

电子电路与系统基础(B2)---非线性电路

第12讲：正反馈与负阻

李国林

清华大学电子工程系

B 班课程 内容安排

第一学期：线性	序号	第二学期：非线性
电路定律	1	器件基础
电阻电源	2	二极管
电容电感	3	MOSFET
信号分析	4	BJT
分压分流	5	反相电路
正弦稳态	6	数字门
时频特性	7	放大器
期中复习	8	期中复习
RLC 二阶	9	负反馈
二阶时频	10	差分放大
受控源	11	频率特性
网络参量	12	正反馈
典型网络	13	振荡器
作业选讲	14	作业选讲
期末复习	15	期末复习

正反馈与负阻 内容

■ 运放正反馈

- 施密特触发器
- S型负阻
- N型负阻

■ 晶体管正反馈

- S型负阻
- N型负阻

■ 负阻实现的有源功能

- 放大
- 振荡

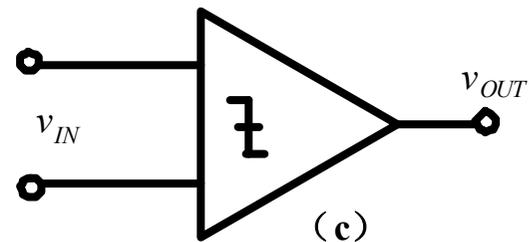
从输出端有反馈路径引回输入端，假设该闭合路径上任意一处有微小扰动，环路一周该扰动被抑制，则为负反馈；反之，如果环路一周扰动被加强，则属正反馈

负反馈设计是为了稳定系统性能，如稳定放大器的直流工作点、放大倍数等

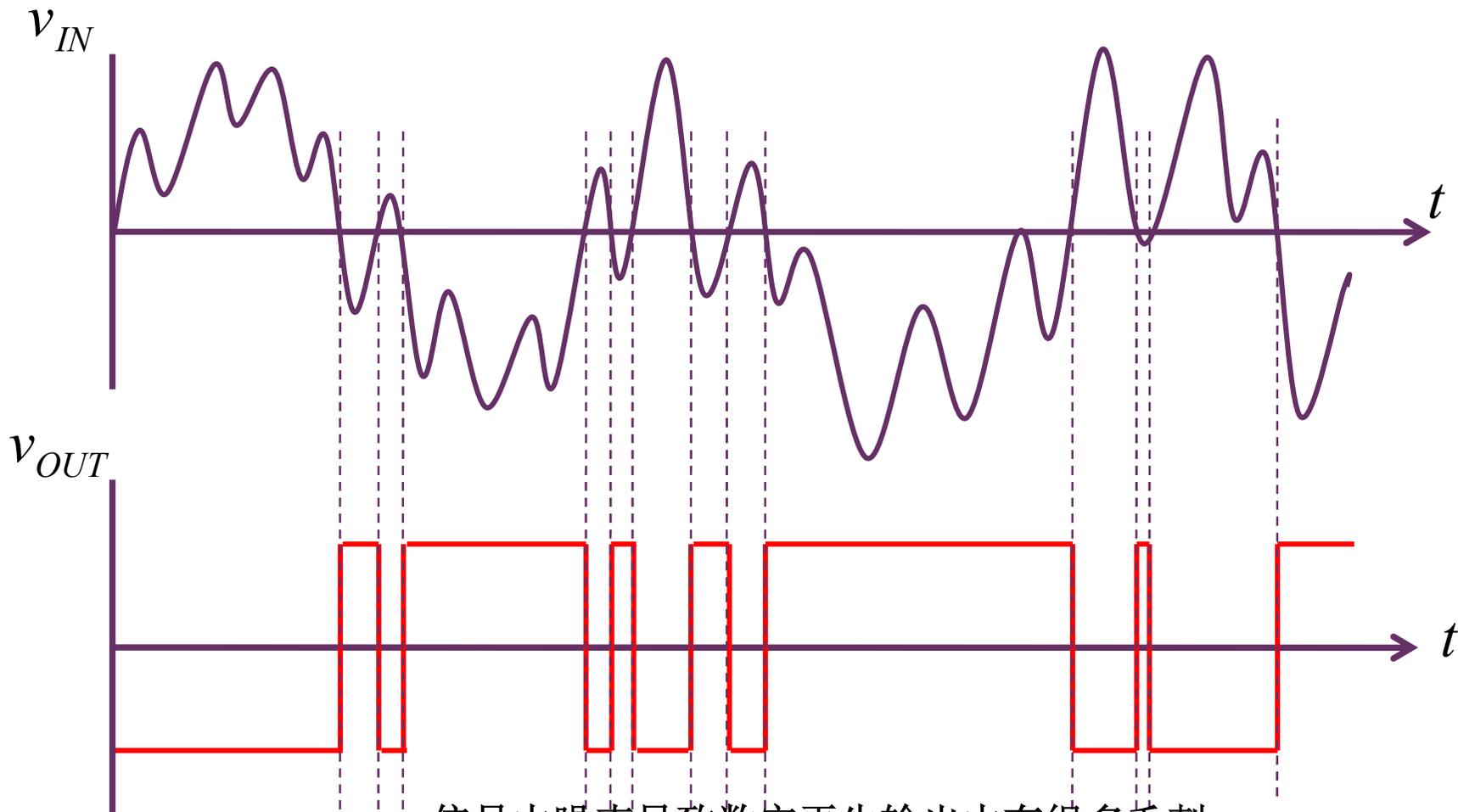
正反馈则可实现高增益放大，自激振荡，等效负阻，**01**状态存储

一、运放电路

运放负反馈：理想受控源，放大器、滤波器



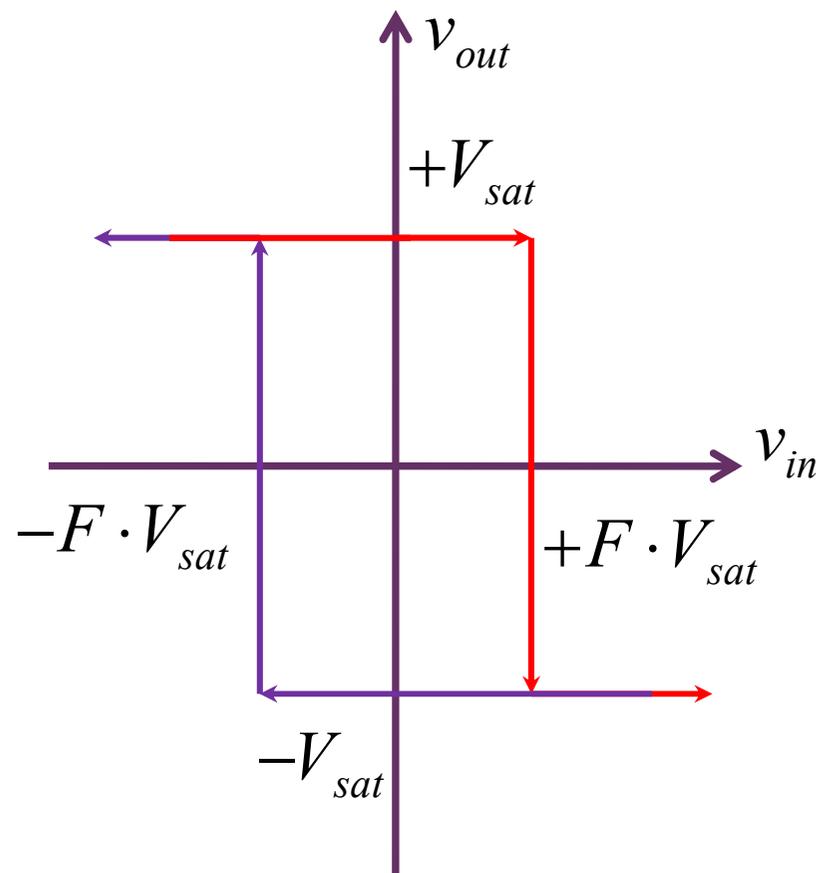
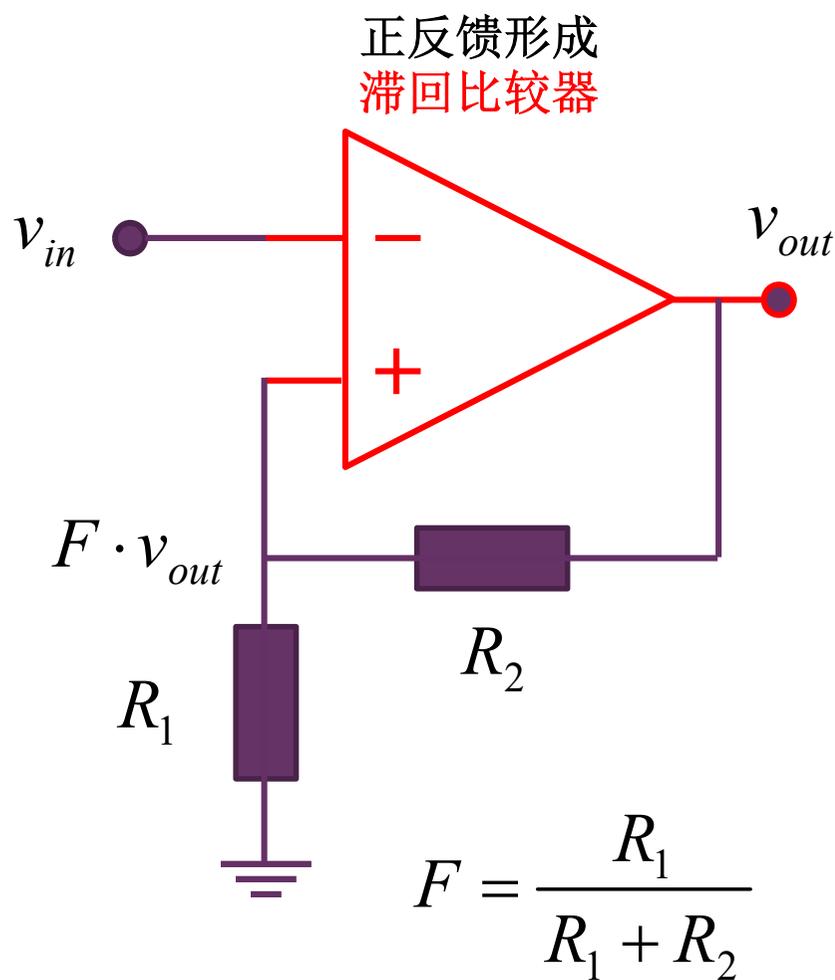
- 过零比较器（开环运放）可以恢复有噪声的数字信号，但存在毛刺问题



信号中噪声导致数字再生输出中有很多毛刺

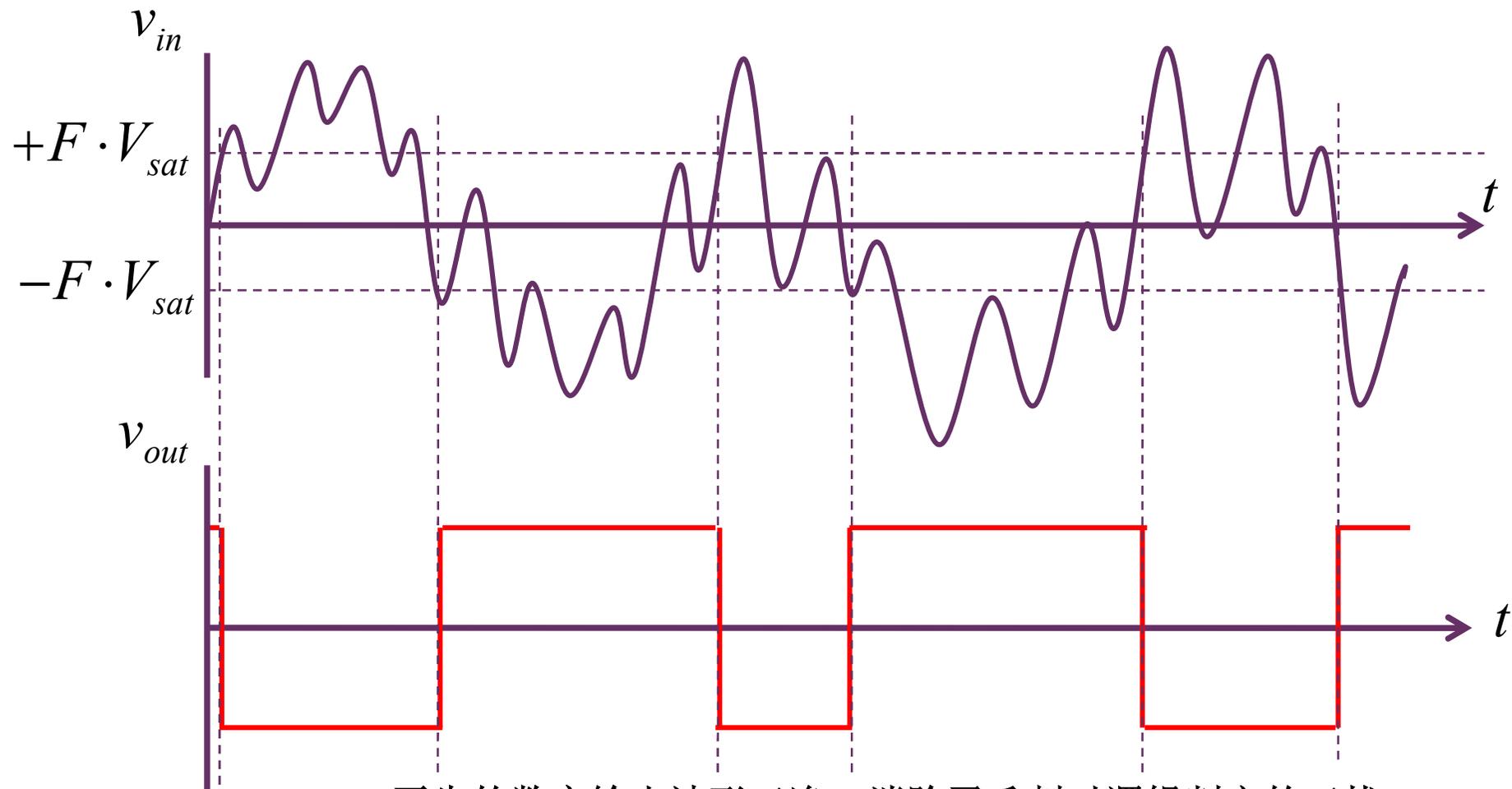
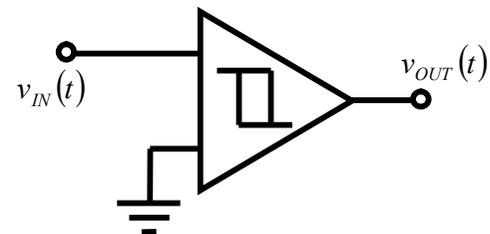
正反馈形成的滞回特性具有保持记忆能力

