期中样题

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

1. 计算 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$。

   答案:

   $$\begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.5 \\ -2.5 & 1.5 & 1.5 \\ -6 & -1 & 1 \end{bmatrix}。$$

   法一：消元：

   $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -3 & -3 \end{array}\right]$$
   $$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

   法二：先计算逆，再乘。$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$。

2. 判断下列矩阵是否可逆并给出理由。

$$A=\begin{bmatrix}10\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&3&4&0\\-1&5&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&5\\4&0\\0&-2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}9&1&2&-5\\3&7&1&-1\\4&0&5&0\\0&-2&0&3\end{bmatrix}.$$

答案:

(a) A不可逆，因为A是3阶秩1矩阵；

(b) B可逆，因为$\text{rank}(A)=\text{rank}(B^TB)=\text{rank}(B)=2$；

(c) C可逆，因为A对角占优。

3. 给定

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\1&1&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0&1&2&3\\0&0&0&2&5&7\\0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(a) 矩阵A是否存在LU分解？若是，求出它的LU分解；若否，说明理由。

(b) 矩阵B是否可逆？若是，求出逆；若否，说明理由。

答案:

(a) 存在，$A=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\&1&1\\&&-2\end{bmatrix}$。

(b) 可逆，$B=\begin{bmatrix}&A\\E_{12}&\end{bmatrix}$，故$B^{-1}=\begin{bmatrix}&E_{12}^{-1}\\A^{-1}&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\3.5&-1.5&0.5&0&0&0\\-3.5&1.5&0.5&0&0&0\\1.5&-0.5&-0.5&0&0&0\end{bmatrix}$。

4. 给定线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$。当且仅当$a$为何值时，向量组 $\boldsymbol{v}_1+a\boldsymbol{v}_2+2a\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1+2a\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_2+a\boldsymbol{v}_3$ **不是** $\mathbb{R}^3$的一组基？

答案:

$$\begin{bmatrix} v_1+av_2+2av_3 & v_1+2av_2+v_3 & v_2+av_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{bmatrix}$$ 为基 $\iff$ 方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆。由列变换

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & 1 \\ 2a & 1-2a & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a \\ 2a & a & 1-2a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 2a & a & 1-2a-a^2 \end{bmatrix}$$

或行变换

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1-2a & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1-a(a+2) \end{bmatrix},$$

A 可逆 $\iff 1-2a-a^2 \neq 0 \iff a \neq -1 \pm \sqrt{2}$。

5. 给定两个线性方程组

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1+x_2 \quad\quad -2x_4 = -3, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4 = 1, \\ 3x_1-x_2-x_3 \quad\quad = 3, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4 = 11. \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4 = m^2, \\ n^2x_2-x_3+x_4 = n+8, \\ 2x_1-tx_2-x_3-3x_4 = 2m-n. \end{cases}$$

(a) 求方程组(I)的解集。

(b) 是否存在m,n,t，使得方程组(II)与方程组(I)的解集相同？若是，给出具体值；若否，说明理由。

答案:

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. 解集为$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$。

(b) 法一：若解集相同，则两方程组的行简化阶梯形除零行外相同。对(II)消元，

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & m & -1 & -1 & m^2\\ 0 & n^2 & -1 & 1 & n+8\\ 2 & -t & -1 & -3 & 2m-n\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c}1 & m & -1 & -1 & m^2\\ 0 & n^2 & -1 & 1 & n+8\\ 0 & -t-2m & 1 & -1 & 2m-n-2m^2\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c}1 & m & -1 & -1 & m^2\\ 0 & n^2 & -1 & 1 & n+8\\ 0 & n^2-t-2m & 0 & 0 & 2m-2m^2+8\end{array}\right] \xrightarrow{(*)} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & m & -1 & -1 & m^2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & p\\ 0 & n^2 & -1 & 1 & n+8\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & m^2-mp\\ 0 & 1 & 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & -1 & 1 & n+8-n^2p\end{array}\right], \left(\begin{array}{ll}(*)\text{：} & \text{考虑到系数矩阵的秩，} n^2-t-2m \neq 0\text{，}\\ & \text{令} p = \dfrac{2m-2m^2+8}{n^2-t-2m}\text{。}\end{array}\right)$$

显然不存在m, n, t使得二者解集相同。

法二：解集相同，故方程组(I)的特解$\begin{bmatrix}-2\\-1\\8\\0\end{bmatrix}$也是方程组(II)的解，代入有

$$\begin{cases}(-2)+(-1)m-(-8)=m^2,\\ (-1)n^2-(-8)=n+8,\\ 2(-2)-(-1)t-(-8)=2m-n.\end{cases}$$ 因此$m \in \{2,-3\}, n \in \{0,-1\}$而$t = 2m-n-4$。由于解集相同，二者系数矩阵的零空间也相同，故$\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$满足$\begin{cases}1+m-2-1=0,\\ n^2-2+1=0,\\ 2-t-2-3=0.\end{cases}$

