线性代数（理科类）期中考试题（2018-11-10）

1（20 分）设

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考虑分块矩阵 $B = \left(A \vdots P \right)$，其中 A 是一个 3 阶方阵。若经过若干次初等行变换，B 可以化为如下矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

求证 A 可逆，并求其逆矩阵 A^{-1}。

2（20 分）设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

求一个可逆阵 E 使得 EA 是一个上三角阵 U。当 a, b, c, d 满足什么条件时，A 的相抵标准型是单位阵 I_4?

3（10 分）设 A, B 是 n 阶实对称阵，且对于任意 n 维实列向量 x，都有 $x^T Ax = x^T Bx$。证明 $A = B$。举例说明，若 A, B 不是实对称阵，上述结论不成立。

4（15 分）设 A 是一个 3 阶实方阵，且

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 A 和 A^*。

5（8 分）设 A 是 4×2 阶矩阵，B 是 2×4 阶矩阵。若

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

求 BA 的值（提示：应用分块矩阵的技巧）。

6（20 分）计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$$

7（7 分）设 n 阶方阵 A 的每行元素之和为零。求证，A 的第一行元素的代数余子式均相等。

线性代数（理科类）期中考试题参考答案（2018-11-10）

1. 解答：继续对矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

做行变换可得

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

因此 A 可逆。且这时分块矩阵的右边的块就是 $A^{-1}P$，因此

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 解答：令 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $EA = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix}$ 为一个上三角阵（此处答案可能不唯一，但要注意的是如果 E 中带有字母，需验证其是否无条件可逆）。当 $a \neq 0$，$b \neq a$，$c \neq b$ 且 $d \neq c$ 时，A 的相抵标准型为 I_4。

3. 解答：取 $x = e_i$，则 $x^T Ax = a_{ii}$，由此推出 $a_{ii} = b_{ii}$。再取 $x = e_i + e_j$，$i \neq j$，则 $x^T Ax = a_{ii} + a_{ij} + a_{jj} + a_{ji}$，由此得 $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$。又由于 A 和 B 是实对称矩阵，所以 $a_{ij} = b_{ij}$，证毕。

反例：$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $x^T Ax = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x^T Bx$。

4. 解答：首先计算 $|(A^*)^*| = 16$，因此 $(A^*)^*$ 可逆。

已知 $AA^* = |A|I_3$，因此 $A^*(A^*)^* = |A^*|I_3$。因此由于 $(A^*)^*$ 可逆，A^* 也可逆（否则有 $A^*(A^*)^* = 0$，则 $A^* = 0$，和 $(A^*)^*$ 可逆矛盾）。同理可得 A 可逆。所以 $\frac{A}{|A|} = \frac{(A^*)^*}{|A^*|}$，而 $|A||A^*| = |A|^3$，所以 $|A^*| = |A|^2$。因此 $(A^*)^* = |A|A$。(这一段结论就是书中 112 页的第 32 题，可直接用?)

在上述证明过程可得 $|(A^*)^*| = |A^*|^2 = |A|^4$，因此 $|A| = \pm 2$（注意到 A 为实矩阵）。所以

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. 解答：将 A，B 写成分块矩阵的形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 都是 2 阶方阵。则

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$$

所以 $B_1 = A_1^{-1}$，$B_2 = A_2^{-1}$。因此

$$BA = B_1A_1 + B_2A_2 = I_2 + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 解答：设行列式对应的矩阵为 A，则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

由 Cauchy-Binet 公式，有

$$|A| = \begin{cases} 1 + x_1 y_1 & \text{当 } n = 1; \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{当 } n = 2; \\ 0 & \text{当 } n \geq 3\text{。} \end{cases}$$

7. 解答：考虑 A 第一行的一个任意元素 a_{1i}，其代数余子式 A_{i1} 为

$$(-1)^{1+i} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

把后面各列都加到第一列上得到

$$\begin{aligned} A_{1i} &= (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} -a_{2,i} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ -a_{3,i} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -a_{n,i} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+i} \begin{vmatrix} a_{2,i} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,i} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,i} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

将第一列依次和其后面紧邻的 $i-2$ 列交换，得到

$$A_{1i} = (-1)^{2+i}(-1)^{i-2} M_{11} = A_{11}$$

证毕。