第八次习题课: 一份往年考试样题解答　　　　　　杨利军　2018年01月04–06日

一. 填空题(每题4分, 共32分)

填空题 1. 设 V 为3维线性空间, σ 为 V 上的线性变换. 假设 σ 在 V 的一组基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

则包含 α_2 的最小不变子空间是$\underline{span\{\alpha_1, \alpha_2\}}$.

分析解答: (i) 回忆不变子空间定义: 满足条件 $\sigma(W) \subseteq W$ 的子空间 W 称为不变子空间(关于线性变换 σ).
(ii) 记所求得最小子空间为 W. 根据假设我们有

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

由于 $\alpha_2 \in W$, 故 $\sigma(\alpha_2) \in W$, 即 $\sigma(a_2) = \lambda\alpha_2 + \alpha_1 \in W$. 因此 $\lambda\alpha_2 + \alpha_1 \in W$. 从而 $\alpha_1 \in W$. 这表明 $span\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq W$. 易见 $span\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是包含 α_2 的不变子空间. 故 $span\{\alpha_1, \alpha_2\} \supseteq W$. 因此所求不变子空间为

$$W = span\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

填空题 2: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为3维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 $|A| = 1$. 令

$$B := (2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1), \tag{1}$$

则 $|B| =\underline{4}$.

分析解答：将矩阵 B 用矩阵 A 来表示. 矩阵 B 的定义式 (1) 可写作

$$B := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

记上式最右边的矩阵为 C, 则于上式取行列式得

$$|B| = |A||C| = 1 \cdot 4 = 4.$$

填空题 3: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, A 的秩 $r(A) = r$, B 为n 阶矩阵满足 $AB = 0$, 则矩阵 B 的秩 $r(B)$ 的取值范围是$\underline{0 \le r(B) \le n - r}$.

分析解答：根据假设矩阵 A 的秩为 r, 故 A 的零空间 $Ker(A)$ 的维数是 $n - r$. 再根据条件 $AB = 0$ 可知, 矩阵 $B := (b_1, \cdots, b_n)$ 的每个列向量均满足 $Ab_j = 0$, 即 $b_j \in Ker(A)$. 由此可知向量组 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 最大无关向量的个数 $\le n - r$. 这表明矩阵 B 的秩 $r(B)$ 的取值范围是

$$0 \le r(B) \le n - r.$$

填空题 4: 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和为 c, 则 A^3 的各行元素之和为$\underline{c^3}$.

分析解答：考虑 $n = 3$ 的情形. 设 $A = (a_{ij})$, 则题目的假设是

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = c, \\ a_{21} + a_{22} + a_{33} = c, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = c. \end{cases}$$

若将上述方程组写作矩阵的形式则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

这说明 c 是矩阵 A 的特征值, 并且 $\xi := (1,1,1)^T$ 是所属的特征向量. 显然这个结论与矩阵 A 的阶数 n 没有关系. 也就是说, 若 n 阶矩阵 A 的各行元素之和为 c, 则 c 是 A 的特征值, 且 $\xi := (1,\cdots,1)^T$ 是所属的特征向量. 因此 c^3 是矩阵 A^3 的特征值, 并且$\xi = (1,\cdots,1)^T$ 是 A^3 的特征向量, 从属于特征值 c^3. 因此 A^3 的各行的 n 个元素之和为 c^3.

<u>填空题 5</u>: 设 $W = span\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, 其中 $\alpha_1 = (1,0,3)^T$, $\alpha_2 = (2,5,-4)^T$, 则子空间 W 在 $\mathbb{R}^3$ 中的正交补 $W^\perp =$<u>$span\{(-3,2,1)^T\}$</u>.

<u>分析解答</u>: 显然子空间 W 的维数为 2. 因此正交补 $W^\perp$ 的维数为 1. 为求得$W^\perp$ 的一个非零向量 ξ, 我们需要求解 $\alpha_1\xi = 0$, $\alpha_2\xi = 0$, 即求解

$$\left\{\begin{array}{lll} x & & +3z = 0, \\ 2x & +5y & -4z = 0, \end{array}\right.$$

不难得到方程组的一个非零解 $\xi = (-3,2,1)^T$. 于是所求正交补子空间为

$$W^\perp = span\{(-3,2,1)^T\}.$$

<u>填空题 6</u>: 设 A 为 2 阶矩阵, $|A| = 0$, 且A 的代数余子式满足 $A_{11} = 1$, $A_{22} = 2$, 则 A 的伴随矩阵 A^* 的两个特征值分别是 <u>0 和 3</u>.