因此$m=2, n \in \{1,-1\}, t=-3$。综上即有$m=2, n=-1, t=-3$。最后验证零空间相同，事实上，(II)的系数矩阵消元有$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，显然零空间维数不同，故不存在这样的$m, n, t$。

6. 设$A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8\end{bmatrix}$。

(a) 求A的秩，并分别计算A的零空间、列空间、行空间的一组基。

(b) 令B为A去掉第二行得到的矩阵，即$B=\begin{bmatrix}1&-3&0&0&2\\1&-3&1&1&-6\\0&0&1&1&-8\end{bmatrix}$。为上一小题中解出的$A$的零空间的基添加向量，而得到$B$的零空间的一组基。

(c) 求一个行简化阶梯形矩阵R，使得R的零空间为$\text{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_5)$。

(d) 是否存在4阶方阵B，其四个列向量中有两个分别为$\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$，且$B$的零空间为$\text{span}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_5)$？若是，举一例并验证满足条件；若否，说明理由。

答案:

(a) $\text{rref}(A)=\begin{bmatrix}1&-3&0&0&2\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1^T\\\boldsymbol{r}_2^T\\\boldsymbol{r}_3^T\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$。由此得$\text{rank}(A)=3$，$\mathcal{N}(A)$的一组基为$\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\3\\5\\1\end{bmatrix}$；$\mathcal{R}(A)$的一组基为$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$；$\mathcal{R}(A^T)$的一组基为$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$。

(b) $\text{rref}(B)=\begin{bmatrix}1&-3&0&0&2\\0&0&1&1&-8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\dim\mathcal{N}(B)=3$，只需添加一个向量，如$\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}-2\\0\\8\\0\\1\end{bmatrix}$。

(c) 法一：先得到线性等价的向量组$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-\frac{5}{4}\\0\\1\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$。

法二：列出方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\\boldsymbol{a}_5^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=0$，对系数矩阵化简：$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&4&-6&-8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&5&4\\0&1&-4&-4\end{bmatrix}$。得到的解$\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\4\\1\\0\end{bmatrix}$排成行向量再化简即可得$R$：$\begin{bmatrix}-5&4&1&0\\-4&4&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$。

(d) 存在，$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 1 & 1 & -2 & \frac{9}{4} \\ 1 & 1 & -2 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$。不难验证$B$的前两列是$\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$。注意$\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$线性无关，因此$\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(R)$。

7. 对n阶方阵A，若存在正整数k，使得$A^k = O$，则称A幂零。

(a) 证明：若A幂零，则对任意数t，tA幂零。

(b) 证明：若A幂零，则A^T幂零。

(c) 证明：若A幂零，则$I_n + A$可逆。

(d) 证明：若A幂零，则$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ I_n & 2021 I_n \end{bmatrix}$可逆。

(e) 证明：若A幂零，则$\operatorname{rank}(A) < n$。

(f) 证明：若2阶方阵A满足$A^{2021} = O$，则$(I_2 - A)^{-1} = I_2 + A$。

(g) 求一个所有元素都非零但幂零的2阶方阵。

注：I_n是n阶单位矩阵。

答案:

(a) 设$A^k = O$，则$(tA)^k = t^k A^k = O$。

(b) 设$A^k = O$，则$(A^T)^k = (A^k)^T = O$。

(c) 设$A^k = O$，不妨假设k为奇数，不然$A^{k+1} = O$满足条件。则$I_n = I_n + A^k = (I_n + A)(I_n - A + A^2 - \cdots + A^{k-1})$，立得$I_n + A$可逆。

(d) $\begin{bmatrix} I_n & -A \\ I_n & 2021 I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -A \\ O & 2021 I_n + A \end{bmatrix}$可逆 $\iff$ $2021 I_n + A$可逆 $\iff$ $I_n + \frac{1}{2021} A$可逆。而A幂零，由(1)，$\frac{1}{2021} A$幂零，由(3)，$I_n + \frac{1}{2021} A$可逆。

(e) 反设A满秩，则A可逆，对任意k，A^k可逆，不可能为零。

(f) 由(5)，$\operatorname{rank}(A) \le 1$。$\operatorname{rank}(A) = 0$，显然。$\operatorname{rank}(A) = 1$时，存在向量$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，使得$A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$。而$O = A^k = (\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u})^{k-1} \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T \iff \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u} = 0 \iff A^2 = O \iff (I_2 - A)^{-1} = (I_2 + A)$。

(g) 形如$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$且$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u} = 0$即可。