样题（一）

说明：

1. 样题仅用于学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

题1. *(5分)* 把矩阵A 的第一行的*2*倍加到第二行，之后互换第一列和第二列，得到的矩阵是$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。那么，矩阵$A$ 是什么？

题2. *(5分)* 试给出一个*2*阶上三角矩阵U，使得U 不是对角阵，且$U^{-1} = U$。

题3. *(5分)* 假设A_1, A_2, A_3, A_4 是同阶可逆方阵，$C = A_1A_2A_3A_4$ 是它们的乘积，试用C^{-1} 和A_1, A_2, A_4 表示A_3^{-1}.

题4. *(8分)* 试写下两个非零的*2*阶方阵A, B 使得$A^2 = B^2 = 0$. 所有满足$A^2 = 0$ 的*2*阶方阵的全体是否是$M_2(\mathbb{R})$ 的线性子空间？若是请证明，若不是请说明原因。

题5. *(8分)* 设$A \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$，且线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有三组解$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 试证明$\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$ 也是该方程组的解。

题6. *(8分)* 设A 是3×4 阶矩阵，A 的零空间$N(A)$ 是$\left\{ c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 求*rref*$(A)$，这里*rref*$(A)$ 指A 的*reduced row echelon form.*

题7. *(10分)* 求下面线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = & 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 2 \end{cases}$$

题8. *(20分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

1. *(6分)* 证明：A 可逆的充分必要条件是a, b, c 两两不同。

2. *(6分)* 当A 可逆时，求A 的LU 分解。

3. *(8分)* 当$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ 时，求A^{-1}.

题9. *(6分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$.

1. *(2分)* 把A 写成$\alpha\beta^T$ 的形式，其中α, β 均是列向量。

2. *(4分)* 计算A^{2019}.

题10. *(8分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. 求所有与$A$ 可交换的矩阵，即所有满足$AB = BA$ 的矩阵B.

题11. *(12分)* 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明:

1. *(3分)* A^TA是对称矩阵;

2. *(6分)* 设$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是非零向量, 且$c \in \mathbb{R}$满足$A^TA\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$. 证明$c \geq 0$;

3. *(3分)* 证明A^TA的对角线元素都不小于零.

题12. *(5分)* 设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且$A^k = 0$, 其中k是一个正整数。

1. *(2分)* 证明$I_n - A$ 可逆,

2. *(3分)* 若$AB + BA = B$, 证明$B = 0$.