Schmitt Trigger施密特触发器



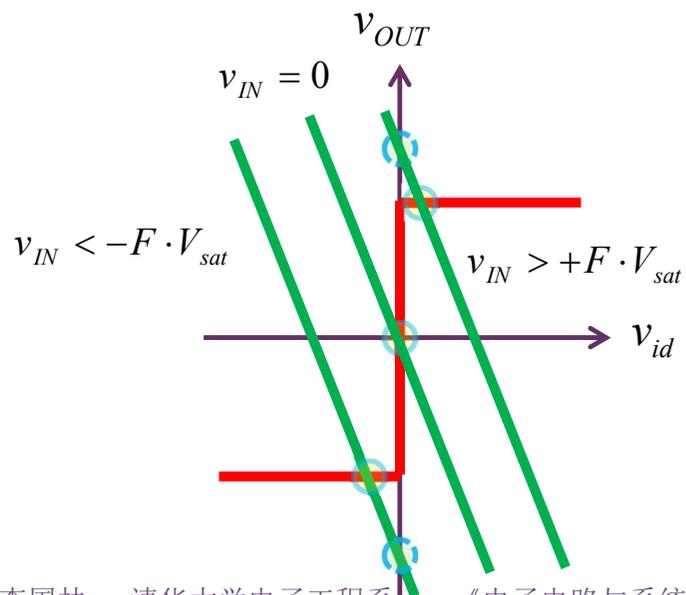
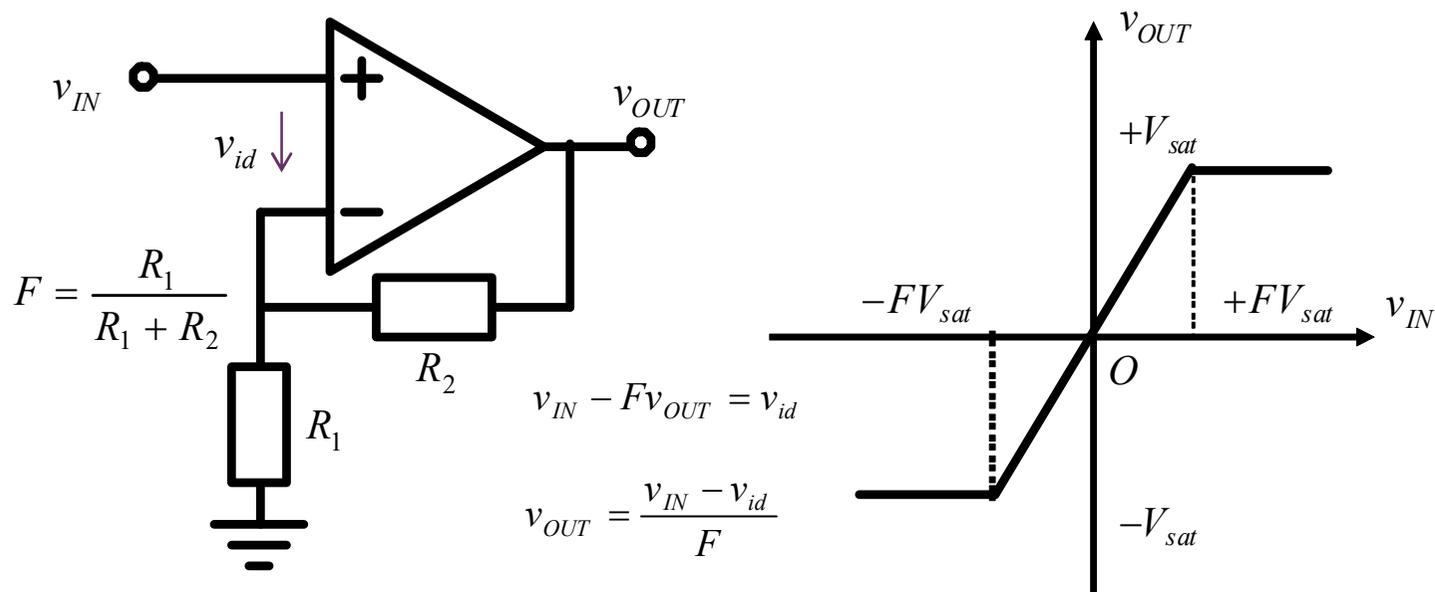
Hysteresis: 滞回特性
具有记忆功能

滞回特性 (记忆能力) 可消除毛刺



再生的数字输出波形干净，消除了毛刺对逻辑判定的干扰

负反馈具有唯一解

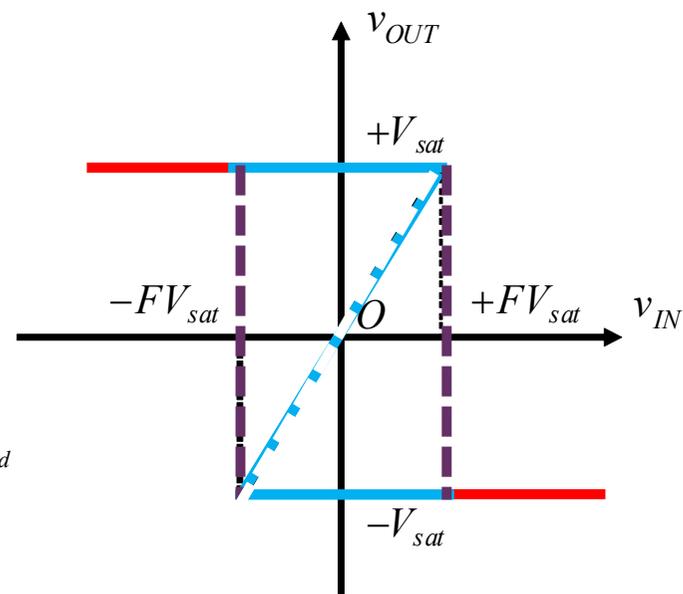
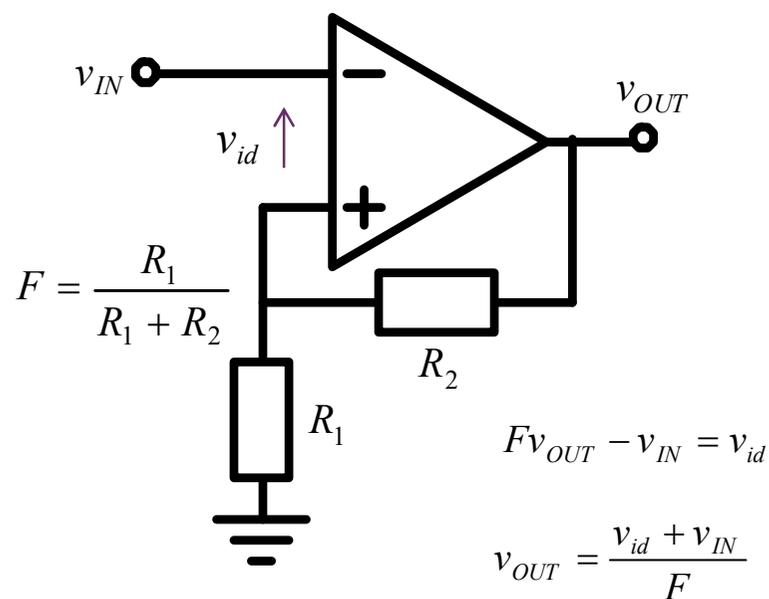


线性区

$$v_{IN} = F \cdot v_{OUT}$$

$$v_{OUT} = \frac{1}{F} v_{IN} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{IN}$$

正反馈的解可能非唯一

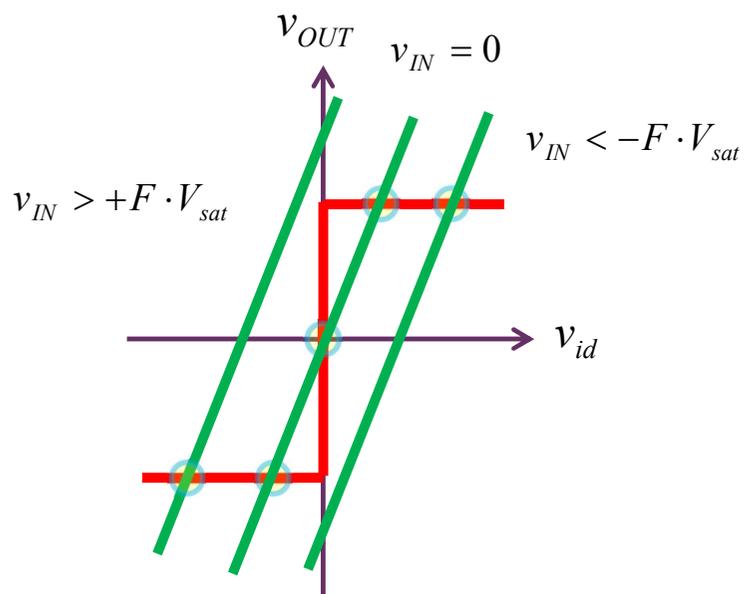


线性区 $v_{IN} = F \cdot v_{OUT}$

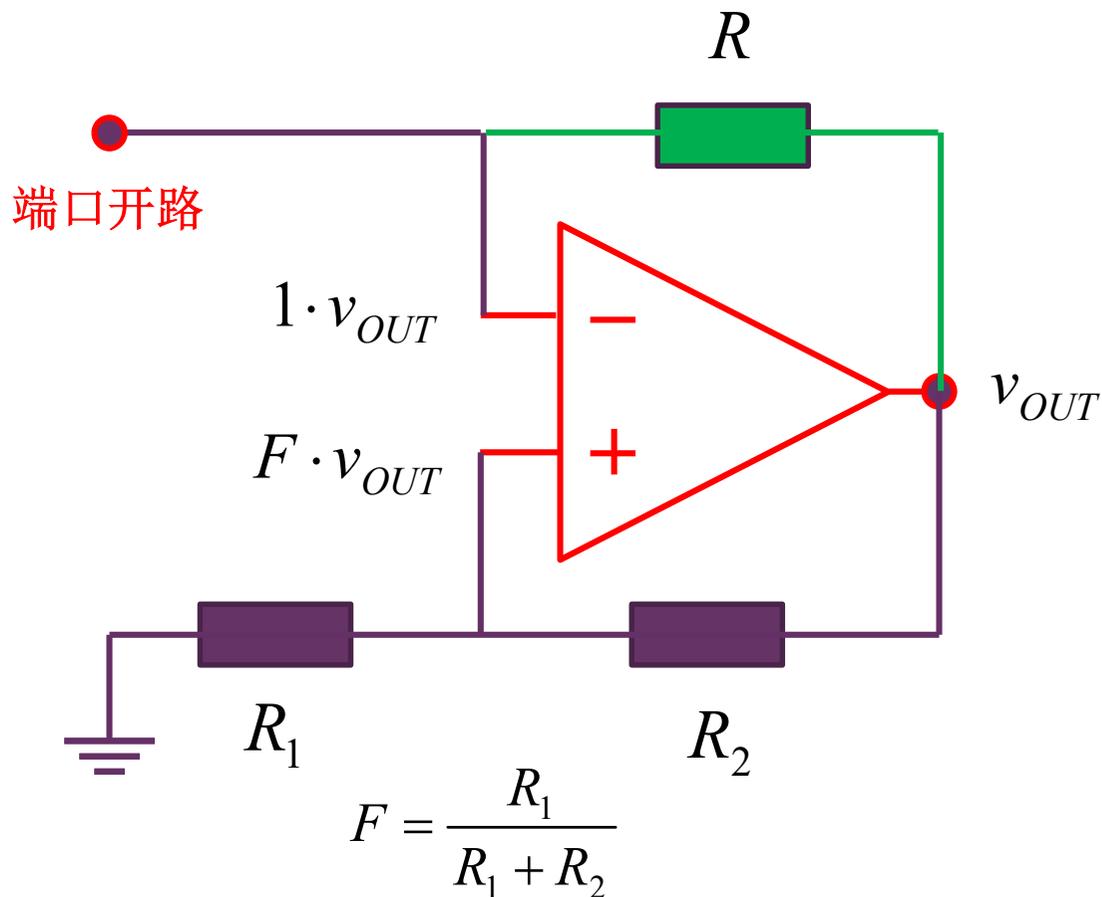
$$v_{OUT} = \frac{1}{F} v_{IN} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{IN}$$

