答案：

一、填空题

1.$(-1)^n$

2.$3x+2y-z=0$

3. 不共面

4.3

5.$2,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}$

6.$Q=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 4/\sqrt{5}\\ 0 & 7/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

7.$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

8.$-2<a<2$

二、解答题

9.解：原方程写成矩阵形式即

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 2\end{bmatrix}X=0$$

记系数矩阵为 A. 容易验证，由第 1，2，4 行及 1，2，3 构成的 3×3 子阵的行列式不为零，故$\mathrm{rank}(A)\geq 3$. 故解空间的维数至多为 4-3=1 维。这种情况在 det(A)=0 时出现。此时，可以解得$\lambda=\frac{2}{5}$，方程组的解围$X=k\,[5,-47,18,6]^T, k\in R$.

10.(1) 取$V=L(1,x,\dots,x^{r-1}), 1\leq r\leq n$，则有$\dim V=r$. 易知 V 是$R_n[x]$的子空间。任取$a=\sum_{i=0}^{r-1}c_ix^i\in V$，则有$Da=\sum_{i=1}^{r-1}ic_ix^{i-1}\in V$，故 V 是 D 的不变子空间。

(2) 取一组基$\{1,x,\dots,x^{n-1}\}$，则不难知道

$$D^2(1,x,\dots,x^{n-1})=(1,x,\dots,x^{n-1})\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\times 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\times 3 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)(n-1)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

(3)易知$\ker D^2=L(1,x), ImD^2=L(1,x,\dots,x^{n-3})$. 则有

$n=3$时，$\ker D^2\cap ImD^2=L(1)$，为所有的常数构成的集合。

$n\geq 4$时，$\ker D^2\cap ImD^2=L(1,x)$,为所有次数不超过一次的多项式构成的集合。

11.解：(1)

记$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\end{cases}$，则我们有$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

记上面的转移矩阵为 T，σ在$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$下的矩阵为 A. 则可知 σ在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$下的矩阵为

$$T^{-1}A\,T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{bmatrix}.$$

(2)$\sigma(\gamma)$在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$的坐标从下面式子导出

$\sigma(\gamma)=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)T^{-1}A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}.$

故$T^{-1}A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-17\\5\\20\end{bmatrix}$为其在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$下的坐标。

12.解：记$M=\begin{bmatrix}I_m & B\\ O & -I_n\end{bmatrix}$，则可知$\det(\lambda I_{m+n}-M)=(\lambda-1)^m(\lambda+1)^n$.

故特征根为1 与 -1，其中 1 的代数重数为 m，-1的代数重数为 n.

当$\lambda=1$时，$\lambda I_{m+n}-M=\begin{bmatrix}O & -B\\ O & 2I_n\end{bmatrix}$，秩为 n,故基础解系个数为 m，即几何重数亦为 m.

类似可得，当$\lambda=-1$时，几何重数和代数重数相同,均为 n.

13.解：记$X=A^{-1}+B^{-1}$，则

$$\det(A)\det(X)\det(B)=\det(AXB)=\det(A+B)$$

故 $\det(X)=\frac{\det(A+B)}{\det(A)\det(B)}$. 由于A, B, 及 $A+B$均可逆，故其行列式均非零。从而有

$\det(X)\neq 0$，即X可逆。

14. 解：

(1) 记所有幻方构成的集合为H，则易知$H\subseteq M_3$。故要证H是一个线性空间，只需说明其对加法和数乘皆封闭即可。由矩阵的加法定义，即对应位置的元素相加以及幻方的定义可知，封闭性是显然的。设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$均属于H，对应的幻数分别为a, b .则$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$对应的幻数为$a+b$，而$kA=(ka_{ij})$对应的幻数为ka。

(2)设$A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\\ x_7 & x_8 & x_9\end{bmatrix}$，并设A的幻数为a，则根据幻方的定义，可以列出如下方程组。

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a\\ x_4+x_5+x_6=a\\ x_7+x_8+x_9=a\\ x_1+x_4+x_7=a\\ x_2+x_5+x_8=a\\ x_3+x_6+x_9=a\\ x_1+x_5+x_9=a\\ x_3+x_5+x_7=a\end{cases}$$

一共 8 个方程，10 个未知数。然而不难发现，前六个方程是线性相关的，任意删除前六个方程中一个后，剩下的 7 个方程线性无关。故方程组含有 10-7=3 个基础解。

不难发现，如下三个幻方是线性无关的，故他们构成基础解系。

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3&8\\9&5&1\\2&7&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{bmatrix}$$

其中，第二个有题目给出，而最后一个是第二个的翻转。