期中考试答案：

1. 问答题：

(1) n阶方阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ 对A作Gauss消去可以找到n个主元

当A可逆时，其约化梯形为 I_n

(2). 若A可逆，且对A作Gauss消去时未使用行交换，则

A有LU分解：

(答案：若A的所有子矩阵 $A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{bmatrix}$

均可逆，则A有LU分解。见课本 P106. 24题)

若 $a_{11}=0$，则A没有LU分解，因为否则，

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ * & & & * \\ \vdots & & & \\ * & & \cdots & * \end{bmatrix}$$

则 $a_{11} = u_{11} \neq 0$，矛盾。

(3). 对置换矩阵P，一定存在 $k \in \mathbb{N}$，s.t. $P^k = I_n$.

原因将会在第5章说明：

(4): 当 A 是$\boxed{\text{行满秩}}$矩阵, 即 $r(A) = m$ 时, $Ax=b$ 一定有解。

因为此时: $[A \mid b] \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & d \\ & & & 1 & \end{array}\right] = [R \mid d]$

$Ax=b$ 与 $Rx=d$ 同解; 但 $Rx=d$ 显然一定有解。

(5). 当 $\boxed{b \in C(A)}$ 且 $\boxed{r(A) = n}$ 时, 方程组有唯一解.

此时 A 而约化梯形为 $\begin{bmatrix} I_n \\ \hline O \end{bmatrix}$.

2. (1) 见 P_{72}. 2.4 A.

$$p^k v = \begin{pmatrix} 1 \\ k+x \\ (k+x)^2 \\ (k+x)^3 \end{pmatrix}.$$

(2) 见 P_{88}. 例 2.5 C.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 记 P_{101} 例2.6 A.

$$S = PP^T = LU.$$

(4) 由 $S = PP^T \succ 0$.

$$S^{-1} = (P^T)^{-1}P^{-1} = (P^{-1})^T P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -2 & 3 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (1). $A_1 \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$ $a-1 \neq 0$.

所以有非零的2个主元. 所以 A_1 可逆. 由 Gauss-Jordan 消元得.

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a-1} & -\frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1}\begin{bmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2). $A_2 \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & (b-1)(a-1) \end{bmatrix}$

$a-1$, $(b-1)(a-1) \neq 0$. 从而可以找到三个主元. 所以 A_2 可逆.

(3). $A_3 \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & a-1 & * & * \\ & & (b-1)(a-1) & * \\ & & & (c-1)(c-a)(c-b) \end{bmatrix}$

可以找到4个主元. 所以 A_3 可逆.

4:

(1). $[P|I] \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} [I|P^T]$ (直接计算)

从而 $P^{-1} = P^T$.

(2). 直接计算知. $PP^T = P^TP = I_4$.

从而与(1)的结论相同. 即 $P^{-1} = P^T$.

5. 直接做 Gauss 消去得:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \\ & & & \frac{5}{4} & -1 \\ & & & & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \qquad L \qquad\qquad U$$

6: (1) 直接计算知,

$$A \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = R$$

(2). 由 A 与 R 之间的关系知.

$a_1 \neq \vec{0}$. $\qquad a_2 = 5a_1$.

a_3 不是 a_1 的倍数 $\qquad a_4 = 2a_1 + 4a_3$

a_5 不是 a_1, a_3 的线性组合. $\qquad a_6 = -1\cdot a_1 - 1\cdot a_3 + 4a_5$.

所以：$C(A) = S(a_1, a_3, a_5) = \mathbb{R}^3$.

即A是行满秩的.

(3). 由R知：第2.4.6列为自由列，所以可以构造特解：

$$V_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 $N(A) = S(V_2, V_4, V_6)$

(4): 由于 $r(A)=3$. 即A行满秩. 此时 $Ax=b$ 必有解.

为得到一个特解. 我们令 $x_2 = x_4 = x_6 = 0$.

即求 x_1, x_3, x_5 使得：

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

易得：$x_1 = b_2 - b_1$, $x_3 = b_3 - b_2$ $x_5 = b_1$.

所以. $Ax=b$ 的一个特解为：

$$x_p = (b_2 - b_1, 0, b_3 - b_2, 0, b_1, 0)^T$$

所以方程 $Ax=b$ 的一般解可以写为

$$x = x_p + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_4 + \lambda_3 v_6 . \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

7: (1). 正确: 由定义知.

$C(A) = S(a_1, \cdots a_n)$. 即 $a_1, \cdots a_n$ 的所有线性组合

而 $AB = [Ab_1, \cdots Ab_r]$

其中 每个 Ab_j 均为 $a_1, \cdots a_n$ 的线性组合.

所以 $C(AB) = S(Ab_1, \cdots Ab_r) \subset S(a_1, \cdots a_n) = C(A)$

(2) 不一定. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 则 \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $C(A) = S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

但 $C(A^2) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$