不稳定区：待不住

理论转移特性曲线
实际转移特性曲线：滞回曲线



正反馈无法待在线性区 添加负反馈使其待在线性区



可能性1: 运放线性区

$$v_{OUT} = F \cdot v_{OUT}$$

$$v_{OUT} = 0$$



可能性2: 运放正饱和区

$$F \cdot V_{sat} > V_{sat}$$



可能性3: 运放负饱和区

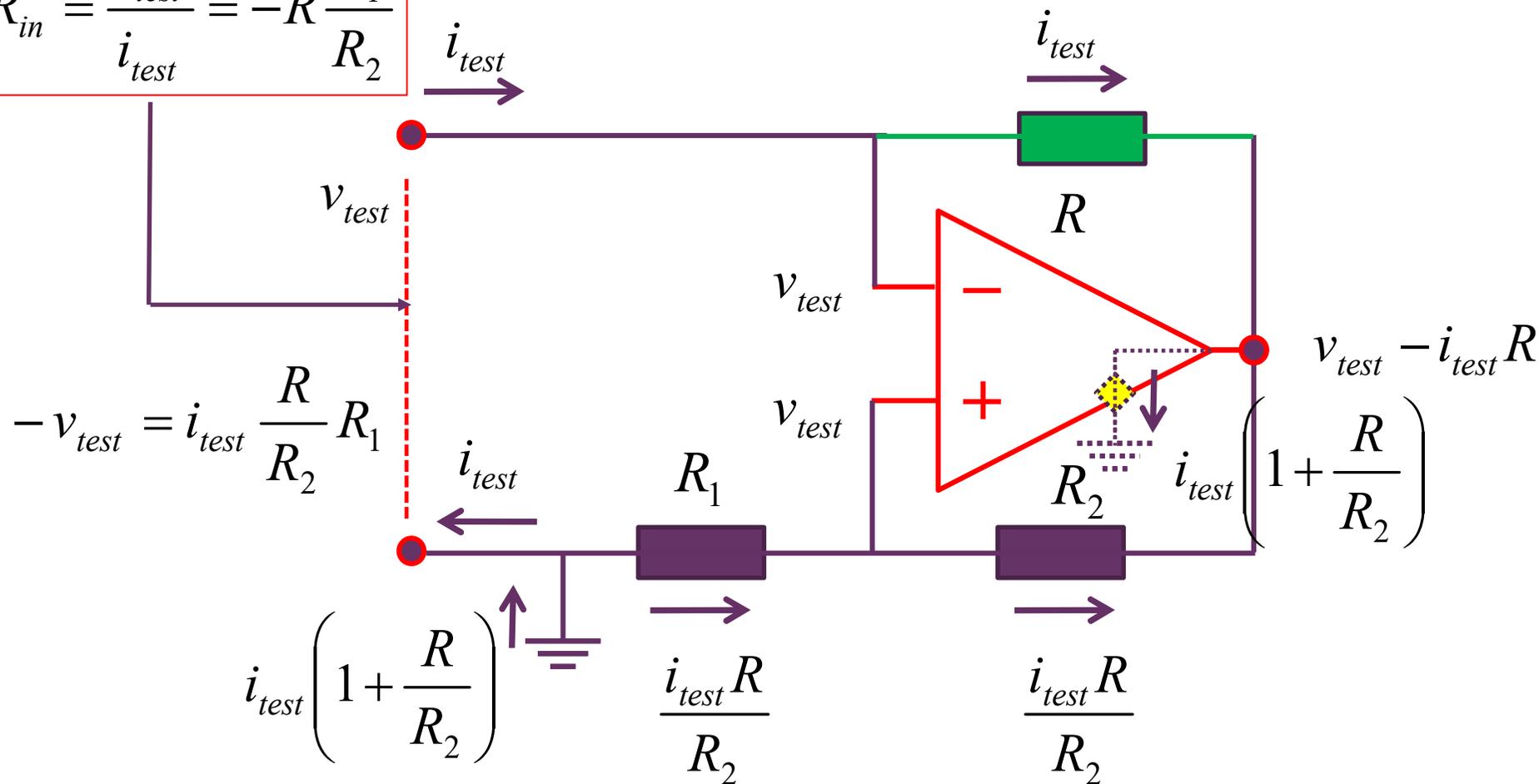
$$-V_{sat} > F \cdot (-V_{sat})$$



负反馈高于正反馈，输入开路的情况下，只能工作在线性区
直流工作点在线性区（中心点位置）

工作在线性区且存在正反馈 意味着负阻的产生

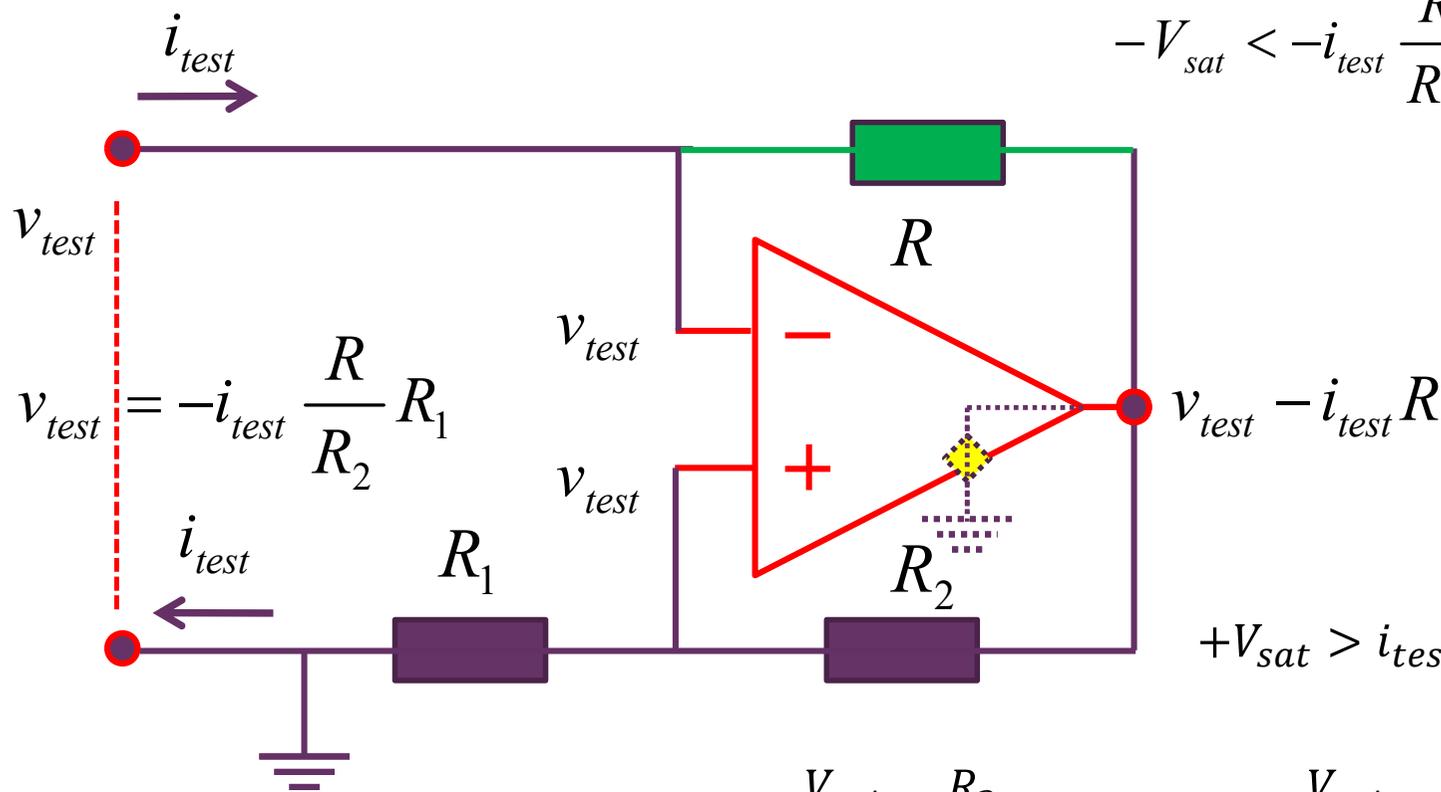
$$R_{in} = \frac{v_{test}}{i_{test}} = -R \frac{R_1}{R_2}$$



等效负阻约束：运放工作在线性区

$$-V_{sat} < v_{test} - i_{test} R < +V_{sat}$$

$$-V_{sat} < -i_{test} \frac{R}{R_2} R_1 - i_{test} R < +V_{sat}$$



$$v_{test} = -i_{test} \frac{R}{R_2} R_1$$

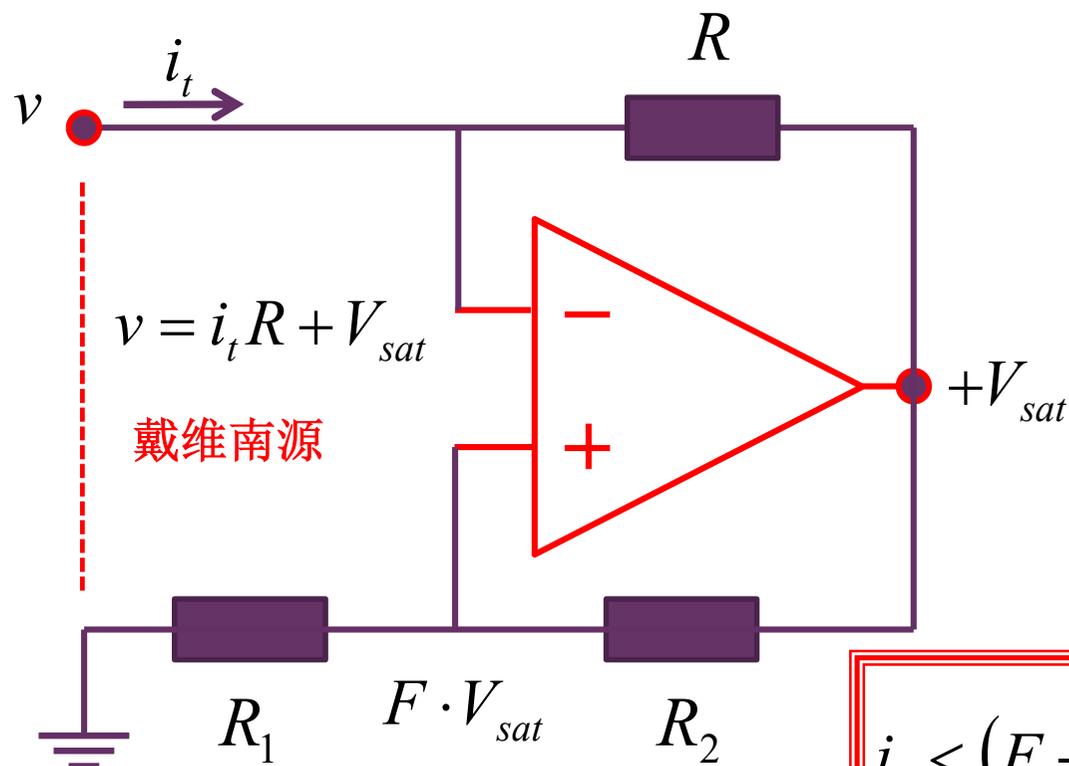
$$+V_{sat} > i_{test} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) R > -V_{sat}$$

$$+I_0 = +\frac{V_{sat}}{R} \frac{R_2}{R_1 + R_2} > i_{test} > -\frac{V_{sat}}{R} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -I_0$$

$i_{test} > +I_0$
负饱和区

$i_{test} < -I_0$
正饱和区

运放工作在正饱和区 等效戴维南源



正饱和区条件:

$$v_p > v_n$$

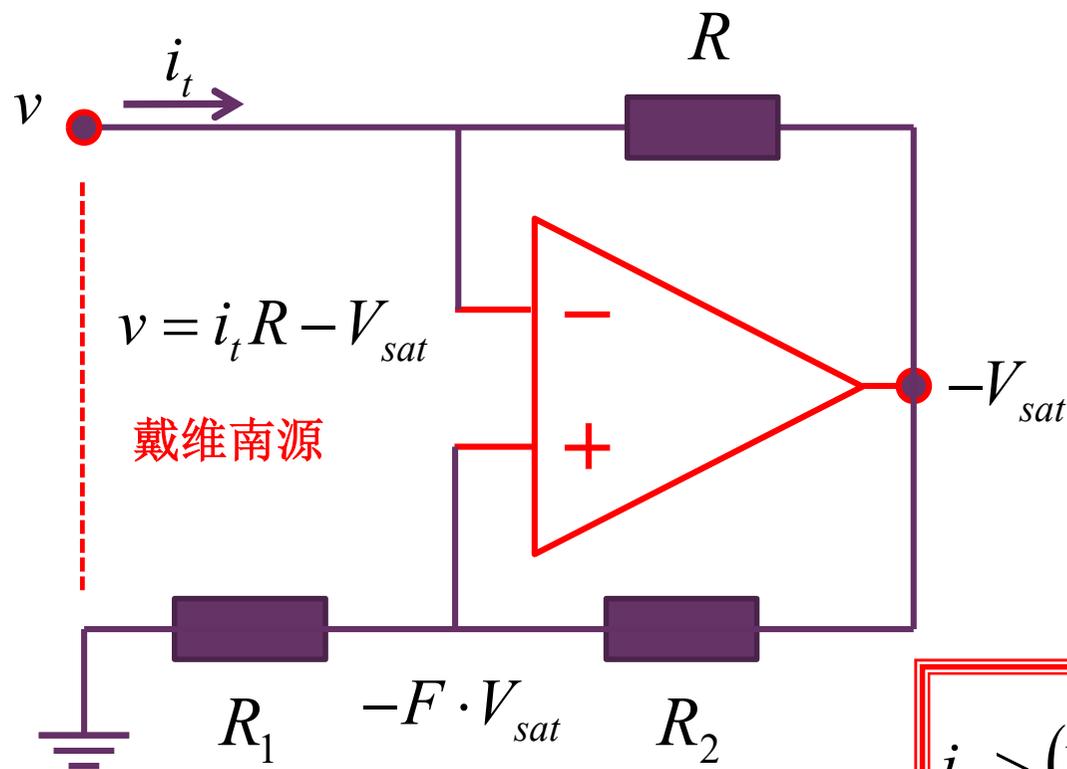
$$F \cdot V_{sat} > i_t R + V_{sat}$$

$$i_t < (F - 1) \cdot \frac{V_{sat}}{R} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R}$$

$$i_{test} < -I_0$$

正饱和区

运放工作在负饱和区 等效戴维南源



负饱和区条件:

$$v_p < v_n$$

$$-F \cdot V_{sat} < i_t R - V_{sat}$$

$$i_t > (1 - F) \cdot \frac{V_{sat}}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R}$$

$$i_{test} > +I_0$$

负饱和区

分区描述

S型负阻

运放
线性区

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{V_{sat}}{R} > i_t > -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{V_{sat}}{R}$$

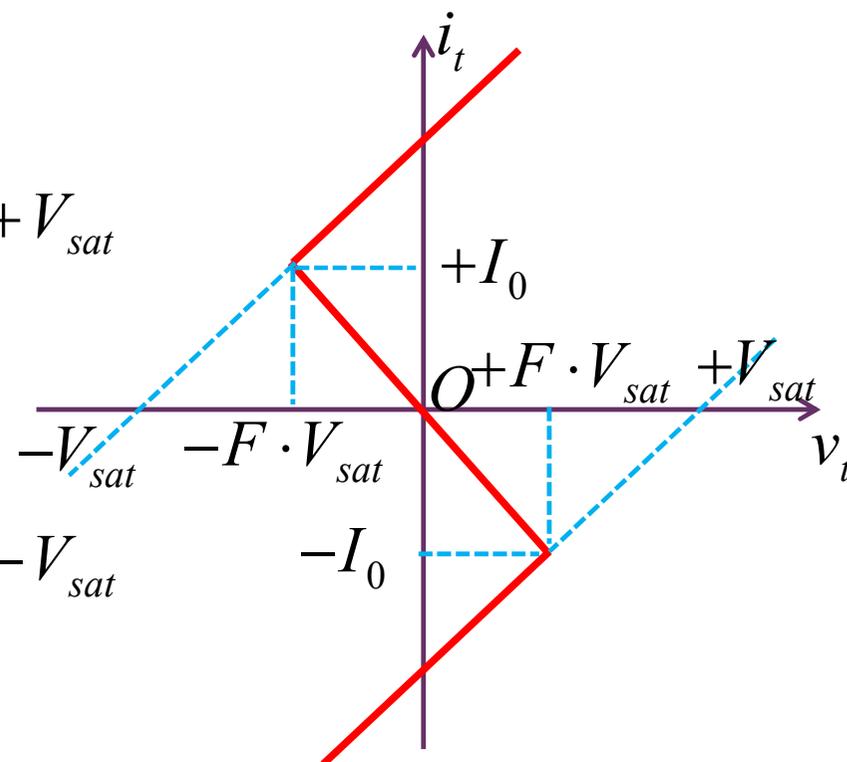
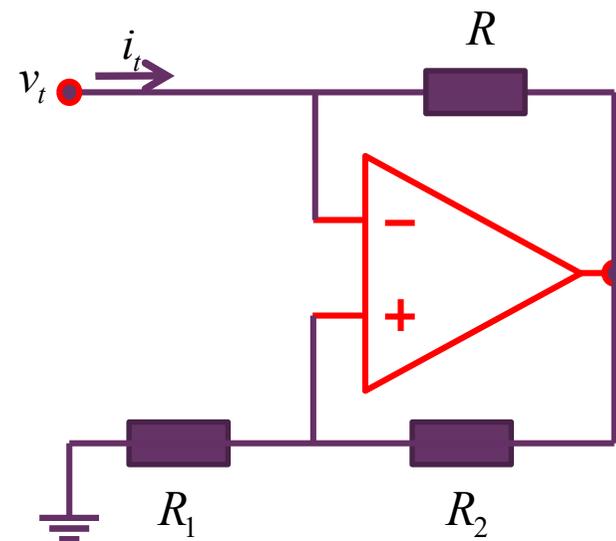
$$v_t = -R \frac{R_1}{R_2} i_t$$

运放
正饱和区

$$i_t < -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R} = -I_0 \quad v_t = i_t R + V_{sat}$$

运放
负饱和区

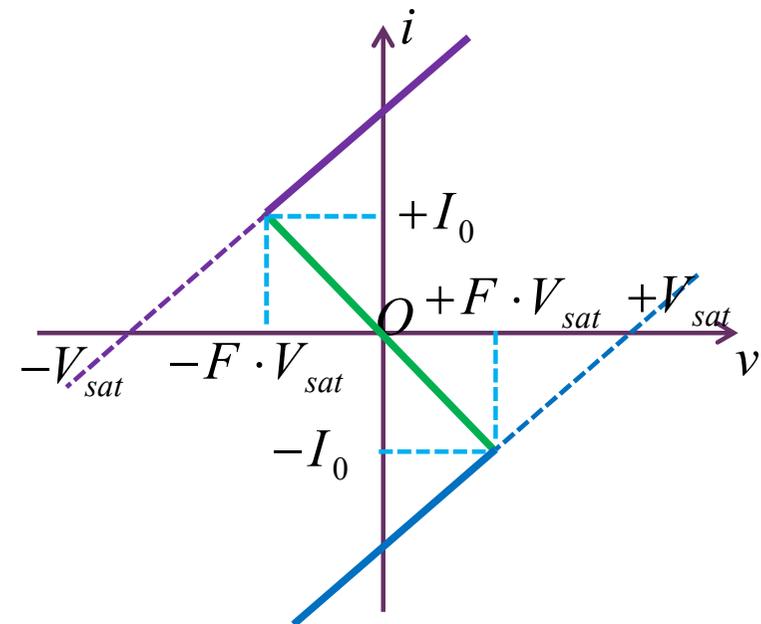
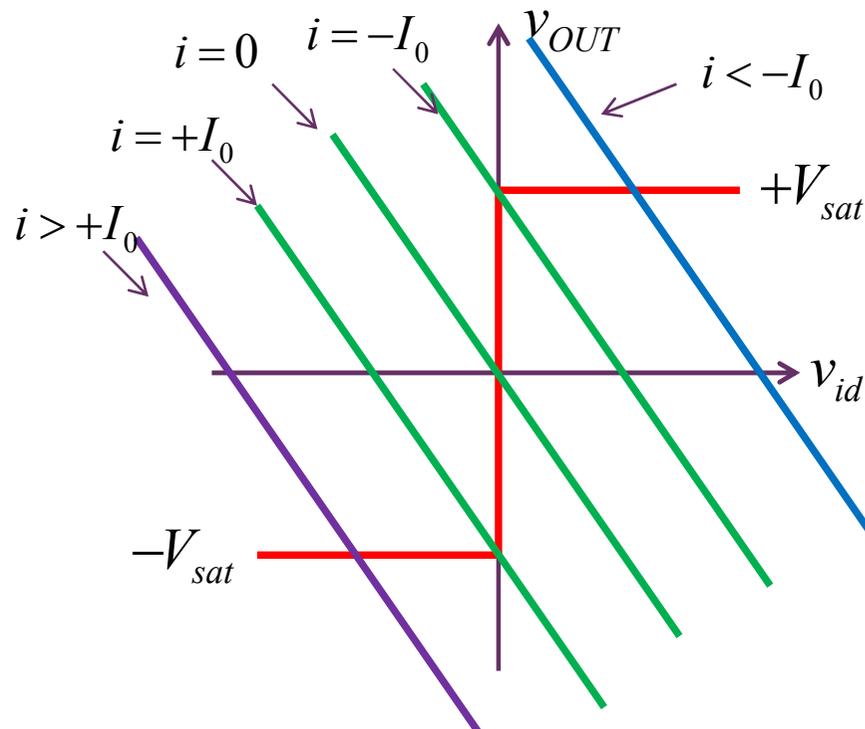
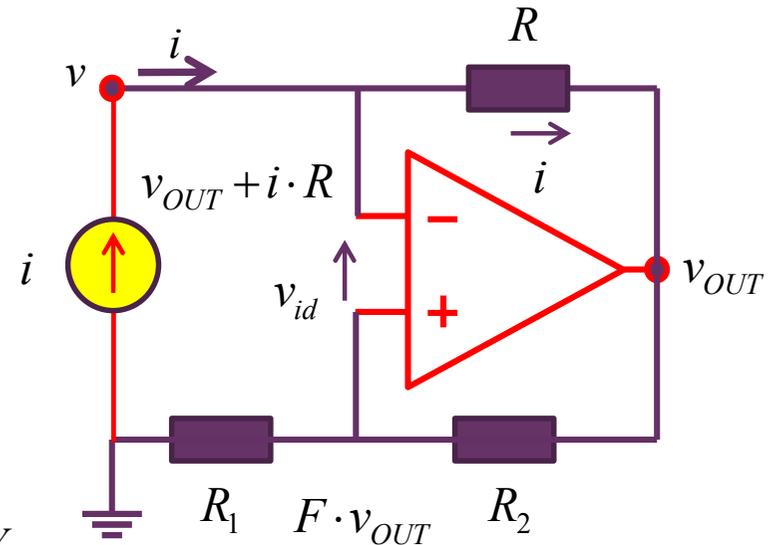
$$i_t > \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R} = +I_0 \quad v_t = i_t R - V_{sat}$$



