清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（工科类）　　　2023 年 11 月 11 日

本试题共 10 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 求矩阵 A，使得 $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$.

2. (10 分) 计算下列线性方程组的解集：

$$\begin{cases} x_1+5x_2-\ \ x_3-\ \ x_4=-7,\\ x_1-2x_2+13x_3+20x_4=21,\\ 3x_1+8x_2+11x_3+18x_4=7,\\ -x_2+2x_3+3x_4=4.\end{cases}$$

3. (10 分) 求三阶方阵 A 使得 $Ax=\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix}$ 的解集是 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

4. (10 分) 给定 4×6 矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_6\end{bmatrix}$. 设 $\operatorname{rank}(A)=3$，且 A 的列向量满足 $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_5+2\boldsymbol{a}_6=\boldsymbol{0}$. 求矩阵 A 的行简化阶梯形.

5. (10 分) 在如下关于 x_1, x_2, x_3 的线性方程组中，讨论在 p 取不同值时方程组是否有解，并在有解时，求出所有的解：

$$\begin{cases} px_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+px_3=p.\end{cases}$$

6. (10 分)

(1) 下列矩阵的 LU 分解是否存在？若存在试求出 LU 分解；若不存在，请说明理由.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\4&5&6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

(2) 试说明如下矩阵 D 一定存在 LU 分解，无需写出具体分解.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 20 & 23 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. (15 分) 判断下列陈述是否正确，并给出理由，其中 I 是单位矩阵.

(1) 如果矩阵乘积 AB 和 BA 都定义良好，则 AB 和 BA 一定是方阵.

(2) 如果方阵 A, B, C 满足 $AB = I$，$BC = I$，则一定有 $A = C$.

(3) 如果方阵 A 满足 $A^{2023} = O$，则 $I - A^2$ 一定可逆.

(4) 存在二阶实方阵 A 满足 $A^{2023} = -I_2$，且 $A \neq -I_2$.

(5) 存在实对称矩阵 A 满足 $A^2 = -I$.

8. (10 分) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 为 $m \times n$ 矩阵 A 的零空间 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基.

(1) 求 t 使得向量

$$b_1 = a_1 + ta_2 + a_3 + a_4, \qquad b_2 = a_1 + ta_2 + (t-1)a_3 + a_4,$$
$$b_3 = 2a_1 + (t-1)a_2 + 2a_3 + 3a_4, \qquad b_4 = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4,$$

仍然为 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基.

(2) 又设 $a_1, a_2, a_3, a_4, c_1, c_2, \ldots, c_{n-4}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 试证：$Ac_1, Ac_2, \ldots, Ac_{n-4}$ 线性无关.

9. (10 分) 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$，$n > 1$ 且 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性相关. 试证：存在 n 个不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得 $a_1 + k_1 b, a_2 + k_2 b, \ldots, a_n + k_n b$ 线性相关

10. (5 分) 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 试证：若向量 b 可以写成 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意 $n-1$ 个向量的线性组合，则 $b = 0$.