样题（一）简要解答

说明：

1. 样题仅用于学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

2. 《样题（一）简要解答》仅给出题目答案与提示。**请同学们在正式考试作答过程中给出详细解题步骤。**

题1. *(5分)* 把矩阵A 的第一行的*2*倍加到第二行，之后互换第一列和第二列，得到的矩阵是$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。那么，矩阵$A$ 是什么？

解答1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

题2. *(5分)* 试给出一个*2*阶上三角矩阵U，使得U 不是对角阵，且$U^{-1}=U$。

解答2. $U=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

题3. *(5分)* 假设$A_1, A_2, \ldots, A_4$ 是同阶可逆方阵，$C=A_1A_2A_3A_4$ 是它们的乘积，试用C^{-1}和A_1, A_2, A_4 表示A_3^{-1}.

解答3. $A_3^{-1}=A_4C^{-1}A_1A_2$.

题4. *(8分)* 试写下两个非零的*2*阶方阵A, B 使得$A^2=B^2=0$. 所有满足$A^2=0$ 的*2*阶方阵的全体是否是$M_2(\mathbb{R})$ 的线性子空间？若是请证明，若不是请说明原因。

解答4. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 记$Nil=\{A\in M_2(\mathbb{R}) : A^2=0\}$. 因为$A, B\in Nil$ 而$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个*2*阶置换阵P，其平方是I_2, 所以$P\notin Nil$，由此可见，Nil 在加法运算下不封闭，故它不是$M_2(\mathbb{R})$ 的子空间。

题5. *(8分)* 设$A \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$，且线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有三组解$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 试证明$\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$ 也是该方程组的解。

解答5. 因为$\mathbf{x_1}$，$\mathbf{x_2}$，$\mathbf{x_3}$ 都是$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解，所以$\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 和$\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组$A\mathbf{x} = 0$ 的解。方程组$A\mathbf{x} = 0$ 的解集$N(A)$ 是$\mathbb{R}^2$ 的线性子空间。既然$N(A)$ 包含$\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}$ 和$\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2}$，那么$N(A)$ 必然包含这两个向量的所有线性组合。又因$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 与$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 不共线，故它们的所有线性组合是$\mathbb{R}^2$，也就是说$N(A) = \mathbb{R}^2$. 所以$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是$\mathbf{x_1} + N(A) = \mathbf{x_1} + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$，特别的$\mathbf{x_4}$ 是该方程组的解。

题6. *(8分)* 设A 是3×4 阶矩阵，A 的零空间$N(A)$ 是$\{c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. 求*rref*$(A)$.

解答6. $R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

题7. *(10分)* 求下面线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 & = & 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 & = & 2 \end{cases}$$

解答7. 方程组的通解是

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

题8. *(20分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

1. *(6分)* 证明：A 可逆的充分必要条件是a, b, c 两两不同。

2. *(6分)* 当A 可逆时，求A 的LU 分解。

3. *(8分)* 当$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ 时，求A^{-1}.

解答8. *1.* 略。

2. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}$。

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

题9. *(6分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$.

1. *(2分)* 把A 写成$\alpha\beta^T$ 的形式，其中α, β 均是列向量。

2. *(4分)* 计算A^{2019}.

解答9. *1.* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $A^{2019} = 17^{2018} A$.

题10. *(8分)* 设$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. 求所有与$A$ 可交换的矩阵。

解答10. 这样的矩阵形如$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{bmatrix}$.

题11. *(12分)* 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明:

1. *(3分)* $A^T A$是对称矩阵;

2. *(6分)* 设$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是非零向量, 且$c \in \mathbb{R}$满足$A^T A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$. 证明$c \geq 0$;

3. *(3分)* 证明A^TA的对角线元素都不小于零.

解答11. 1. $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.

2. 因为$A^TA\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$，所以$\boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^Tc\boldsymbol{x}$. 等式的左边是$(A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x})$, 这是$m$ 维实向量$A\boldsymbol{x}$ 的范数平方，故是一个≥ 0 的数。等式的右边是$c\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$，其中$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ 是n 维非零向量$\boldsymbol{x}$ 的范数平方，故是一个正实数。综上有$c\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \geq 0$, 所以$c \geq 0$.

3. 由矩阵乘法的定义知A^TA 的(i,i)-元素是A^T 的第i 行与A 的第i 列的点积，而A^T 的第i 行就是A 的第i 列（在不计转置意义下），所以A^TA 的(i,i)-元素是A 的第i 列与自身的内积，也就是它的范数平方，这总是一个非负的实数。

题12. *(5分)* 设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且$A^k = 0$, 其中k是一个正整数。

1. *(2分)* 证明$I_n - A$ 可逆，

2. *(3分)* 若$AB + BA = B$, 证明$B = 0$.

解答12. 1. 验证$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k) = I_n - A^k = I_n$，所以$I_n - A$ 可逆，且$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$.

2. 把$AB + BA = B$ 重新写成$AB = B(I_n - A)$，左乘A 得到

$$A^2B = A(AB) = AB(I_n - A) = B(I_n - A)^2,$$

再乘一次A 得到

$$A^3B = AA^2B = AB(I_n - A)^2 = B(I_n - A)^3,$$

以此类推，不难看出对任意的正整数m，

$$A^mB = B(I_n - A)^m$$

成立。特别的，等式对$m = k$ 成立。当$m = k$ 时，等式的左边是$A^kB = 0B = 0$, 等式的右边是$B(I_n - A)^k$, 故$0 = B(I_n - A)^k$. 又由1知$I_n - A$ 可逆，所以它的k 次幂也可逆，右乘$(I_n - A)^{-k}$ 即得$B = 0$.