S型负阻
流控器件

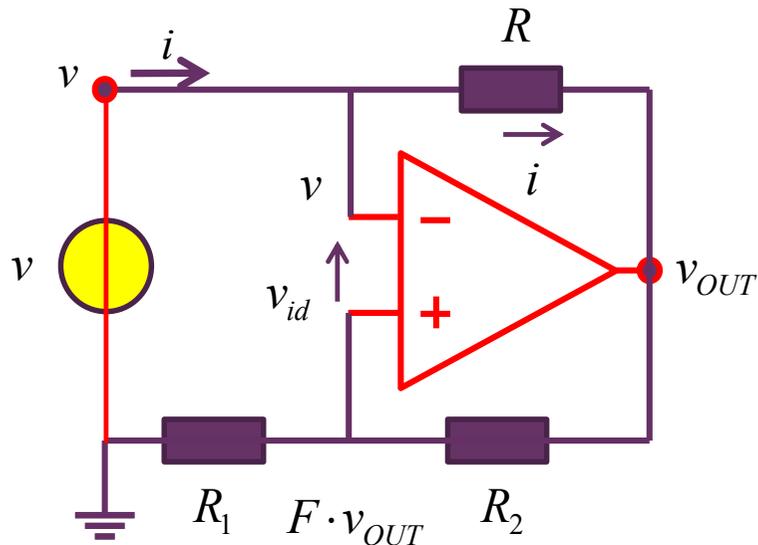
$$\begin{aligned} v_{id} &= v_p - v_n \\ &= F \cdot v_{OUT} - (v_{OUT} + i \cdot R) \\ &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{OUT} - i \cdot R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{OUT} &= -\frac{R_1 + R_2}{R_2} v_{id} - i \cdot R \frac{R_1 + R_2}{R_2} \\ &= -\frac{R_1 + R_2}{R_2} v_{id} - \frac{V_{sat}}{I_0} i \quad I_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R} \end{aligned}$$



对S型负阻加压测试将形成滞回特性

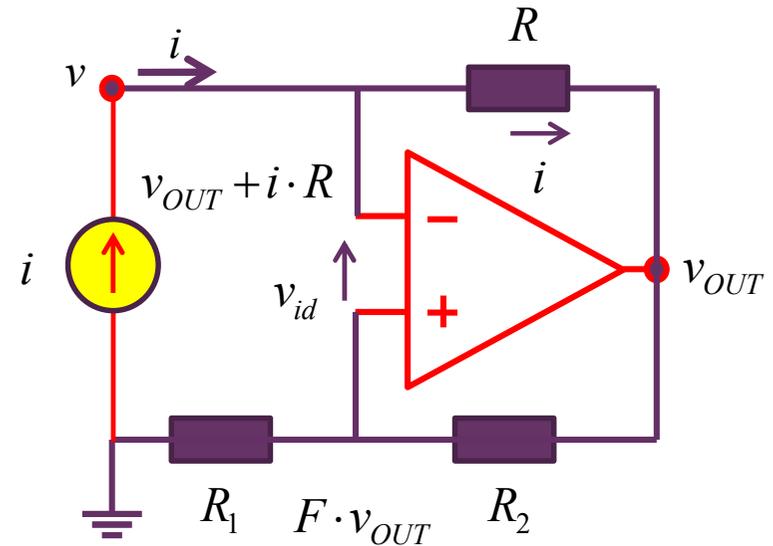
正反馈大于负反馈



$$\begin{aligned} v_{id} &= v_p - v_n \\ &= F \cdot v_{OUT} - v \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{OUT} - v \end{aligned}$$

$$v_{OUT} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_{id} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} v$$

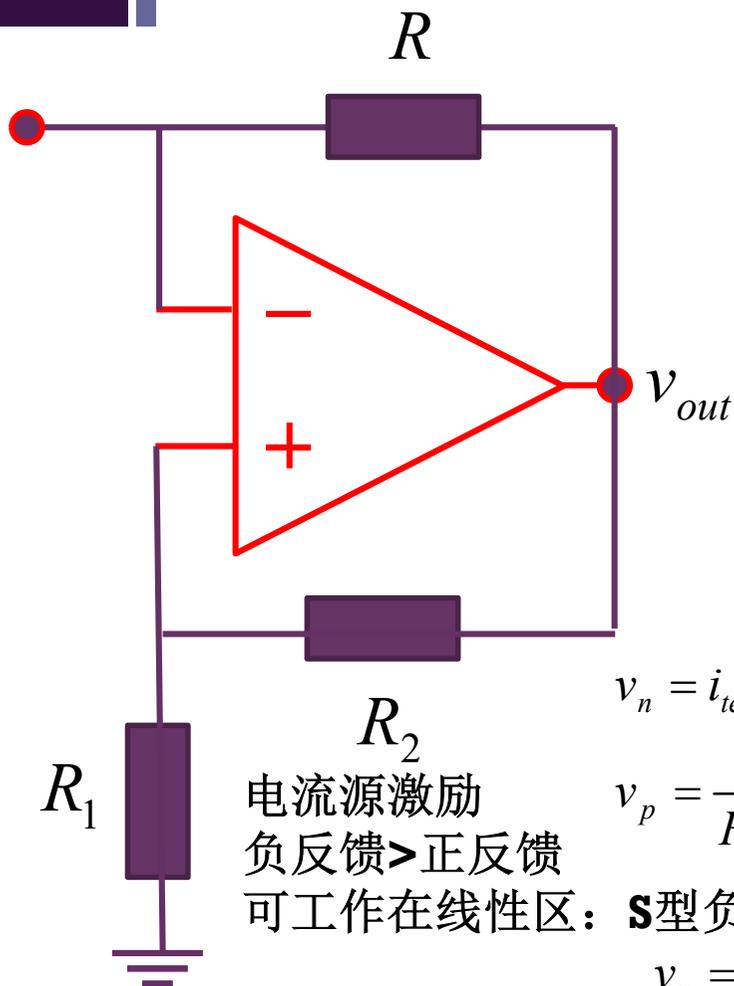
正反馈：无法待在线性区，只能测出滞回特性曲线



$$v_{OUT} = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} v_{id} - \frac{V_{sat}}{I_0} i$$

负反馈
可工作在线性区
可测出S型负阻特性

电路中同时存在正反馈和负反馈



电流源激励
负反馈 > 正反馈
可工作在线性区: **S**型负阻

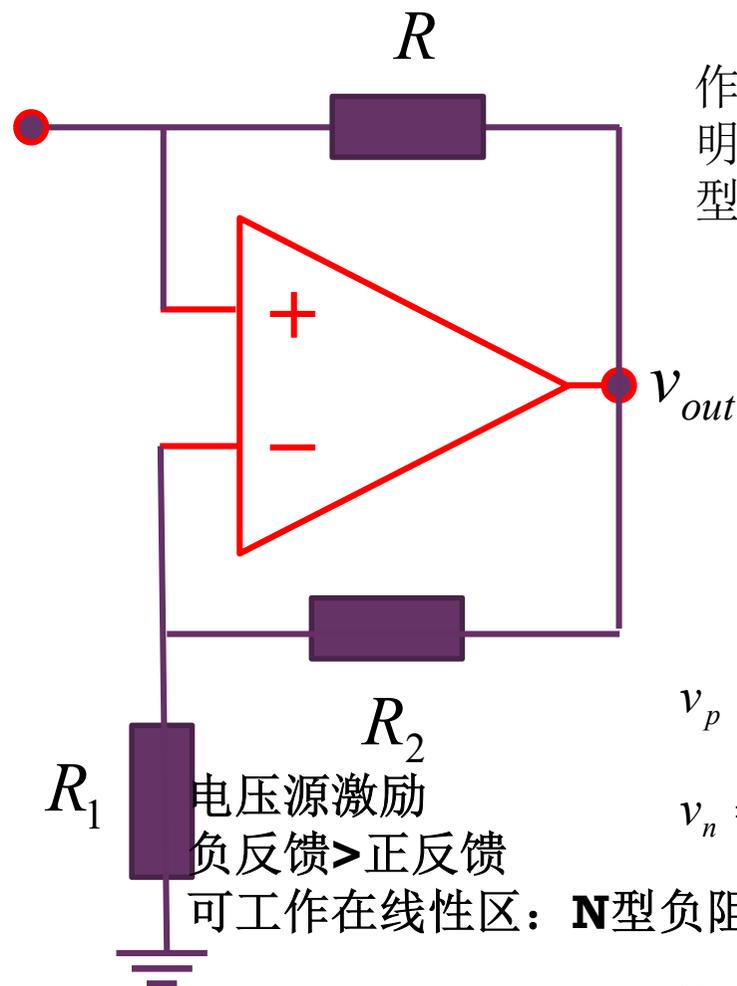
$$v_n = i_{test} R + v_o$$

$$v_p = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

$$v_n = v_{test}$$

电压源激励
正反馈 > 负反馈
只能工作在正负饱和区

$$v_p = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$



作业证
明此为**N**
型负阻

电压源激励
负反馈 > 正反馈
可工作在线性区: **N**型负阻

$$v_p = v_{test}$$

$$v_n = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

电流源激励
正反馈 > 负反馈
只能工作在正负饱和区

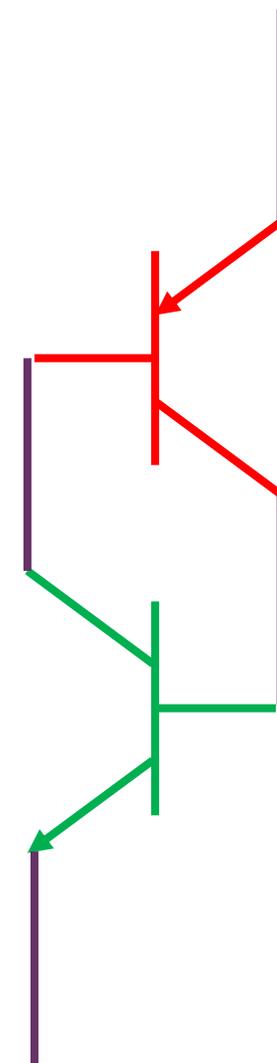
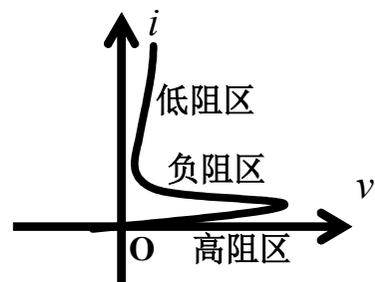
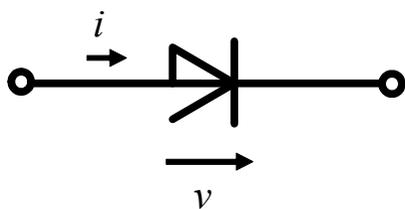
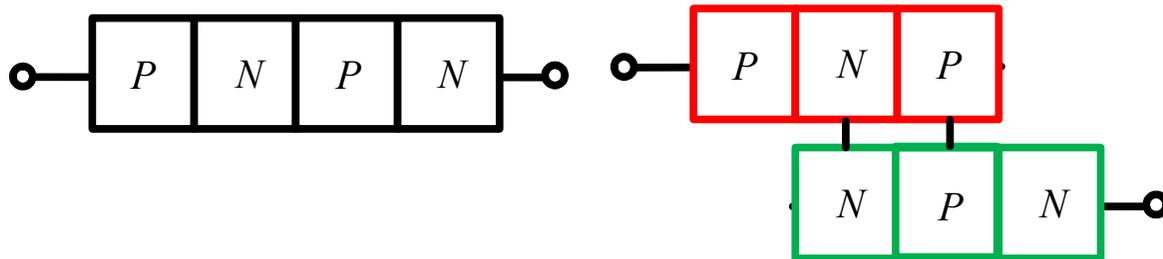
$$v_p = i_{test} R + v_o$$

$$v_n = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

二、晶体管正反馈

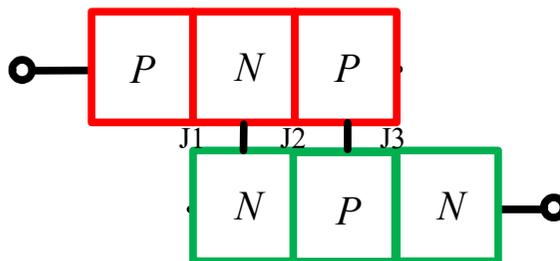
Shockley diode

- S型负阻：肖克利二极管
 - 等效为两个晶体管的正反馈连接

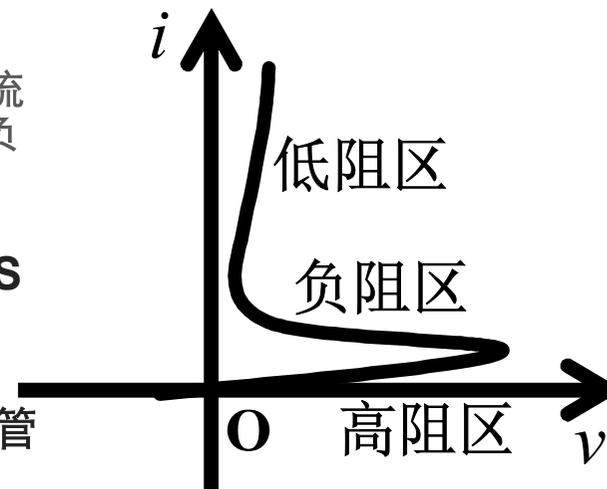
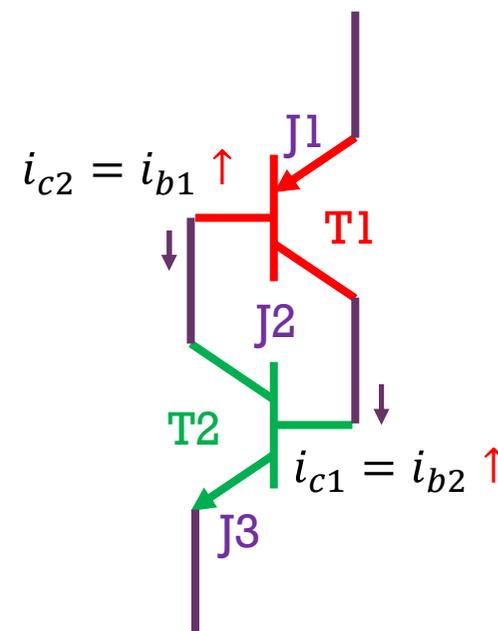


