新生基础大赛 (线性代数)

2020 年 10 月

以下各题中，对于一个矩阵 A，$\mathrm{r}(A)$ 记它的秩，A^T 是 A 的转置.

1. (15分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & \lambda_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & \lambda_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \lambda_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } a \neq b).$$

2. (15分) 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

的全部解.

3. (15分) 设 A 是一个 3 阶方阵, P 是一个 3 阶可逆矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

记 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 P 的列向量, 即 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 并且令

$$Q = (\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2).$$

证明 Q 可逆, 并求 $Q^{-1}AQ$.

4. (15分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I_n - A - B$ 可逆. 证明: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

5. (15分) 设 A 是一个 $m \times n$ 实矩阵, $\beta \in \mathbb{R}^m$ 是一个列向量. 证明: n 元线性方程组 $A^TAx = A^T\beta$ 总有解.

6. (15分) 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中 n 个互不相同的数. 求下面线性方程组的解:

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-2}x_2 + \cdots + +a_1x_{n-1} + x_n = -a_1^n \\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + +a_2x_{n-1} + x_n = -a_2^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-2}x_2 + \cdots + +a_nx_{n-1} + x_n = -a_n^n. \end{cases}$$

7. (10分) 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 矩阵, $r = \mathrm{r}(A)$, $s = \mathrm{r}(B)$, 并且 $\mathrm{r}(A+B) = r + s$. 证明: 存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(上面两个等式右边是具有相同的分块方法的分块矩阵.)

参考答案

1. 解: 首先,

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & \lambda_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & \lambda_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \lambda_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & a & \cdots & a & 0 \\ b & \lambda_2 & a & \cdots & a & 0 \\ b & b & \lambda_3 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & \lambda_n - a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - b & a-b & a-b & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & \lambda_2 - b & a & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - b & \cdots & a-b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} - b & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} + (\lambda_n - a) D_{n-1}$$

$$= (\lambda_n - a) D_{n-1} + a \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - b).$$

在 D_n 中将 a 与 b 互换, 得到的行列式是 D_n 的转置. 因此,

$$D_n = (\lambda_n - b) D_{n-1} + b \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - a).$$

由上述两式解得

$$D_n = \frac{1}{b-a} \left(b \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) - a \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b) \right).$$

2. 解: 将方程组的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 & -17 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 原方程组有解. 取它的一个特解 $\gamma = (6, -1, 0, 0)^T$. 另外, 其相伴的齐次线性方程组有基础解系

$$\eta_1 = (-26, 7, 1, 0)^T,\ \eta_2 = (17, -5, 0, 1)^T.$$

综上得到, 原方程组的全部解为

$$\gamma + c_1\eta_1 + c_2\eta_2, \ \ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{F}.$$

3. 证明: 根据题设, $Q = PX$, 这里

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算, 有 $|X| = 1$. 因此, X 可逆. 从而 $Q = PX$ 可逆, 并且

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ = X^{-1}P^{-1}APX = X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \\ = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. 证明: 由于 $I_n - A - B$ 可逆, 所以

$$n = \mathrm{r}(I_n - A - B) \le \mathrm{r}(I_n - A) + \mathrm{r}(B),$$

即

$$\mathrm{r}(B) \ge n - \mathrm{r}(I_n - A).$$

由 $A^2 = A$ 知 $A(I_n - A) = 0$. 所以 $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(I_n - A) \le n$, 即 $\mathrm{r}(I_n - A) \le n - \mathrm{r}(A)$. 综合得到,

$$\mathrm{r}(B) \ge n - \mathrm{r}(I_n - A) \ge n - (n - \mathrm{r}(A)) = \mathrm{r}(A).$$

同理, $\mathrm{r}(A) \ge \mathrm{r}(B)$. 因此, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