<u>分析解答</u>: 根据伴随矩阵的定义, 以及题目假设我们有

$$A^* := \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 2 \end{array}\right].$$

由假设 $|A| = 0$ 可知 $|A^*| = 0$. 记 A^* 的两个特征值为 λ_1 和 λ_2. 根据特征值性质可知

$$\lambda_1 + \lambda_2 = trA^* = 1 + 2 = 3, \quad \lambda_1\lambda_2 = |A^*| = 0.$$

由于可见伴随矩阵 A^* 的特征值集合为 $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 3\}$.

填空题 7: 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 通过正交线性变换化为标准二次型 $Q(\alpha)=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$, 则 $a=$ $\underline{-2 \text{ 或 } 2}$.

分析解答：记二次型 $Q(x)$ 对应的实对称矩阵为 A, 即

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}.$$

根据题目假设可知经过正交变换 $x=Py$, 二次型 $Q(x)$ 化为了标准形 $Q_1(y):=Q(Py)=2y_1^2+y_2^2+5y_3^2$. 等价地说, 如下两个矩阵相似

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

简单计算得 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-3-a)(\lambda-3+a).$$

由于矩阵 A 和与对角阵 B 相似, 故 A 有特征值 1 和 5. 由此解得 $a=2$ 或 $a=-2$.

填空题 8: 在直角坐标系中, 两条异面直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \quad \text{和} \quad x-1=y+1=z-2 \tag{2}$$

的距离为 $\underline{\frac{5}{\sqrt{6}}}$.

分析解答： 直接应用异面直线的距离公式

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}$$

即可. 记 L_1 和 L_2 为式 (2) 中的两条直线. 则直线 L_1 经过点 $P_1=(0,0,0)$, 其方向为 $\vec{v}_1=(1,2,3)$. 直线 L_2 经过点 $P_2=(1,-1,2)$, 其方向为 $\vec{v}_2=(1,1,1)$. 于是

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1,2) - (0,0,0) = (1,-1,2)$, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1,2,3) \times (1,1,1) = (-1,2,-1)$. $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1,-1,2) \cdot (-1,2,-1) = -5$. 于是

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

二. 计算题和证明题,

题一 (20分): 设 A 为线性空间 V 上线性变换 σ 在 V 的一组基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的矩阵, A 如下定义

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

分别求子空间 $Im(\sigma)$, $Ker(\sigma)$, $Im(\sigma) + Ker(\sigma)$ 的基底.

解: 先求矩阵 A 的秩. 为此对矩阵 A 作行初等变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} =: B.$$

由此可见 $rank(A) = 2$. 故 $\dim Im(\sigma) = 2$, $\dim Ker(\sigma) = 2$.

(i) 求 $Im(\sigma)$ 的基底. 由于矩阵 A 的第一和第二列线性无关, 故 $\sigma(\alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$ 和 $\sigma(\alpha_2) = 2(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$ 线性无关. 因此 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2)$ 构成了 $Im(\sigma)$ 的一个基底, 即

$$Im(\sigma) = span\{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4\}.$$

(ii) 求 $Ker(\sigma)$ 的基底. 为此考虑求解齐次线性代数方程组 $A\xi = 0$. 由于方程组

$A\xi=0$ 和 $B\xi=0$ 同解. 我们考虑 $B\xi=0$, 即

$$\begin{cases} x \quad\quad +2z \quad +w=0, \\ \quad\quad 2y \quad +3z \quad +4w=0. \end{cases}$$

不难求得这个方程组的两个线性无关的解 $\xi_1=(-4,-3,2,0)^T, \xi_2=(-1,-2,0,1)^T$. 这表明

$$Ker(A)=span\{(-4,-3,2,0)^T,(-1,-2,0,1)^T\}.$$

由此得

$$Ker(\sigma)=span\{-4\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4\}.$$

(iii) 求和空间 $Im(\sigma)+Ker(\sigma)$ 的基底. 为此考虑两个子空间的基底的线性相关性. 将它们的基向量

$$\begin{aligned} Im(\sigma)&=span\{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\}, \\ Ker(\sigma)&=span\{-4\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4\}. \end{aligned}$$