如果加压测出滞回曲线，必是S型负阻

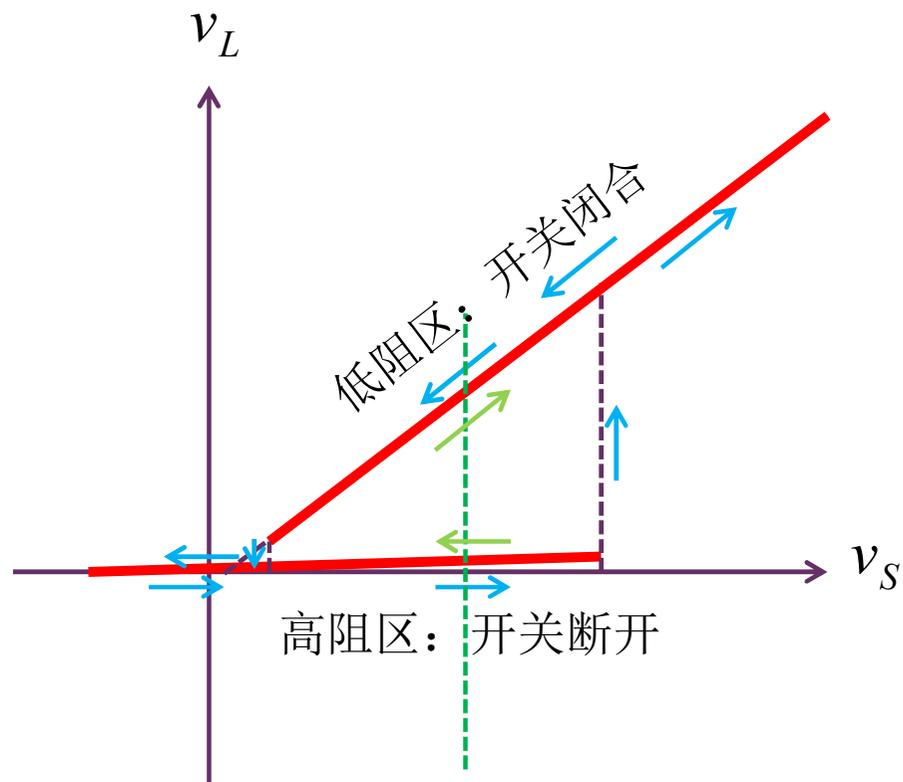
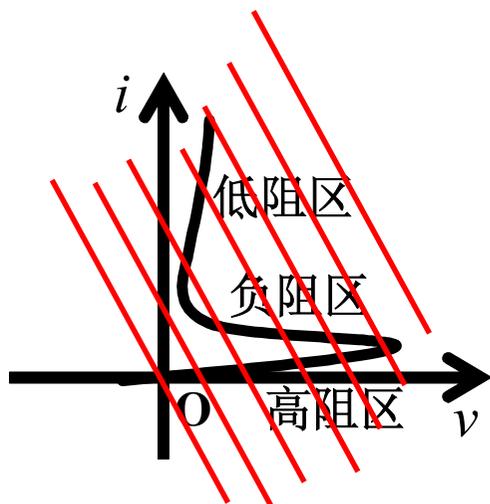
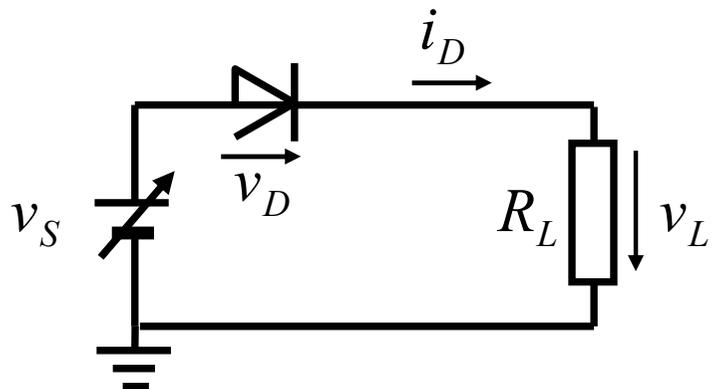
正反馈连接



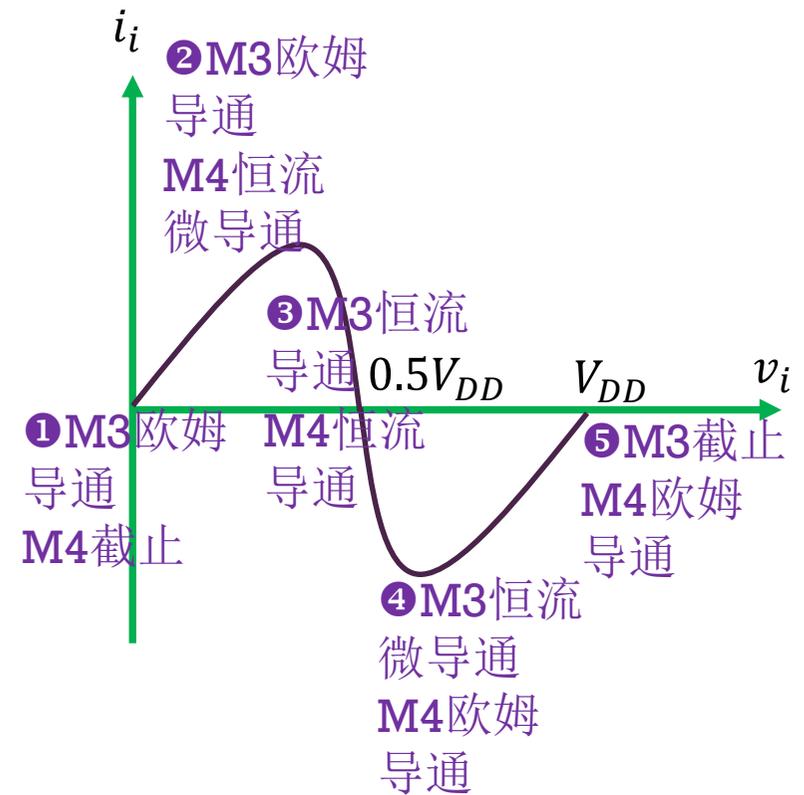
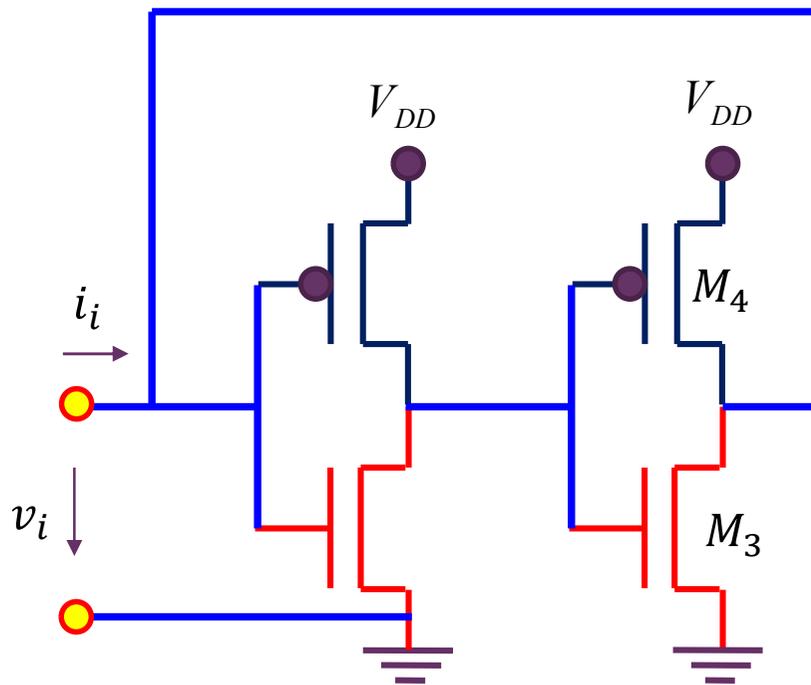
- 对肖克利二极管正向偏置，**J1**和**J3**结正偏，**J2**结反偏
- 起始电压为**0**，电流自然为**0**
- 随着正偏电压上升，**J2**反偏结漏电流逐渐增加，但漏电流本身很小（**S**型负阻高阻区）
- 正偏电压持续升高，**J2**结反向击穿，两个晶体管是正反馈连接的，电流急剧增加
 - $i_{c1} = i_{b2} \uparrow$ ，导致 $i_{c2} = i_{b1} \uparrow$ ，进一步导致 $i_{c1} = i_{b2} \uparrow$ ，电流越来越大，瞬间导致两个晶体管都进入饱和区，进入**S**型负阻的低阻区
- 正偏电压下降，两个晶体管都是饱和导通的（保持在**S**型负阻低阻区）
- 当正偏电压下降到导通电流足够小时，任意一个晶体管的截止，将导致另外一个晶体管截止
 - 正反馈使得电流瞬间下跳，进入**S**型负阻的高阻区



滞回曲线：开关应用



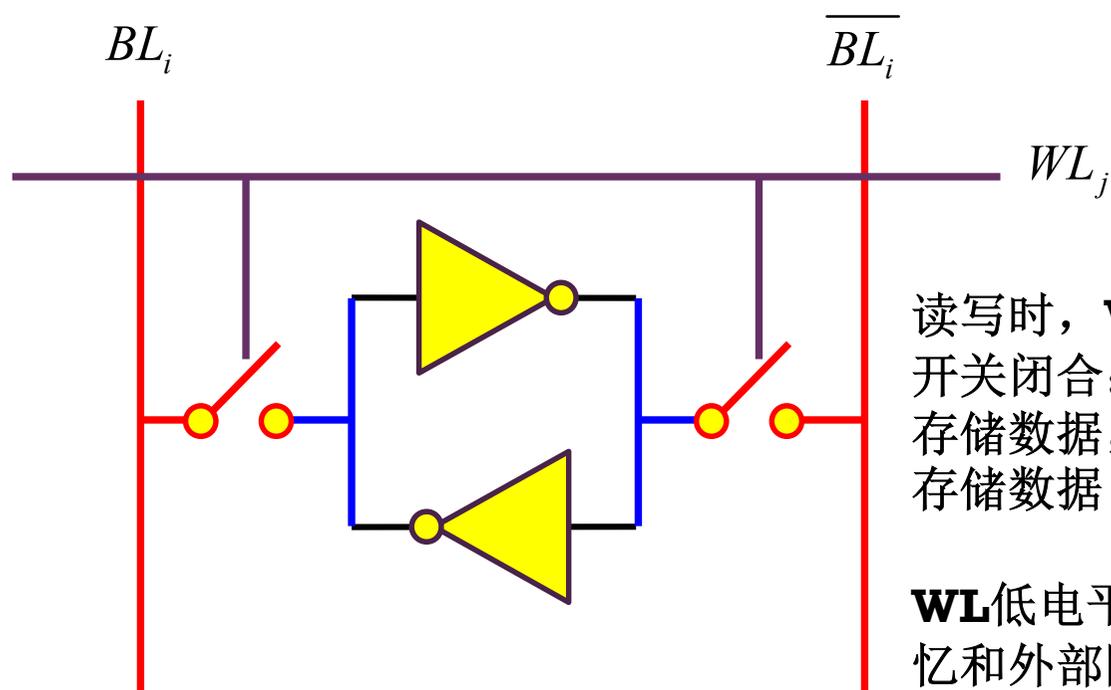
正反馈形成的N型负阻



N型负阻就是01存储单元

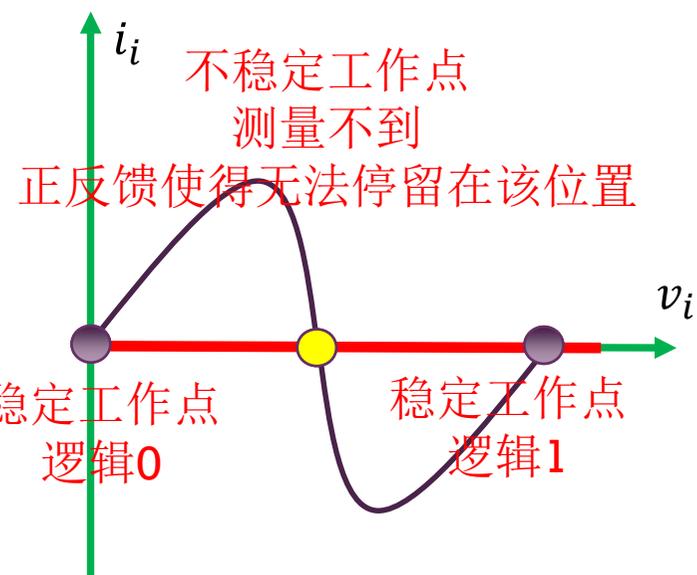
SRAM: Static Random Access Memory

计算机中的高速缓存



读写时，**WL**高电平，
开关闭合：可读出
存储数据，可写入
存储数据

WL低电平，内部记
忆和外部隔离，记
忆保持状态

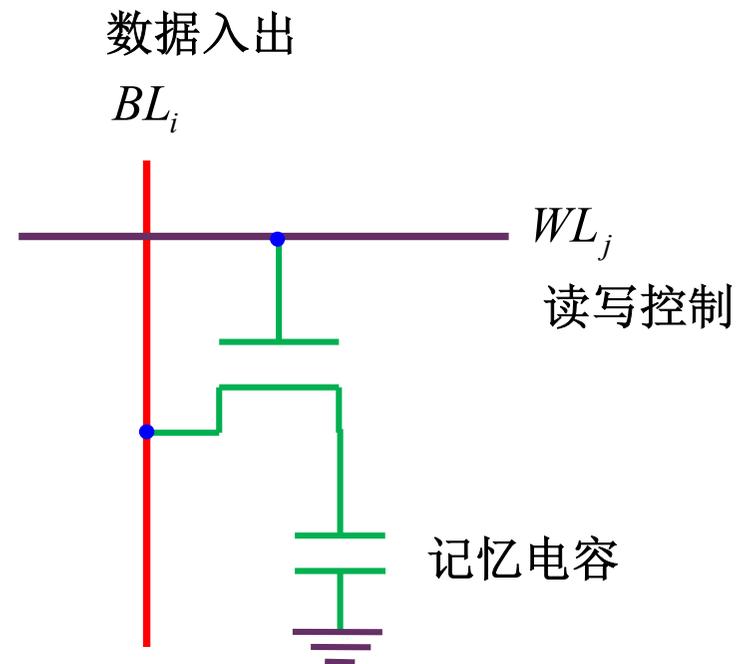


存储意味着记忆

存储器中必须有记忆单元

DRAM: Dynamic Random Access Memory

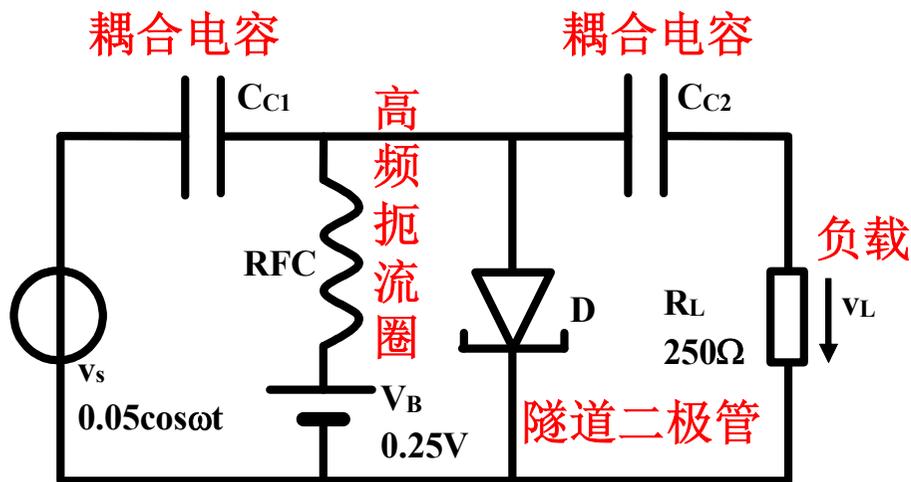
计算机中的主存



三、负阻功能

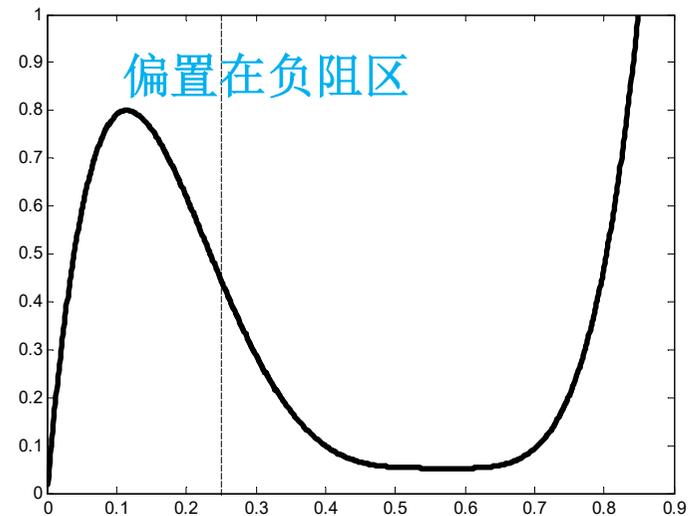
- 负阻可形成记忆功能
 - N型负阻可用于01存储
 - S型负阻可用于有记忆的开关（开关保护电路）
- 负阻可形成有源功能
 - 具有向外部提供电能量能力的网络为有源网络
 - 放大
 - 输出功率高于输入功率：额外向外提供了电能量
 - 振荡
 - 有周期信号输出，本身就意味着电能量的输出

