清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程: 线性代数（1） A 卷　　　　2012年 1 月 4 日

系:　　　　班:　　　　姓名:　　　　学号:

一．填空题（将答案填在下面的空格内，每题4分，合计32分）

1. n阶方阵A 满足$(A+I)^m=0$, 则$|A|=$ (　　　　　).

2. 过点$A(2,-1,4)$ 平行于向量$\alpha_1=(1,-1,1), \alpha_2=(0,1,2)$ 的平面方程是 (　　　　　　　　　　).

3. 向量$\alpha_1=(4,1,2), \alpha_2=(6,2,9), \alpha_3=(6,3,3)$ 是否共面? (　　　　　　　　　)..

4. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的列空间的维数为 (　　　　　　　).

5. 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的全部特征值为 (　　　　　　　　　　).

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$的QR-分解为 (　　　　　　　　　　　　).

7. 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_3$ 的规范型为 (　　　　　　　　　　).

8. 参数a满足(　　　　　)时, 三元实二次型$x_1^2+ax_1x_2+x_2^2+x_3^2$是正定二次型.

二. 计算和证明题.

9.(10分）确定参数λ， 使齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \\ \lambda x_1+4x_2+10x_3+x_4=0 \\ x_1+7x_2+17x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 解空间的维数最大， 并在这种情况下求解这个线性方程组.

10.(15分） 我们用D表示次数小于$n(n\geq 3)$的多项式（包括零多项式）所构成的向量空间$R_n[x]$ 上的微分变换. 证明

（1）对于任何正整数$r, 1\leq r\leq n, D$有r维不变子空间.

(2) 写出D^2在$R_n[x]$的某组基下的矩阵.

（3)求 $ImD^2\cap kerD^2$.

11.(15分） 设R^4上的线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1). 求σ在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$下的矩阵.

(2). 设向量γ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$(1,2,3,4)$. 求$\sigma(\gamma)$在 基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$下的坐标.

12. (10分）确定分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & B \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$的特征值的几何重数和代数重数.

13。(10分）设$A,B,A+B$均为可逆矩阵。证明$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵。

14. (8分）一个 3×3 的矩阵如果满足：每行元素的和、每列元素的和、每个对角线上元素的和都相等，则称为一个幻方。这个共同的和称为幻方的幻数。例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ 就是一个幻方，其幻数为 15.

(1) 证明：所有幻方的集合对于普通矩阵加法和数量乘法构成 R 上的一个线性空间。

(2) 找出此线性空间的一组基，并确定此线性空间的维数。