坐标作为列向量构成矩阵 C, 即

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

考虑矩阵 C 的秩. 为此对矩阵 C 作行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

可见矩阵 C 可逆. 因此子空间 $Im(\sigma)$ 与 $Ker(\sigma)$ 的基底线性无关. 因此它们的和 $Im(\sigma)+Ker(\sigma)$ 为直和, 即$Im(\sigma)\oplus Ker(\sigma)$. 其维数为 4. 故其和空间为全空间,

即 $Im(\sigma)+Ker(\sigma)=V$. 于是$Im(\sigma)+Ker(\sigma)$ 的一个基底为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 解答完毕.

题二(12分): 求一个正交矩阵 P, 使得线性变换 $x=Py$ 将实二次型 $Q(x)=x^TAx$ 化为标准形, 其中实对称矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解: 实际上就是要求一个正交矩阵 P, 使得 P^TAP 为对角阵. 也就是要求 A 的一组(4个)单位正交的特征向量. 为此先求 A 的特征值. 简单计算表明

$$|\lambda E-A|=\cdots=(\lambda-1)^3(\lambda+2).$$

故矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=-2$. 我们先求特征值 $\lambda_1=1$ 对应的一组(3个)单位正交向量. 考虑齐次方程组 $(\lambda_1E-A)\xi=0$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

不难求出这个方程组的一个基底. 为了避免 Gram-Schmidt正交化过程, 我们取如下一组相互正交的三个解向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对这三个解向量作单位化即得矩阵 A 的三个单位正交的特征向量:

$$\varepsilon_1=\alpha_1,\quad \varepsilon_2=\frac{\alpha_2}{\sqrt{6}},\quad \varepsilon_3=\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}}.$$

再考虑特征值 $\lambda_2 = -2$ 所对应的特征向量. 为此我们要解方程组 $(\lambda_2 E - A)\xi = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

不难解得方程组的一个非零解向量 $\alpha_4 = (1,1,1,0)^T$. 它的单位化向量为 $\varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$. 于是我们求得一个以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为列向量的正交矩阵 P, 即

$$P := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

使得 $AP = Pdiag(1,1,1-2)$. 于是在正交变换 $x = Py$ 下, 二次型 $Q(x) = x^T Ax$ 化为 $Q_1(y) := Q(Py) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^3 - 2y_4^2$. 解答完毕.

<u>题三(16分)</u>: 设 V 为数域 k 上的3 维线性空间, σ 为 V 上的线性变换, σ 在 V 的基底 α_1, α_2, α_3 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1). 求 σ 在基底

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \\ \eta_2 &= \qquad 3\alpha_2 - \alpha_3, \\ \eta_3 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{aligned}$$

下的矩阵;

(2). 求矩阵 A 的全部特征值和特征向量.

解(1): 根据题目给出的条件可知, 基底 $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ 到基底 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的过渡矩阵 P 为

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P,\quad P:=\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&3&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)&=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)AP=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)P^{-1}AP.\end{aligned}$$

矩阵 $P^{-1}AP$ 即为线性变换 σ 在基底 $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ 下的矩阵. 经过有些繁琐的计算 $P^{-1}AP=$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&3&9\\0&4&8\\1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&2\\-2&-1&4\\2&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&3&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-43&88&99\\-40&76&72\\25&-40&-33\end{bmatrix}.$$

解(2): 求矩阵 A 的全部特征值和特征向量. 先求特征值. 考虑 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-2\\2&\lambda+1&-4\\-2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=\cdots=(\lambda-3)^2(\lambda+6).$$

由此可知特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-6$. 再来求特征向量. 考虑方程组 $(\lambda_1E-A)\xi=0$, 即

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

不难求得方程组的两个线性无关的解向量, 即从属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量

$$\xi_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

再考虑方程组 $(\lambda_3 E - A)\xi = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

不难求得方程组的一个非零解, 即从属于特征值 $\lambda_3 = -6$ 的特征向量

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

综上, 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$, 对应的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

题四(10分): 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, E 为n 阶单位矩阵, 记 $B = \lambda E + A^T A$. 证明当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 正定.

证明：当 $\lambda > 0$ 时, 对于任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T B x = \lambda x^T x + x^T A^T A x = \lambda \|x\|^2 + \|Ax\|^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

因此 B 正定.