例1：负阻放大器



交流小
信号激
励源

直流偏置电压源



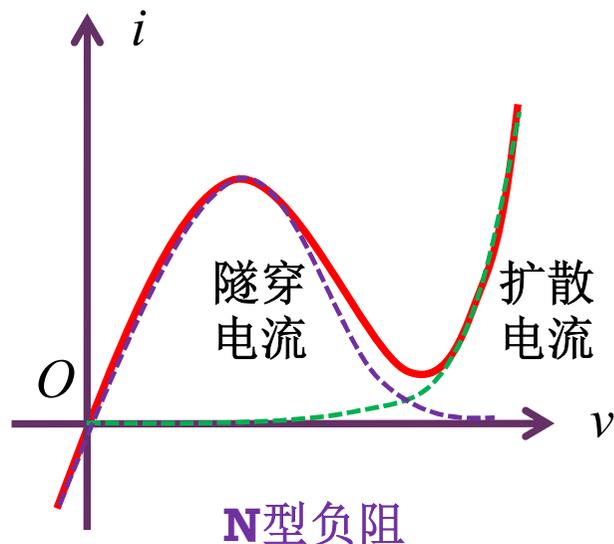
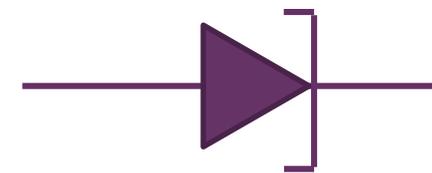
$$i = f(v) = 17.05v - 119.57v^2 + 317.42v^3 - 375.42v^4 + 166.66v^5$$

根据测量结果拟合的伏安特性方程

电压单位：伏特
电流单位：毫安

隧道二极管：N型负阻器件

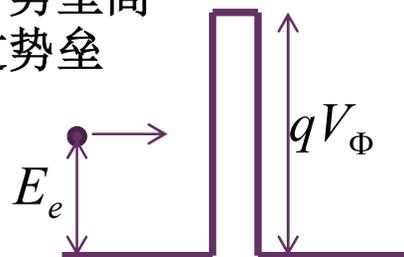
Tunnel Diode



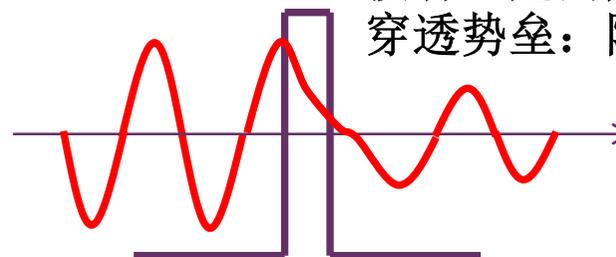
重掺杂**PN**结，**10nm**厚的耗尽层：
电子隧穿效应

电子隧穿是一种量子力学现象：
经典力学中，当电子撞击到较高电势的势垒上时，它是完全被势垒壁所约束。量子力学中，电子是波，波可以按一定的概率穿透势垒。

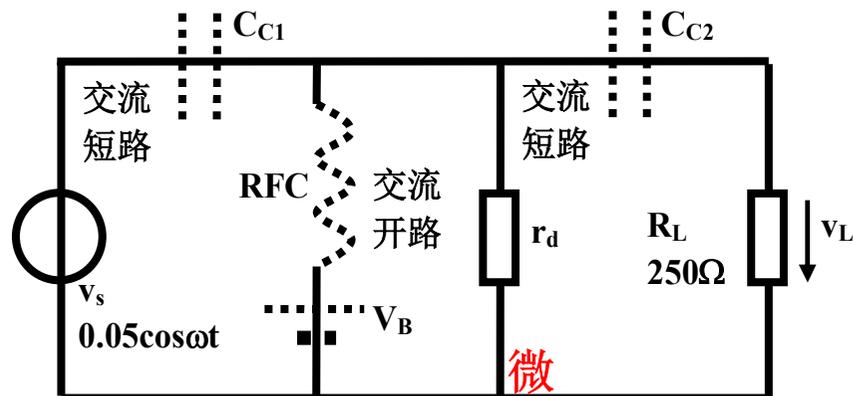
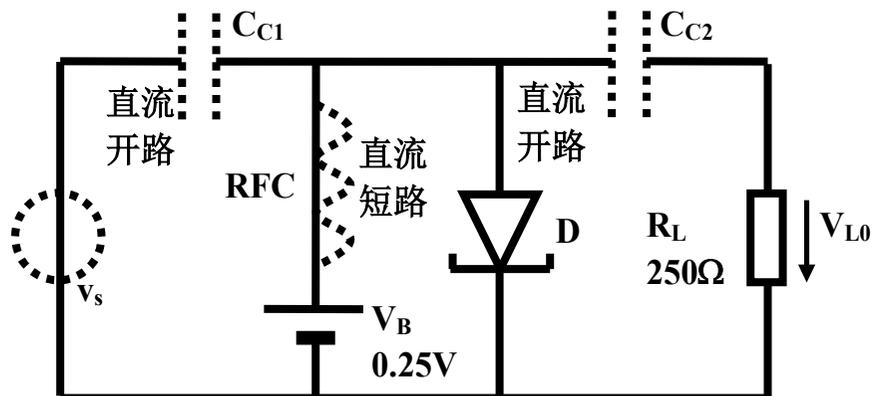
电子能量小于势垒高度，不能越过势垒



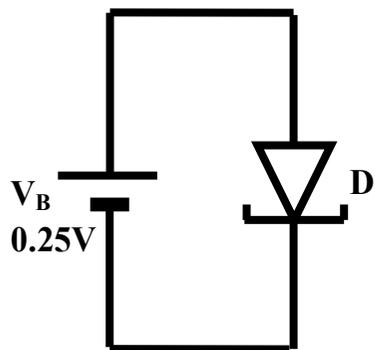
波有一定的几率
穿透势垒：隧穿



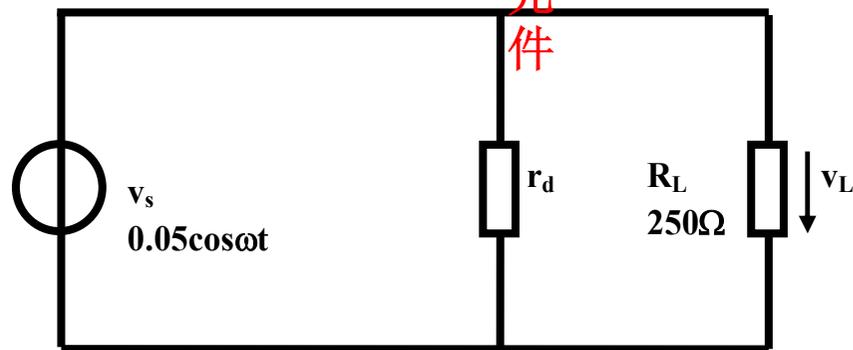
直流分析和交流小信号分析



微分元件



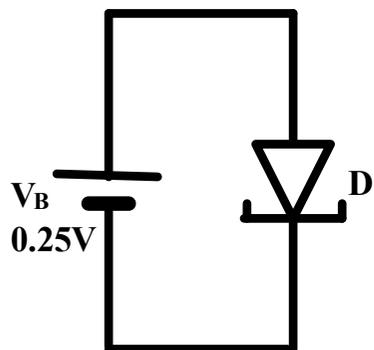
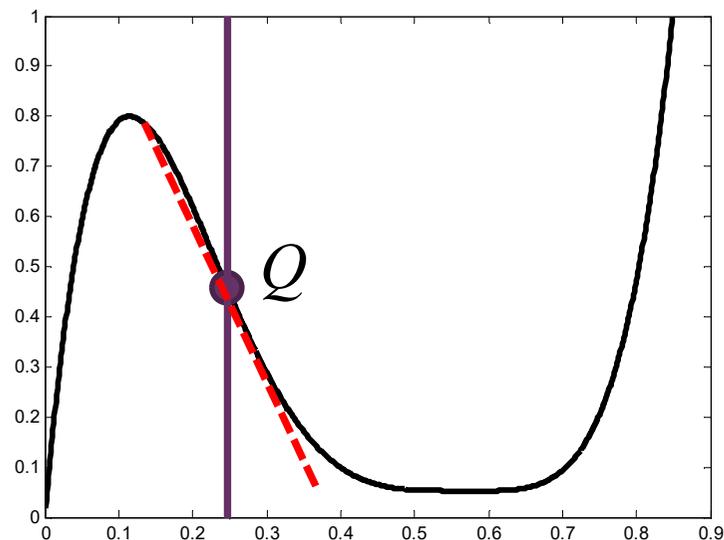
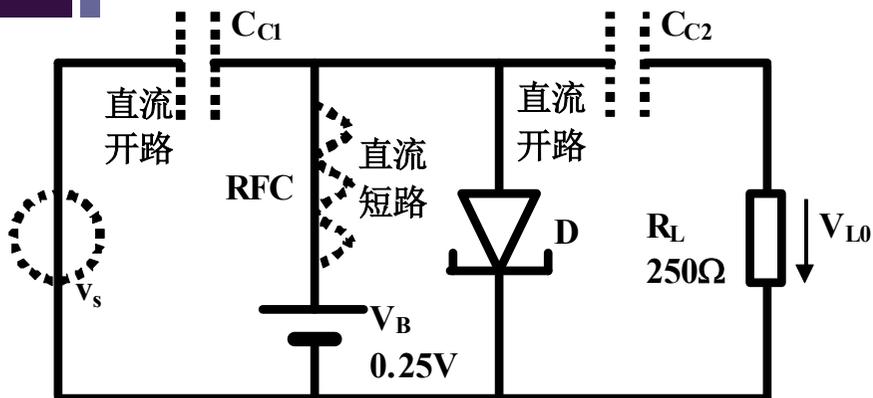
直流分析



交流小信号分析

由于存在耦合电容和高频扼流圈，直流分析和交流分析的两个电路结构不同

图解法与解析法



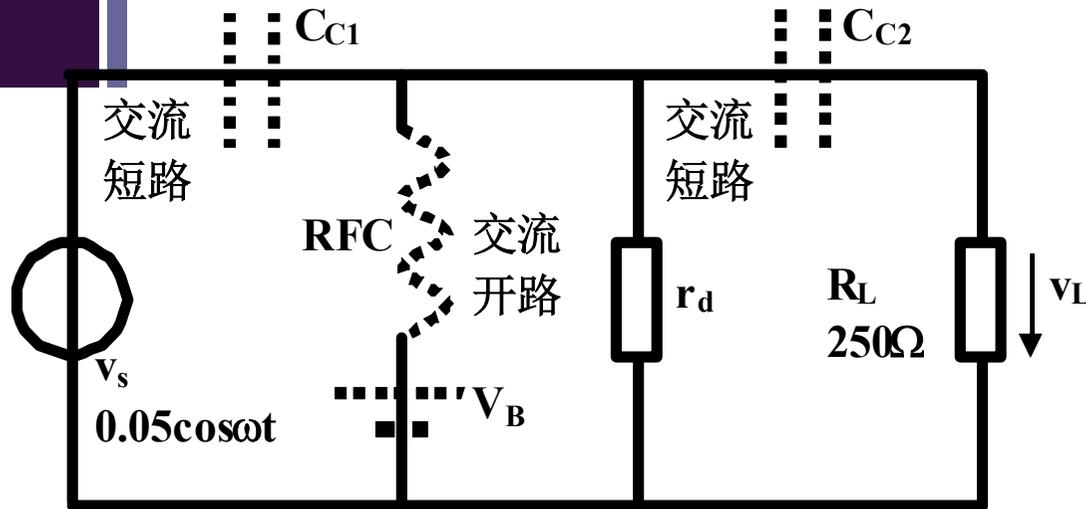
$$i = f(v) = 17.05v - 119.57v^2 + 317.42v^3 - 375.42v^4 + 166.66v^5$$

$$I_0 = f(V_0) = f(0.25V) = 445\mu A$$

$$r_d = \frac{1}{f'(v)} \Big|_{V_0} = \frac{1}{17.05 - 119.57 \times 2v + 317.42 \times 3v^2 - 375.42 \times 4v^3 + 166.66 \times 5v^4} \Big|_{v=V_0=0.25}$$

$$= \frac{1}{-3.4274mS} = -292\Omega \quad \text{微分负阻}$$

交流小信号分析



$$i_d = \frac{v_s}{r_d} = -0.1714 \cos \omega t (mA)$$

$$i_L = \frac{v_s}{R_L} = 0.2000 \cos \omega t (mA)$$

$$i_s = i_d + i_L = 0.0286 \cos \omega t (mA)$$

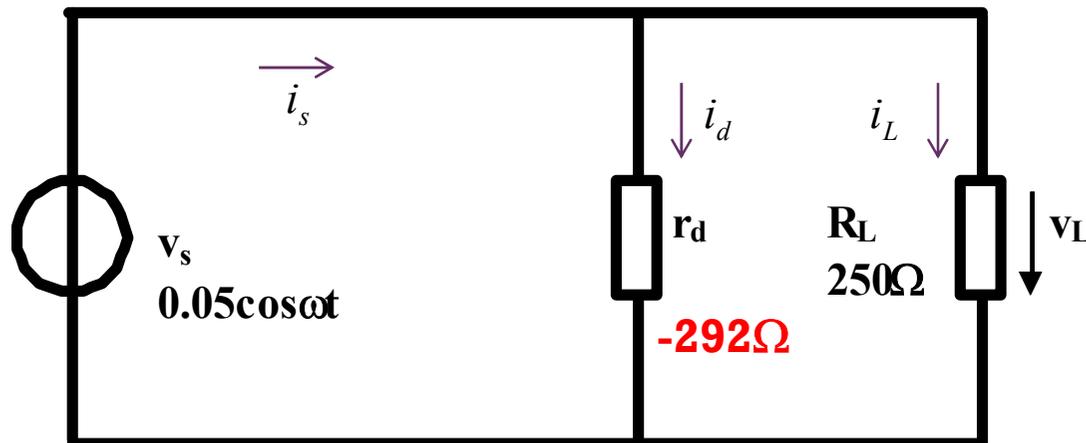
$$\overline{p_s} = \frac{1}{2} V_{sp} I_{sp}$$

$$= 0.5 \times 0.05 \times 0.0286 m = 0.715 \mu W$$

$$\overline{p_L} = \frac{1}{2} I_{Lp}^2 R_L$$

$$= 0.5 \times (0.20 m)^2 \times 250 = 5 \mu W$$

$$G_p = \frac{\overline{p_L}}{\overline{p_s}} = \frac{5}{0.715} = 7 = 8.4 dB$$

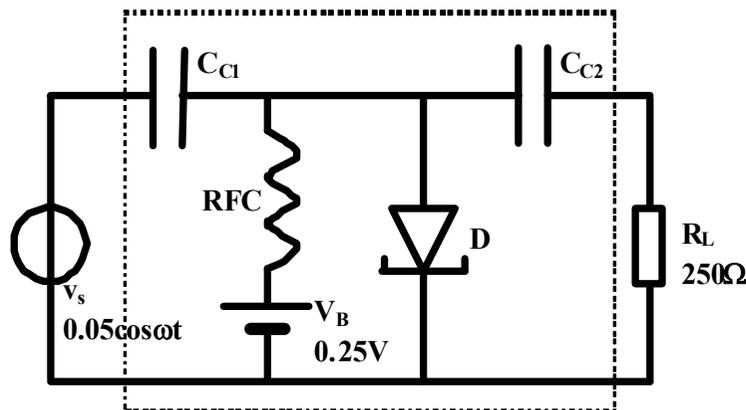


$$G_p = \frac{\overline{p_L}}{\overline{p_s}} = \frac{V_{s,rms}^2 G_L}{V_{s,rms}^2 (G_L + g_d)} = \frac{G_L}{G_L + g_d}$$

