

系、班_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题 (每题4分, 共36分, 请直接填在试卷的横线上)

1. 设 $\alpha = (4, -1, 5)$, $\beta = (1, 2, 3)$, $\gamma = (3, 1, 1)$ 为一右手直角坐标系中的三个向量, 则以 (α, β, γ) 为棱边的平行六面体的体积为_____.

2. 设 A 为3阶可逆矩阵, 将 A 的第1列的 a 倍加到第2列得到的矩阵为 B , 则

$$A^{-1}B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 设 $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$, 矩阵 $A = -I + \alpha^T \alpha$, $B = I + 2\alpha^T \alpha$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 线性方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 有解的充分必要条件是: _____.

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 伴随矩阵分别为 A^*, B^* , 则矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩

$$\text{阵 } M^* = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 设 A, B 为3阶矩阵, 且 $|A| = 3$, $|B| = -2$, 则分块矩阵 $D = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -B & 0 \end{bmatrix}$ 的行列式 $|D| = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 二阶方阵 B 满足 $BA - B + 2I = 0$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 在直角坐标系下, 点 $A(0, 1, 0)$ 关于平面 $2x - y + z = 0$ 的对称点 B 的坐标为 $B = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 已知右手直角坐标系中一点 $A(0, 1, -1)$, 及两个平面 $\pi_1 : -x + 4y + 2 = 0$, $\pi_2 : x + 2y + 3z = 0$, 则过点 A 且同时平行于 π_1 和 π_2 的直线的标准方程为: _____.

二、计算题和证明题 (共64分)

10. (14分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求 A 的相抵标准形.

11. (16分) 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

12. (14分) 设 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

- (1) 求所有与 A 交换的矩阵 B (即满足 $AB = BA$).
- (2) 求 A^n .

13. (6分) 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为一个仿射坐标系, 其度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{bmatrix}$.

设有非零向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 和实数 λ 满足 $A\alpha^T = \lambda\alpha^T$. 证明 $\lambda > 0$.

14. (14分) 设 M 为 n 阶可逆方阵, 分块为 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中 D 为 k 阶可逆矩阵 ($k < n$).

- (1) 证明: $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$.
- (2) 求 M^{-1} .