题五(10分): 设 σ 为实线性空间 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = -\varepsilon$, 这里 ε 表示恒等变换. 证明 V 的维数为偶数, 即 $\dim V = 2m$, 并且 V 存在一组基, 使得σ 在这组基下的矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}.$$

(注：由题意知线性空间 V 应该是有限维的)

证明: 分三步.

Step 1. 证明对于任意非零向量 $\xi_1 \in V$, 记 $\eta_1 := \sigma(\xi_1)$, 则向量组 ξ_1, η_1 线性无关. 反证. 假设 ξ_1, η_1 线性相关, 则由于 ξ_1 为非零向量, 故 η_1 可表为 $\eta_1 = \lambda\xi_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 用 σ 作用于等式 $\eta_1 = \lambda\xi_1$ 两边得

$$\text{左边} = \sigma(\eta_1) = \sigma(\sigma\xi_1) = \sigma^2(\xi_1) = -\xi,$$

$$\text{右边} = \sigma(\lambda\xi_1) = \lambda\sigma(\xi) = \lambda\eta_1 = \lambda^2\xi.$$

这表明 $(1+\lambda^2)\xi_1 = 0$. 但是 $1+\lambda^2 > 0$ (注意V 为实线性空间), 且 ξ_1 为非零向量. 矛盾. 故向量组 ξ_1, η_1 线性无关. 进一步二维子空间 $span\{\xi_1, \eta_1\}$ 是 σ 的不变子空间, 并且

$$\sigma(\eta_1, \xi_1) = (\eta_1, \xi_1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Step 2. 若向量组 ξ_1, η_1 构成了 V 的基底, 则结论得证. 若不然, 则存在一个向量 $\xi_2 \in V$, 使得向量组 ξ_1, η_1, ξ_2 线性无关. 此时可断言: 向量组 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ 也线性无关, 这里$\eta_2 := \sigma(\xi_2)$.

证明断言: 反证. 假设向量组 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ 也线性相关. 由于向量组 ξ_1, η_1, ξ_2 线性无关, 故 η_2 可表为 ξ_1, η_1, ξ_2 线性组合, 即

$$\eta_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \mu_1\eta_1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

用 σ 作用于等式 (3) 两边得

$$-\xi_2 = \sigma(\eta_2) = \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 - \mu_1\xi_1. \tag{4}$$

由式 (4) 可知系数 $\lambda_2 \neq 0$. 否则与向量组 ξ_1, η_1, ξ_2 线性无关的假设相矛盾. 将式 (4) 写作

$$\lambda_2\eta_2 = \mu_1\xi_1 - \xi_2 + \lambda_1\eta_1. \tag{5}$$

用 λ_2 同时乘以式 (3) 的两边得

$$\lambda_2\eta_2 = \lambda_2\lambda_1\xi_1 + \lambda_2^2\xi_2 + \lambda_2\mu_1\eta_1. \tag{6}$$

比较等式 (5) 和 (6) 可知 $\lambda_2^2=-1$. 这在实数域上是不可能的. 矛盾. 这就证明了向量组 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2$ 线性无关. 注意对于这个线性无关的向量组, 我们有

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2)=(\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Step 3. 若向量组 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2$, 构成了 V 的基底, 则结论得证. 若不然, 则存在一个向量 $\xi_3\in V$, 使得向量组 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_3$ 线性无关. 此时可断言: 向量组 $\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_3,\eta_3$ 也线性无关, 这里$\eta_3:=\sigma(\xi_3)$. 证明同 Step 2.

如此继续下去, 即可得到一组线性无关的向量组 $\xi_1,\cdots,\xi_m,\eta_1,\cdots,\eta_m$ 构成了 V 的基底, 这里 $\eta_j=\sigma(\xi_j)$. 此时s 在基底 $\eta_1,\cdots,\eta_m,\xi_1,\cdots,\xi_m$ 下的矩阵记为 J, 即

$$J=\begin{bmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{bmatrix}.$$

关于空间维数是偶数的简单证明: 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基底, 线性变换 σ 在这个基底下的表示矩阵为 A, 则根据条件 $\sigma^2=-\varepsilon$ 可知 $A^2=-E$. 由此得 $|A|^2=(-1)^n$. 由于 V 是实的线性空间, 故 n 必为偶数. 设 $n=2m$. 证毕. ∎