负载获得了比信源输出功率更大的功率

放大器：功率增益由负载电导和微分负导共同决定

负阻具有将直流电能转化为交流电能的能力



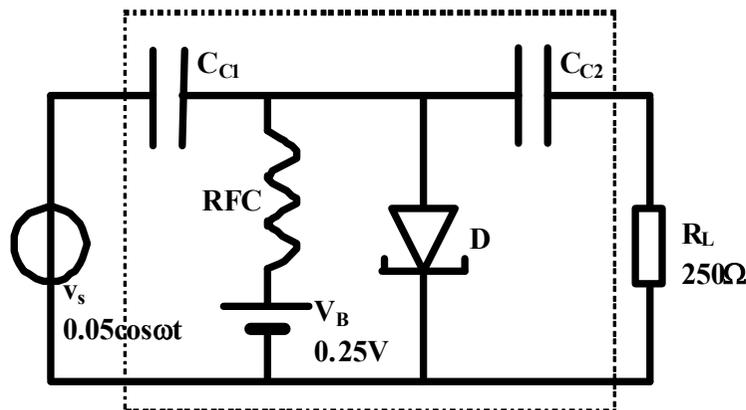
如果没有施加交流信号， $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ ，隧道二极管消耗功率为直流偏置电压源提供的功率

$$P_D = V_0 I_0 = 250mV \times 445\mu A = 111\mu W = P_S = V_B I_0$$

如果施加交流信号， $\mathbf{v}_s \neq \mathbf{0}$ ，直流偏置电压源仍然提供这么多功率，但隧道二极管消耗功率减少了

$$\begin{aligned} P_D &= \overline{(V_0 + v_s)(I_0 + i_d)} = V_0 I_0 + \overline{v_s i_d} = V_0 I_0 + \frac{V_{s,rms}^2}{r_d} \\ &= 250mV \times 445\mu A - \frac{1}{2} \frac{(0.05)^2}{292} = 111\mu W - 4.28\mu W = 106.72\mu W \end{aligned}$$

负载获得的功率包括负阻提供的功率



直流偏置电压源提供**111μW**直流功率，隧道二极管吸收**111μW**直流功率，其微分负阻又向外释放了**4.28μW**的交流功率

$$P_D = \overline{(V_0 + v_s)(I_0 + i_d)} = V_0 I_0 + \overline{v_s i_d} = 111 \mu W - 4.28 \mu W$$

交流信号源本身对外释放了**0.72μW**交流功率

$$\overline{p_s} = \frac{1}{2} V_{sp} I_{sp} = 0.5 \times 0.05 \times 0.0286 m = 0.72 \mu W$$

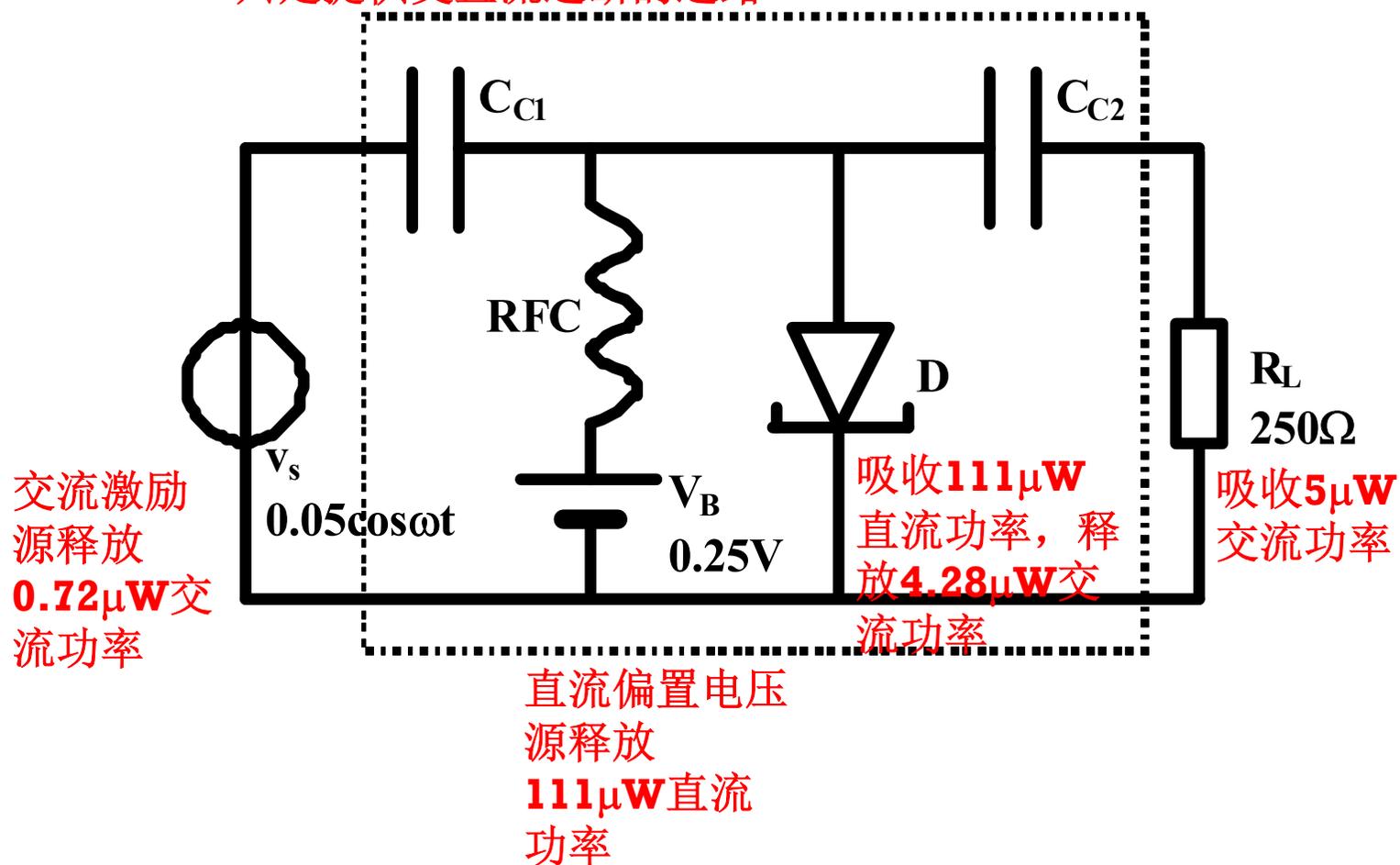
负载吸收了信源和负阻提供的交流功率

$$\overline{p_L} = \overline{p_s} + \overline{p_d} = 0.72 \mu W + 4.28 \mu W = 5.0 \mu W$$

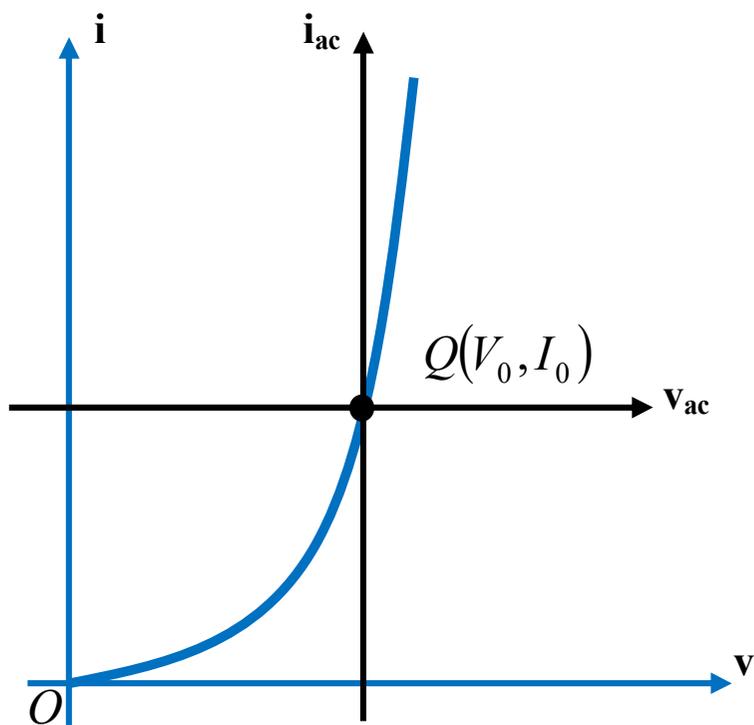
施加交流激励后，隧道二极管消耗能量降低部分即为负阻向外释放的能量

能量转换关系：稳态分析

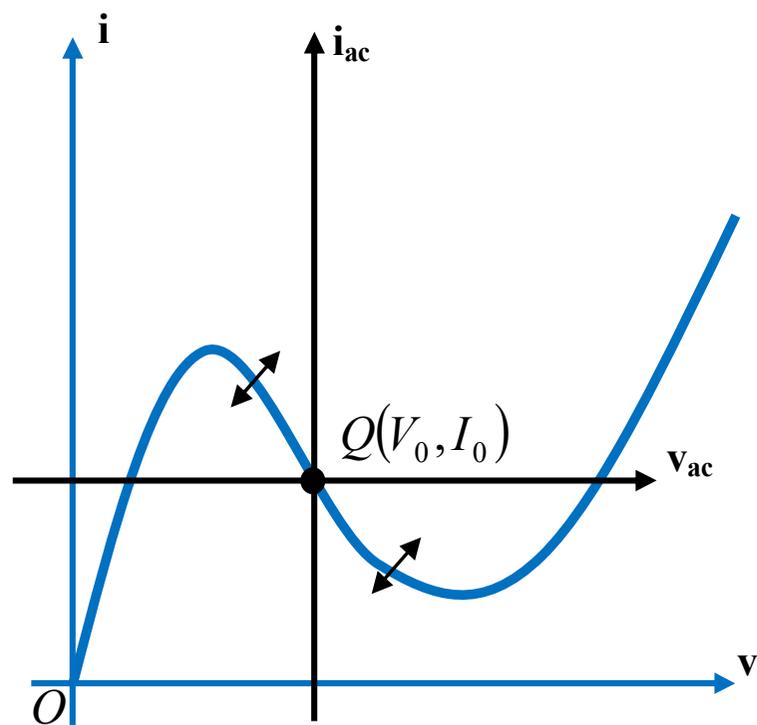
耦合电容、高频扼流圈不消耗任何功率，
只是提供交直流通断的通路



有源性分析

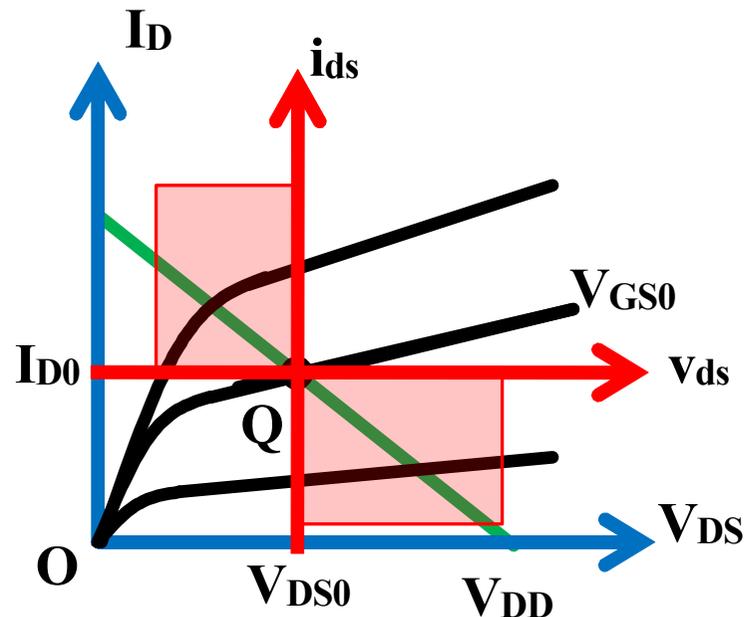
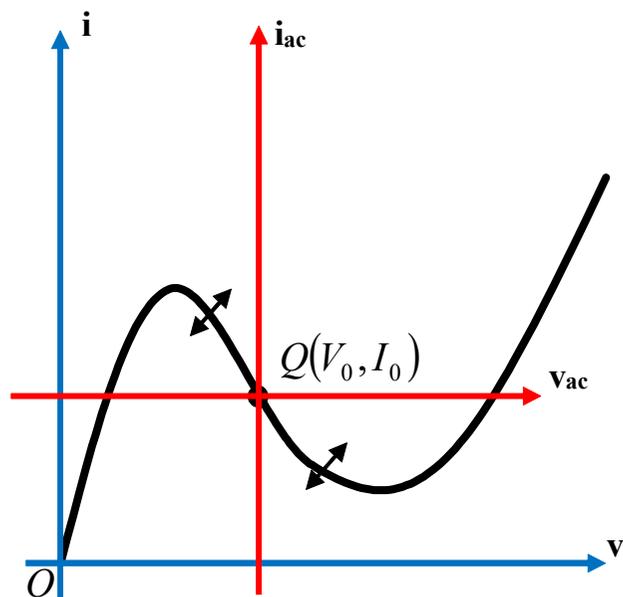


**PN结二极管始终无源，
直流交流均吸收功率**



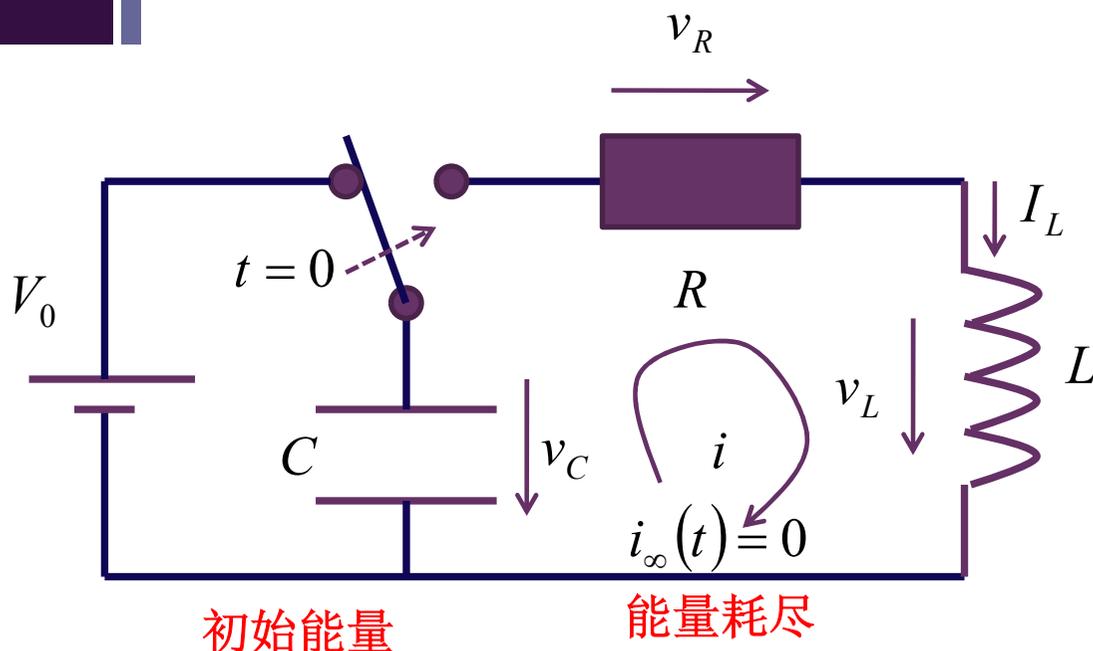
先偏置到负阻区才能释放功率，在吸收直流功率的前提下释放交流功率：隧道二极管的有源性来自直流偏置电压源提供的直流能量

