期末样题

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

1. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&1&3&1\\1&4&1&1\\5&1&1&1\end{bmatrix}$。分别计算以下4项并提供计算过程。

   (1) $|A|$.　　(2) $|-2A^T|$.　　(3) $|A^{-1}|$.

   (4) A^{-1}的(1,4)元(即A^{-1}第1行第4列的元素).

   答案:

   （1）

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\0&0&2&-1\\0&3&0&-1\\0&-4&-4&-9\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&1&1&2\\0&1&0&-1/3\\0&0&2&-1\\0&-4&-4&-9\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}1&1&1&2\\0&1&0&-1/3\\0&0&2&-1\\0&0&0&-37/3\end{vmatrix}=74.$$

（2）$|-2A^T|=(-2)^4|A^T|=(-2)^4|A|=1184.$

（3）$|A^{-1}|=1/|A|=1/74.$

（4）A^{-1}的（1，4）元为

$$(A^{-1})_{1,4} = \frac{C_{4,1}}{|A|} = \frac{(-1)^5}{74}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{74}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \frac{17}{74}.$$

2. 设V是$\mathbb{R}^n$的子空间，我们称n阶实矩阵P是V上的正交投影矩阵，如果$P^2 = P, P^T = P$且P的列空间等于V. 这个定义等价于说P满足:若$v \in V$，则$Pv = v$,若$w \in V^{\perp}$, 则$Pw = 0$.

   (a) 假设$V = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 它是$\mathbb{R}^3$的子空间. 问:$V$上的正交投影矩阵是否等于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} ?$$

   (b) 求$w \in V$, 使得$\| w - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \| = \min_{v \in V} \| v - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \|$.

答案:

(1) 验证方法1：令题目中矩阵是P. 矩阵P等于

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

验证$P^2 = P, P^T = P$和P的列空间等于V.

验证方法2：按等价定义,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由此得$P\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$和$P\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$, 且$V^{\perp}=\{c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{R}\}$. 这展示$P$是正交投影阵。

(2) 方法1：因为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(-\frac{1}{3})\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

所以

$$w=P\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}.$$

按第一问验证方法1，本问也可以直接计算$w=P\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

方法2：令$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$, 则$A$的列空间是$V$，计算正交投影矩阵是$A(A^TA)^{-1}A^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. 得到$w=P\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$.

3. 设$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 但$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

   (b) 按$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$顺序写出Gram-Schmidt标准正交化的向量$\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

   (c) 记$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$和$Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 求矩阵$C$满足$A = QC$.

   (d) 求$\mathbb{R}^4$到A的列空间的正交投影矩阵.

   (e) 记$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求$Bx = b$的最小二乘解, 即求$x^* \in \mathbb{R}^3$使得$\|Bx^* - b\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \|Bx - b\|$.

答案:

(1) 利用

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到(1)结论.

也可以先判断$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 再通过解方程组将$\alpha_4$由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

(2) $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \beta_2 = \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = (0, 0, 1, 0)^T$.

(3) 从(2)或一个向量在正交基向量的表示公式得到$\alpha_1 = \sqrt{2}\beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_2 + \beta_3, \alpha_4 = \sqrt{2}\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, 得到

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4)

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(5) 由公式

$$x^* = (B^TB)^{-1}B^Tb = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B^Tb = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} B^Tb = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T.$$

也可以直接用(4)的结论, b在$R(A)$的投影向量为$Pb = \frac{1}{2}(1,0,0,1)^T = \frac{1}{2}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3$得到结论.

4. 设$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) 求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵.

(b) 求A^n.

答案:

(1)先求A的特征值. 令$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$, 得到

$\lambda_1=2$; $\lambda_2=1$.

再求特征向量.

当$\lambda_1=2$时，由$(A-2I)x=0$，即 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

求得无关的解, $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,1)$.

当$\lambda_2=1$时，由$(A-I)x=0$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

得到解，$\alpha_3=(-3,1,0)$.

令$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\Lambda$.

(2) 由(1)$A=P\Lambda P^{-1}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 于是

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2^n & 3(2^n-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

或者由A为准对角，直接计算$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3(2^n-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

5. 设T为$\mathbb{R}^2$上的线性变换，且满足

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-10\\8\end{bmatrix}.$$

(a) 求T在基$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$下的矩阵$A$。

(b) 计算 $T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$。

(c) 阐明理由:能够找到A的特征向量构成$\mathbb{R}^2$一组基.并求T在这组基下的矩阵。

答案:

（1） $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)-T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$.

