

1. 设 $A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$, 其中 B 和 C 都可逆, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

类似: 对 n 阶可逆矩阵 A 和 n 维列向量 u, v , 设 $|1 + v^T A^{-1} u| \neq 0$, 证明:

$$A + uv^T \text{ 可逆, 且 } (A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} u v^T A^{-1}$$

2. 设 A 为数域 F 上的 n 阶矩阵, α 是 n 维向量, 若 $A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0$, 证明 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

类似: 设向量 d_1, d_2, \dots, d_t 是齐次方程组 $AX=0$ 的解集, 向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解. 证明: 向量组 $\beta, \beta+d_1, \beta+d_2, \dots, \beta+d_t$ 线性无关.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB=0$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 A 为 $m \times n$ 的实矩阵, 证 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ (已知 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$)

类似: 若 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 证 ① $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

② $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}_{\min}$

③ $\text{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

④ $\text{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

⑤ $\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(A; B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

⑥ 若 $\text{rank}(A) = r$, 则存在满秩矩阵 $G_{m \times r}$, 行满秩 $H_{r \times n}$, 使 $A = GH$, 其中 $\text{rank}(G) = \text{rank}(H) = r$.

5. 写出 2 个非零的 2 阶方阵 A, B , 满足 $A^2=0, B^2=0$. 所有的 $A^2=0$ 的 2 阶方阵的全体是否为 $M_2(\mathbb{R})$ 的线性子空间? 请说明.

6. 设 $A \in M_2(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2$, 且线性方程组 $AX=b$ 有三组解 $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 试证明 $x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$ 也是该方程组的解.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

① 证明 A 可逆的充要条件是 a, b, c 两两不同

② 当 A 可逆时, 求 A 的 LU 分解.

③ 当 $a=1, b=2, c=3$ 时, 求 A^{-1} .

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵.

9. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 证明

① $A^T A$ 是对称矩阵

② 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 是非零向量, 且 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $A^T A x = c x$, 证明 $c \geq 0$

③ 证明 $A^T A$ 的对角线元素都不小于零.

10. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $A^k = 0$, 其中 k 为一个正整数

① 证明 $I_n - A$ 可逆

② 若 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.