线性代数期中考试

1. 问答题(15分)

   (1) 方阵A什么时候可逆？如果A可逆，其约化梯形是什么？

   (2) 什么样的矩阵有LU分解？如果方阵A的元素$a_{11}=0$, 其有LU分解吗？为什么？

   (3) 对置换矩阵P一定可以找到自然数k使得$P^k=I_n$吗？为什么？

   (4) 设$b\in\mathbb{R}^m$不是零向量，A满足什么条件时，方程组$Ax=b$一定有解？为什么？

   (5) 方程组$Ax=b$什么时候有唯一解？在这种情形，A的约化梯形是什么？

2. (20分) Pascal矩阵P 与对称Pascal矩阵S 分别定义如下：

$$P=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&2&1&\\1&3&3&1\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{pmatrix}$$

   (1)分别计算Pv,P^2v 与P^kv，其中$v=(1,x,x^2,x^3)^T$。

   (2) 求P的逆矩阵。

   (3) 求S的LU分解。

   (4) 求S的逆矩阵。

3. (15分) 设a,b,c是三个互异实数且均不等于1。考虑如下三个矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&a^2&b^2\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&b&c\\1&a^2&b^2&c^2\\1&a^3&b^3&c^3\end{pmatrix}$$

   (1)证明A_1可逆，并求其逆矩阵。

   (2)证明A_2可逆。

   (3)A_3可逆吗？说明理由。

4. (10分) 考虑如下矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(1) 用Gauss-Jordan消去法求P的逆矩阵。

(2) 直接计算P^TP与PP^T。你能得出什么结论?

形如P的矩阵称为正交矩阵。

5. (10分) 求如下五阶差分矩阵K的LU分解:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (20分) 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)求矩阵A的约化梯形R。

(2)求A的列空间$C(A)$。并求一组列向量，其张成$C(A)$。

(3)求$Ax = \vec{0}$的一组特解，使得其张成$N(A)$。

(4)给定任意向量$b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$，判定方程组$Ax = b$是否有解。
如果有解，求一个特解，并写出一般解的形式。

7. (10分) (1) 设A是一个m行n列矩阵，B是一个n行r列矩阵。证明

$$C(A) \supset C(AB).$$

(2)若A是一个n阶方阵，是否一定有$C(A) = C(A^2)$?请说明理由。

8. **选做题**：设A是一个m行n列矩阵($n \le m$)，且A的秩为n。

(1) 证明A^TA可逆。

(2)证明A^TA必可以做LU分解。

(3)设A^TA的分解为LDL^T，证明D中所有对角线上的元素都是正数。