期中样题

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

1. 计算$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$。

2. 判断下列矩阵是否可逆并给出理由。

$$A = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. 给定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) 矩阵A是否存在LU分解？若是，求出它的LU分解；若否，说明理由。

   (b) 矩阵B是否可逆？若是，求出逆；若否，说明理由。

4. 给定线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$。当且仅当$a$为何值时，向量组 $\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2 + 2a\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1 + 2a\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2 + a\boldsymbol{v}_3$ **不是** $\mathbb{R}^3$的一组基？

5. 给定两个线性方程组

$$
\text{(I)} \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = m^2, \\ n^2x_2 - x_3 + x_4 = n + 8, \\ 2x_1 - tx_2 - x_3 - 3x_4 = 2m - n. \end{cases}
$$

(a) 求方程组(I)的解集。

(b) 是否存在m, n, t，使得方程组(II)与方程组(I)的解集相同？若是，给出具体值；若否，说明理由。

6. 设$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$。

(a) 求A的秩，并分别计算A的零空间、列空间、行空间的一组基。

(b) 令B为A去掉第二行得到的矩阵，即$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$。为上一小题中解出的$A$的零空间的基添加向量，而得到$B$的零空间的一组基。

(c) 求一个行简化阶梯形矩阵R，使得R的零空间为$\text{span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_5)$。

(d) 是否存在4阶方阵B，其四个列向量中有两个分别为$\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$，且$B$的零空间为$\text{span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_5)$？若是，举一例并验证满足条件；若否，说明理由。

7. 对n阶方阵A，若存在正整数k，使得$A^k = O$，则称A幂零。

(a) 证明：若A幂零，则对任意数t，tA幂零。

(b) 证明：若A幂零，则A^T幂零。

(c) 证明：若A幂零，则$I_n + A$可逆。

(d) 证明：若A幂零，则$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ I_n & 2021I_n \end{bmatrix}$可逆。

(e) 证明：若A幂零，则$\text{rank}(A) < n$。

(f) 证明：若2阶方阵A满足$A^{2021} = O$，则$(I_2 - A)^{-1} = I_2 + A$。

(g) 求一个所有元素都非零但幂零的2阶方阵。

注：I_n是n阶单位矩阵。