所以T在基$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}-4&-6\\3&5\end{bmatrix}$.

（2） $T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26\\21\end{bmatrix}$.

或者 $T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=2T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+3T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-26\\21\end{bmatrix}$.

（3）可求得A的特征值为2和-1。

A有两个互异的特征值，故可找到两个线性无关的特征向量构成$\mathbb{R}^2$一组基。

T在这组基下的矩阵即为以A特征值为对角元的对角阵$\begin{bmatrix}2&\\&-1\end{bmatrix}$或者$\begin{bmatrix}-1&\\&2\end{bmatrix}$。两种对角阵写出其一即可。

6. 令 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

(a) 求A的奇异值分解。

(b) 分别给出A的行空间和列空间的一组标准正交基。

答案:

（1）方法一：直接计算。$A^TA=\begin{bmatrix}5 & 6 & 4\\ 6 & 8 & 6\\ 4 & 6 & 5\end{bmatrix}$ .A^TA特征多项式$|A^TA-\lambda I|=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-17)$,得到 A^TA 的特征值为 $\lambda_1=17,\ \lambda_2=1$, 所以两个非零奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{17},\ \sigma_2=1$ 。

求得右奇异向量为 $v_1=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 3\end{bmatrix}$， $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ ；以及 A 的零空间的一组标准正交基 $v_3=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$ 。注：这里的v_1,v_2,v_3有乘以-1的自由，相应u_1,u_2也要进行符号变化。

再根据 $u_j=\frac{Av_j}{\sigma_j},\ j=1,2$ 求得左奇异向量为 $u_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$， $u_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 。

故 A 的奇异值分解如下

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{17}}\\ \frac{4}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{17}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{17}}\end{bmatrix}^T.$$

方法二：先给 A^T 做奇异值分解后再转置。$AA^T=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 8 & 9\end{bmatrix}$ ，AA^T特征多项式为$(1-\lambda)(17-\lambda)$, 解得 AA^T 的两个特征值为 $\lambda_1=17,\ \lambda_2=1$，所以两个奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{17},\ \sigma_2=1$ 。

解得 A^T 的右奇异向量为 $u_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$， $u_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 。

注：这里的u_1,u_2有乘以-1的自由，相应v_1,v_2也要进行符号变化,v_3有乘以-1的自由。

再根据 $v_j = \frac{A^T u_j}{\sigma_j}$, $j=1,2$ 求得 A^T 的左奇异向量为$v_1 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$， $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$；

以及 A^T 的左零空间的一组标准正交基 $v_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$(或者 v_3可取$-\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$)。

最后将所得的 A^T 的奇异值分解转置后得到 A 的奇异值分解如下：

$$A = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{17}}\\ \frac{4}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{17}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{17}}\end{bmatrix}^T.$$

（2）

方法一：根据奇异值分解有 $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$，所以 u_1, u_2 给出了 A 的列空间的一组标准正交基，所以 v_1^T, v_2^T 给出了 A 的行空间的一组标准正交基。

方法二：直接将 A 的行向量进行正交化得行空间的一组标准正交基为

$$\frac{1}{3}(2,2,1),\ \frac{1}{\sqrt{153}}(-7,2,10).$$

矩阵 A 是列满秩的，所以 $\mathbb{R}^2$ 的任一组标准正交基都是 A 列空间的一组标准正交基。

7. 设 A 和 B 均为n阶方阵，且满足$A+B+AB=O$。证明：

(a) -1不是B的特征值.

(b) B的任一特征向量都是A的特征向量.

(c) A的任一特征向量都是B的特征向量.

答案:

(1) 如果$(-1,x)$为B的特征对，那么由$Bx=-x$可知

$$Ax+Bx+ABx=Ax-x-Ax=-x=0,$$

这与x是非零向量矛盾。

(2) 设(λ,x)为B的特征对（$\lambda\neq -1$），即$Bx=\lambda x$。于是$Ax+Bx+ABx=0$，即

$$Ax+\lambda x+A(\lambda x)=0, i.e., (\lambda+1)Ax=-\lambda x.$$

所以，

$$Ax=-\frac{\lambda}{\lambda+1}x.$$

(3)．注意到$I+A+B+AB=(I+A)(I+B)=I$，于是

i）利用$(B+I)(A+I)=I$，得到$AB=-A-B=BA$，同上证明；

或者

ii)由$(B+I)(A+I)=I$说明-1不是A的特征值。设(μ,y)为A的特征对，即$Ay=\mu y$。构造向量

$$z=By+\frac{\mu}{\mu+1}y,$$

则$Az=ABy+\frac{\mu}{\mu+1}Ay=-Ay-By+\frac{\mu}{\mu+1}Ay=-\mu y-By+\frac{\mu^2}{\mu+1}y=-By-\frac{\mu}{\mu+1}y=-z$。注意到$z$不是特征向量，所以$z=0$，即$By=-\frac{\mu}{\mu+1}y$。

