期末样题

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

1. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&1&3&1\\1&4&1&1\\5&1&1&1\end{bmatrix}$。分别计算以下4项并提供计算过程。

   (1) $|A|$.　　(2) $|-2A^T|$.　　(3) $|A^{-1}|$.

   (4) A^{-1}的(1,4)元(即A^{-1}第1行第4列的元素).

2. 设V是$\mathbb{R}^n$的子空间，我们称n阶实矩阵P是V上的正交投影矩阵，如果$P^2 = P, P^T = P$且P的列空间等于V. 这个定义等价于说P满足:若$v\in V$，则$Pv=v$,若$w\in V^\perp$, 则$Pw=0$.

   (a) 假设$V=\left\{c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$. 它是$\mathbb{R}^3$的子空间. 问:$V$上的正交投影矩阵是否等于

   $$\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}?$$

   (b) 求$w\in V$, 使得$\parallel w-\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\parallel=\min_{v\in V}\parallel v-\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\parallel$.

3. 设$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 但$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

   (b) 按$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$顺序写出Gram-Schmidt标准正交化的向量$\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

   (c) 记$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$和$Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 求矩阵$C$满足$A = QC$.

   (d) 求$\mathbb{R}^4$到A的列空间的正交投影矩阵.

   (e) 记$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求$Bx = b$的最小二乘解, 即求$x^* \in \mathbb{R}^3$使得$\|Bx^* - b\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \|Bx - b\|$.

4. 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) 求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵.

   (b) 求A^n.

5. 设T为$\mathbb{R}^2$上的线性变换，且满足

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   (a) 求T在基$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$下的矩阵$A$。

   (b) 计算 $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$。

   (c) 阐明理由:能够找到A的特征向量构成$\mathbb{R}^2$一组基.并求T在这组基下的矩阵。

6. 令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) 求A的奇异值分解。

(b) 分别给出A的行空间和列空间的一组标准正交基。

7. 设 A 和 B 均为n阶方阵，且满足$A + B + AB = O$。证明：

 (a) -1不是B的特征值.

 (b) B的任一特征向量都是A的特征向量.

 (c) A的任一特征向量都是B的特征向量.

8. 设e_1, e_2, e_3是$\mathbb{R}^{10}$中一组标准正交的向量. 记$V \subseteq \mathbb{R}^{10}$为$e_1, e_2, e_3$生成的子空间. 设$v \in \mathbb{R}^{10}$. 证明：$v \in V$当且仅当$\| v \|^2 = (e_1^T v)^2 + (e_2^T v)^2 + (e_3^T v)^2$.

9. 给定实对称正定矩阵A和实对称矩阵B，求证：

 (a) 关于矩阵X的方程$AX + XA = O$只有平凡解$X = O$。

 (b) 关于矩阵X的方程$AX + XA = B$存在唯一的解X_0。

 (c) X_0是对称矩阵。