的标准方程为：____________________.

二、计算题和证明题（共64分）

10.（16分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一.

(1) 求a的值；

(2) 求一正交矩阵Q使得$Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

11. (14分) 设F为一数域，在F^3上定义线性变换$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ -x_1-2x_3 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}$，分别求$\mathrm{Im}(\sigma)$，$\ker(\sigma)$ 的基.

12. (14 分) 在数域F上的线性空间$M_2(F)$中分别取基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\varepsilon_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和基

$$\eta_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\eta_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)求基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵；

(2)求$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

13. (12分) 设A为m阶正定矩阵，B是$m\times n$的实矩阵. 证明B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是$r(B)=n$.

14. （8分）设$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 证明$A$ 可以相似对角化.