8. 设e_1, e_2, e_3是$\mathbb{R}^{10}$中一组标准正交的向量. 记$V \subseteq \mathbb{R}^{10}$为$e_1, e_2, e_3$生成的子空间. 设$v \in \mathbb{R}^{10}$. 证明：$v \in V$当且仅当$\| v \|^2 = (e_1^T v)^2 + (e_2^T v)^2 + (e_3^T v)^2$.

   答案:
   设$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{10}$是由$e_1, e_2, e_3$扩充的$\mathbb{R}^{10}$的一组标准正交基. 令

$$v = c_1 e_1 + \cdots + c_{10} e_{10}.$$

   由定义，$v \in V$当且仅当$c_4 = \cdots = c_{10} = 0$.
   容易验证 $c_i = e_i^T v$(或$v^T e_i$), 其中$i = 1, \cdots, 10$. 和
   $\| v \|^2 = v^T v = c_1^2 + \cdots + c_{10}^2$.
   所以，若$v \in V$, 则$c_4 = \cdots = c_{10} = 0$从而 $\| v \|^2 = (e_1^T v)^2 + (e_2^T v)^2 + (e_3^T v)^2$.
   反之，若$\| v \|^2 = (e_1^T v)^2 + (e_2^T v)^2 + (e_3^T v)^2$, 则$c_4^2 + \cdots + c_{10}^2 = 0$. 所以，$c_4 = \cdots = c_{10} = 0$.
   得到$v \in V$.

9. 给定实对称正定矩阵A和实对称矩阵B，求证：

   (a) 关于矩阵X的方程$AX+XA=O$只有平凡解$X=O$。
   (b) 关于矩阵X的方程$AX+XA=B$存在唯一的解X_0。
   (c) X_0是对称矩阵。

   答案:

   (a) i. 法一：
      - A的谱分解$A=U\Lambda U^T$，其中Λ正定对角，U正交。
      - $AX+XA=O\Leftrightarrow \Lambda\widetilde{X}+\widetilde{X}\Lambda=O,\widetilde{X}=U^TXU$。
      - $\Leftrightarrow(\lambda_i+\lambda_j)\widetilde{x}_{ij}=0\Leftrightarrow\widetilde{x}_{ij}=0\Leftrightarrow\widetilde{X}=O\Leftrightarrow X=O$。

      ii. 法二：
      - 记$A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}b_{ij}\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$。
      - 则$AX+XA=O$等价于
      $$My:=\left(\begin{bmatrix}A & & \\ & \ddots & \\ & & A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}I & \cdots & a_{1n}I\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n}I & \cdots & a_{nn}I\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0.$$
      - 说明M正定，因此M可逆，只有平凡解。

   (b) i. 法一：
      - $AX+XA=B\Leftrightarrow\Lambda\widetilde{X}+\widetilde{X}\Lambda=\widetilde{B},\widetilde{B}=U^TBU$。
      - $\Leftrightarrow\widetilde{x}_{ij}=\frac{\widetilde{b}_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}$，解为$X=U^T\widetilde{X}U$。
      - 上述计算全部是等价的，因此解唯一。

      ii. 法二：
      - $AX+XA=B$类似得到$My=n$。
      - M可逆，故解存在且唯一。

      iii. 唯一性，法三：
      - 若有两解X_1,X_2，则$A(X_1-X_2)+(X_1-X_2)A=0$，得$X_1=X_2$。

   (c) i. 法一：
      - B对称，$\widetilde{B}$对称，$\widetilde{X}$对称，X对称。

      ii. 法二：
      - 任意矩阵X可以写成对称与非对称矩阵的和：$X=S+N$。若X是解，则$AS+SA-B=-(AN+NA)$既对称又反对称，利用(1)知$N=O$。