线性代数（1）期中考试答案　（A 卷）　2017年11月11日

一、填空题（每题4分，共36分）

1. 37.

2. $A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

3. $-I$.

4. $a\neq 0$.

5. $\begin{bmatrix}|B|A^* & 0\\ 0 & |A|B^*\end{bmatrix}$

6. $-2^4\cdot 3=-48$.

7. $B=\begin{bmatrix}-2&-2\\-4&-2\end{bmatrix}$.

8. $B=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

9. $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$

二、计算题和证明题（共64分）

10.（14分）设$A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一.

(1) 求a的值；

(2) 求A的相抵标准形.

解：（1）$(A\vdots\beta)=\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1\\1&a&1&\vdots&1\\a&1&1&\vdots&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1\\0&a-1&1-a&\vdots&0\\0&0&(a-1)(a+2)&\vdots&a+2\end{bmatrix}$

(做初等行变换），故$a=-2$. (**8分，若a不对，但有合理的计算过程4分。**)

（2）$A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$（做初等变换）.

(6分，若结论不对，但有合理的计算过程3分。（1）中a的对错不影响（2）的得分。）

11. (16分) 计算

(1) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\-1&-1&2\\0&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&0\\-1&-1\\1&2\end{bmatrix}$, (2) $\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1\\1&\cdots&1&1+a_n\end{vmatrix}$

解：（1）$\begin{bmatrix}13&0\\-2&1\\5&0\end{bmatrix}$（**8分，若结果不对，但有合理的计算过程给4分。**）

(2) $a_1a_2\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3a_4\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}$.（**8分，若结果不对，但有合理的计算过程给4分。**）

12. (14 分) 设$A=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix}$.

(1) 求所有与A交换的矩阵B（即满足$AB=BA$).

(2) 求A^n.

解：(1) 设$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$与$A$交换，即$AB=BA$。令$\Delta=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$。

显然A与B交换当且仅当Δ与B交换. 于是$\Delta B=\begin{bmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\0&0&0\end{bmatrix}=B\Delta=\begin{bmatrix}0&b_{11}&b_{12}\\0&b_{21}&b_{22}\\0&b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}$.

因此$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{11}&b_{12}\\0&0&b_{12}\end{bmatrix}$.（**7分.若结果不对，但有合理的计算过程给3分。**)

(2) $A^n=(aI+\Delta)^n=a^nI+C_n^1a^{n-1}\Delta+C_n^2a^{n-2}\Delta^2=\begin{bmatrix} a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & a^n & C_n^1a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ $(n\geq 2)$. （**7分.**)

13. (6分) 设$\{O;e_1,e_2,e_3\}$为一个仿射坐标系，其度量矩阵为$A=\begin{bmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3 \\ e_2\cdot e_1 & e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_3 \\ e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3\cdot e_3 \end{bmatrix}$. 设有非零向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$和实数$\lambda$满足$A\alpha^T=\lambda\alpha^T$. 证明$\lambda>0$.

证明：$0<\alpha\cdot\alpha=\alpha A\alpha^T=\alpha(A\alpha^T)=\lambda\alpha\alpha^T=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. 所以$\lambda>0$. （**6分**。）

14. （14分）设M为n阶可逆方阵，分块为$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中$D$ 为k阶可逆矩阵（$k<n$）.

（1）证明: $|M|=|D||A-BD^{-1}C|$. （2）求M^{-1}.

解：（1）将分块阵M的第二行左乘矩阵$-BD^{-1}$加到第一行得到的矩阵为$\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$. 因为做分块阵的第三类初等行变换不改变行列式的值，所以$|M|=\begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix}=|D||A-BD^{-1}C|$. （**7分**。）

(2) $$(M\vdots I)=\left[\begin{array}{cc:cc} A & B & I_1 & 0 \\ C & D & 0 & I_2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc} A-BD^{-1}C & 0 & I_1 & -BD^{-1} \\ C & D & 0 & I_2 \end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} A-BD^{-1}C & 0 & I_1 & -BD^{-1} \\ 0 & D & -C(A-BD^{-1}C)^{-1} & I_2+C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} I_1 & 0 & (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_2 & -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right].$$

故

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

（**7分**）。

补充题：设四维向量空间V上的线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1). 求σ在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的矩阵.

(2). 设向量γ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$(1,2,3,4)$. 求$\sigma(\gamma)$在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$下的坐标.