5. 证明: 由于 A 是实矩阵, 所以齐次线性方程组 $A^TAx = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解. 因此,

$$\mathrm{r}(A^TA) = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^T).$$

记 $A^T=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$. 于是 A^TA 的每一个列向量以及 $A^T\beta$ 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性表示. 所以

$$\mathrm{r}\big((A^TA\ \ A^T\beta)\big)\leq \mathrm{r}(A^T),$$

其中 $(A^TA\ \ A^T\beta)$ 表示由 A^TA 与 $A^T\beta$ 构成的一个 $n\times(n+1)$ 矩阵. 另一方面,

$$\mathrm{r}(A^T)=\mathrm{r}(A^TA)\leq \mathrm{r}\big((A^TA\ \ A^T\beta)\big).$$

由此得到, $\mathrm{r}(A^TA\ \ A^T\beta)=\mathrm{r}(A^TA)$, 即线性方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩. 因此, 该方程组总有解.

6. 解: 该方程组的系数矩阵的行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1\\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1\end{vmatrix}.$$

根据 Vandermonde 行列式知

$$D=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)\neq 0.$$

由 Cramer 法则知, 该方程组有唯一解, 记作

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n.$$

考虑一元多项式

$$f(x)=x^n+k_1x^{n-1}+\cdots+k_{n-1}x+k_n.$$

由于 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 是方程组的解, 所以对于 $1\leq i\leq n$, 有

$$a_i^{n-1}k_1+a_i^{n-2}k_2+\cdots+a_ik_{n-1}+k_n=-a_i^n,$$

即

$$f(a_i)=a_i^n+k_1a_i^{n-1}+k_2a_i^{n-2}+\cdots+k_{n-1}a_i+k_n=0.$$

由于 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 互不相同, 所以 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 $f(x)$ 的所有根. 再由根与系数的关系 (韦达定理), 得到

$$\begin{cases} k_1=-(a_1+a_2+\cdots+a_n),\\ k_2=\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j,\\ \cdots\cdots\cdots\\ k_n=(-1)^na_1a_2\cdots a_n.\end{cases}$$

7. 证明: 首先, 存在 m 阶可逆矩阵 P_1 与 n 阶可逆矩阵 Q_1 使得

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\mathrm{r}(P_1BQ_1)=s$, 并且

$$\mathrm{r}(P_1AQ_1+P_1BQ_1)=\mathrm{r}(P_1(A+B)Q_1)=\mathrm{r}(A+B)=r+s.$$

记 $e_1,\ldots,e_r$ 是 P_1AQ_1 的前 r 个行向量, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 是 P_1BQ_1 的所有行向量. 于是 $P_1AQ_1+P_1BQ_1$ 的行向量为

$$e_1+\beta_1,\ldots,e_r+\beta_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m.$$

由 $\mathrm{r}(P_1AQ_1+P_1BQ_1)=r+s$ 得到 $e_1+\beta_1,\ldots,e_r+\beta_r$ 线性无关, 并且

$$\mathrm{r}(\{\beta_{r+1},\ldots,\beta_m\})=s.$$

因此, $\beta_1,\ldots,\beta_r$ 可以由 $\beta_{r+1},\ldots,\beta_m$ 线性表示. 记

$$P_1BQ_1=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad 这里\ B_1\in M_{r,n}(\mathbb{F}),\ B_2\in M_{m-r,n}(\mathbb{F}).$$

根据上面讨论, 存在一个 $r\times(m-r)$ 矩阵 C 使得

$$\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

令

$$P_2=\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}P_1.$$

于是

$$P_2AQ_1=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2BQ_1=\begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

记 $B_2=\begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $B_{21}\in M_{m-r,r}(\mathbb{F})$, $B_{22}\in M_{m-r,n-r}(\mathbb{F})$. 类似于上面的讨论, $\mathrm{r}(B_{22})=s$, 并且存在矩阵 $D\in M_{m-r,r}(\mathbb{F})$ 使得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ D & I_{m-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

进一步, 存在 $m-r$ 阶逆矩阵 P_3 与 $n-r$ 阶可逆矩阵 Q_3 使得

$$P_3B_{22}Q_3=\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后, 令

$$P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} P_1, \quad Q = Q_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ D & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix},$$

即为所求矩阵.