清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数 10421324　　　　2021 年 11 月 6 日

本试题共 7 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 计算 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (9 分) 判断下列矩阵是否可逆并给出理由.

$$A = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. (9 分) 给定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) (3 分) 矩阵 A 是否存在 LU 分解？若是，求出它的 LU 分解；若否，说明理由.

(2) (6 分) 矩阵 B 是否可逆？若是，求出逆；若否，说明理由.

4. (8 分) 给定线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 v_1, v_2, v_3. 当且仅当 a 为何值时，向量组 $v_1 + av_2 + 2av_3, v_1 + 2av_2 + v_3, v_2 + av_3$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基？

5. (18 分) 给定两个线性方程组

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = m^2, \\ n^2x_2 - x_3 + x_4 = n + 8, \\ 2x_1 - tx_2 - x_3 - 3x_4 = 2m - n. \end{cases}$$

(1) (8 分) 求方程组 (I) 的解集.

(2) (10 分) 是否存在 m, n, t，使得方程组 (II) 与方程组 (I) 的解集相同？若是，给出具体值；若否，说明理由.

6. (25 分) 设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8\end{bmatrix}$.

(1) (10 分) 求 A 的秩，并分别计算 A 的零空间、列空间、行空间的一组基.

(2) (5 分) 令 B 为 A 去掉第二行得到的矩阵，即 $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8\end{bmatrix}$. 为上一小题中解出的 A 的零空间的基添加向量，而得到 B 的零空间的一组基.

(3) (5 分) 求一个行简化阶梯形矩阵 R，使得 R 的零空间为 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_5)$.

(4) (5 分) 是否存在 4 阶方阵 B，其四个列向量中有两个分别为 $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$，且 B 的零空间为 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_5)$? 若是，举一例并验证满足条件；若否，说明理由.

7. (21 分) 对 n 阶方阵 A，若存在正整数 k，使得 $A^k=O$，则称 A 幂零.

(1) (3 分) 证明：若 A 幂零，则对任意数 t，tA 幂零.

(2) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 A^T 幂零.

(3) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 I_n+A 可逆.

(4) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 $\begin{bmatrix}I_n & -A\\ I_n & 2021I_n\end{bmatrix}$ 可逆.

(5) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 $\mathrm{rank}(A)<n$.

(6) (3 分) 证明：若 2 阶方阵 A 满足 $A^{2021}=O$，则 $(I_2-A)^{-1}=I_2+A$.

(7) (3 分) 求一个所有元素都非零但幂零的 2 阶方阵.

注：I_n 是 n 阶单位矩阵.