晶体管 and 负阻的有源性



交流小信号分析坐标系的原点是直流工作点，因而只要直流偏置源将工作点偏置到合适位置，在交流小信号坐标系中，电阻的伏安特性曲线如果可以进入该坐标系的**2、4**象限，电阻则可自端口对外提供交流功率（有源），由此可知，电阻（单端口的负阻器件和二端口的晶体管）被称为有源器件时，其有源性来自直流偏置源，负阻器件和晶体管在这里起到一个换能作用，它们将直流偏置源的直流电能转换为交流电能

负阻振荡原理：自由振荡



$$v_C(0^-) = V_0 \quad i_L(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0^+)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \xi = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$i(t) = i_\infty(t) + (I_0 - I_\infty) e^{-\xi\omega_0 t} \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t$$

$$+ \left(\frac{\dot{I}_0 - \dot{I}_\infty}{\xi\omega_0} + I_0 - I_\infty \right) \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t$$

$$= \frac{V_0}{L\xi\omega_0} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t = \frac{V_0}{Z_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t \quad (t \geq 0)$$

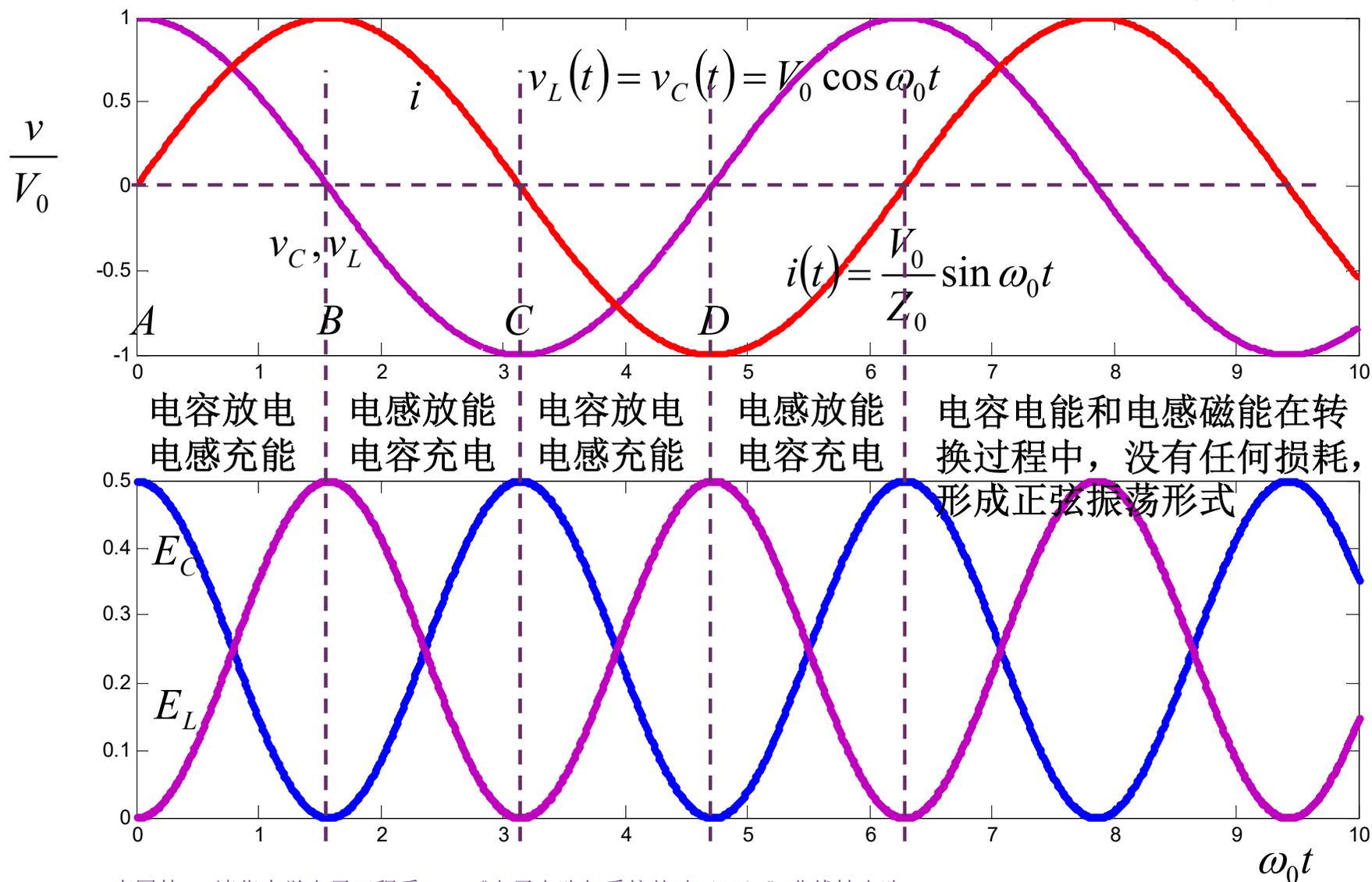
五要素法

无阻尼正弦振荡

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \omega_0$$

$$Q = \infty \quad = \pm j\omega_0$$

特征根为纯虚根



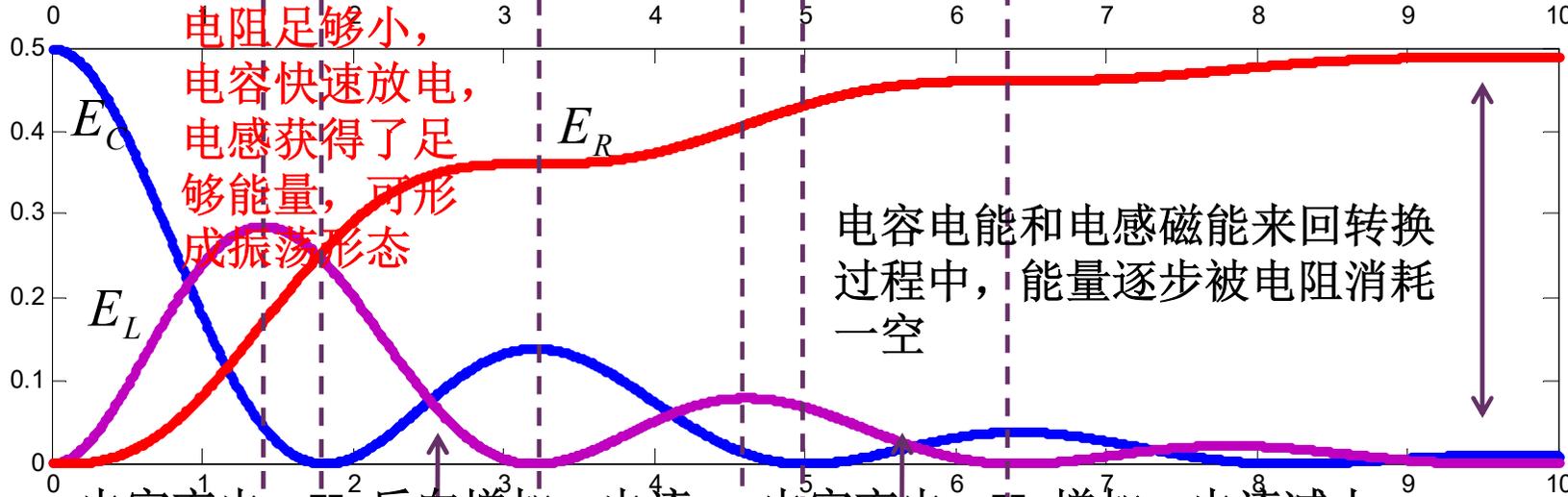
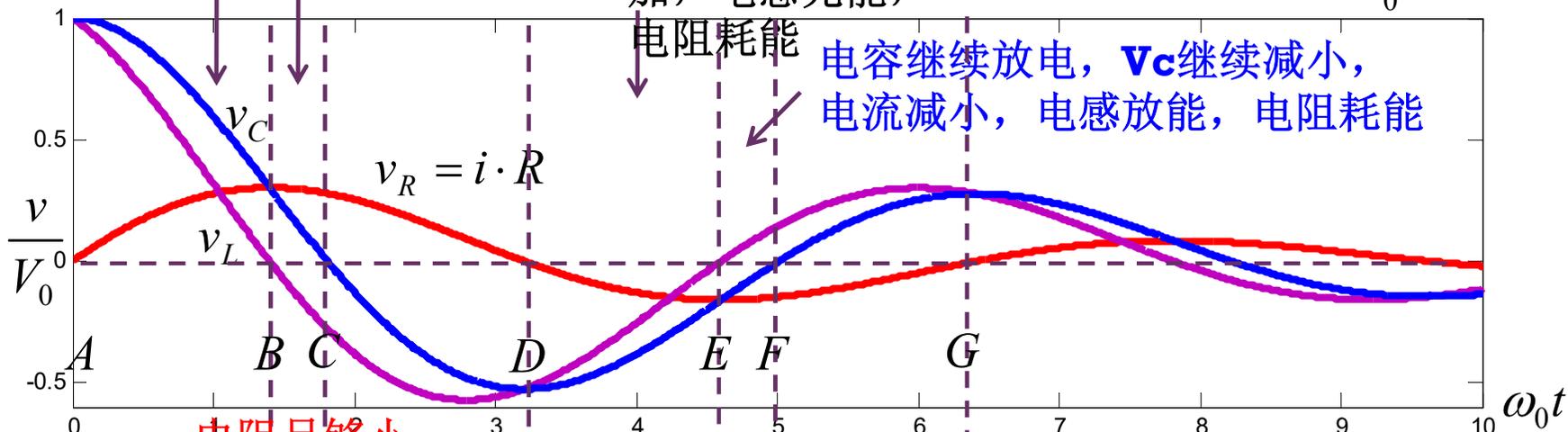
欠阻尼减幅振荡

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 0.2$$

电容放电, **V_C**减小, 电流增加, 电感充能, 电阻耗能
 电容继续放电, **V_C**继续减小, 电流减小, 电感放能, 电阻耗能

电容放电, **V_C**减小, 电流反向增加, 电感充能, 电阻耗能

电容继续放电, **V_C**继续减小, 电流减小, 电感放能, 电阻耗能



电阻足够小, 电容快速放电, 电感获得了足够能量, 可形成振荡形态

电容电能和电感器磁能来回转换过程中, 能量逐步被电阻消耗一空

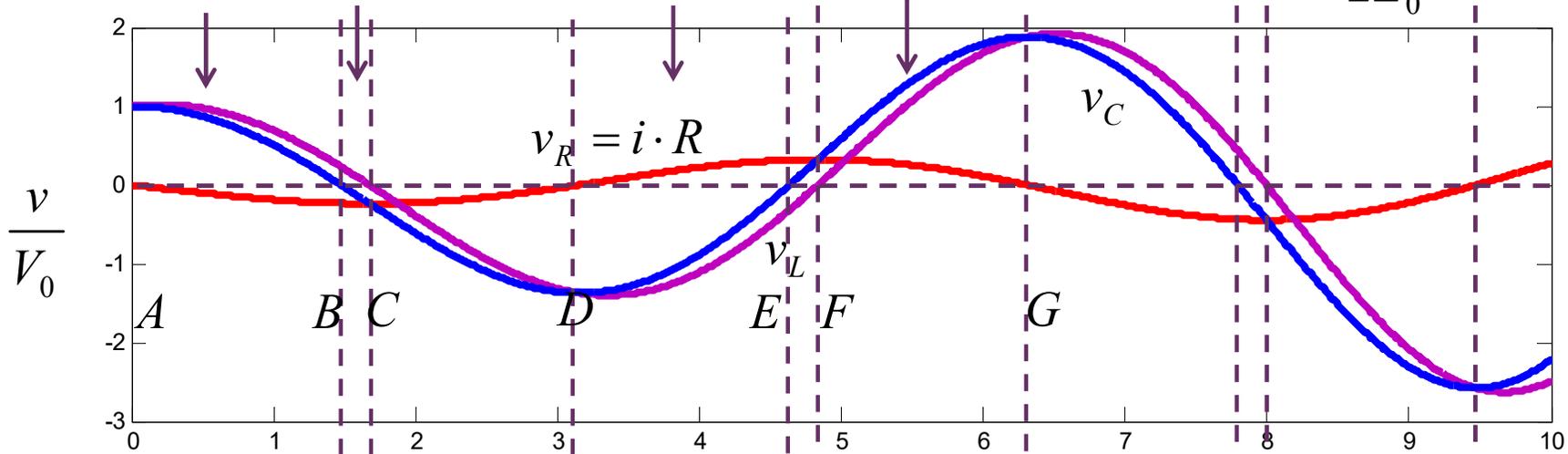
电容充电, **V_C**反向增加, 电流减小, 电感放能, 电阻耗能

电容充电, **V_C**增加, 电流减小, 电感放能, 电阻耗能

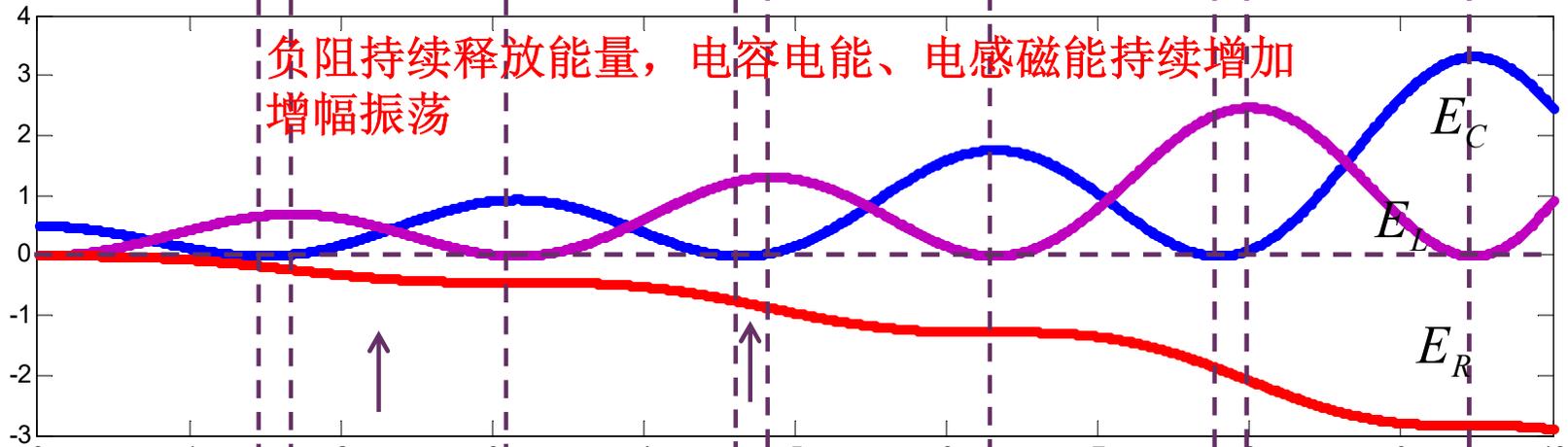
负欠阻尼 增幅振荡

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = -0.1$$

负阻释能, 电容放电, **V_C**减小, 电流增加, 电感充能
 负阻释能, 电容充电, **V_C**反向增加, 电流增加, 电感充磁
 负阻释能, 电容放电, **V_C**降低, 流增加, 电
 感充磁
 负阻释能, 电流降低, 电感放磁, 电容充电, **V_C**增加



负阻持续释放能量, 电容电能、电感磁能持续增加
 增幅振荡



负阻释能, 电流减小, 电感放磁, 电容充电, **V_C**反向增加,
 负阻释能, 电流增加, 电感充磁, 电容充电, **V_C**增加

对LC自由振荡的总结

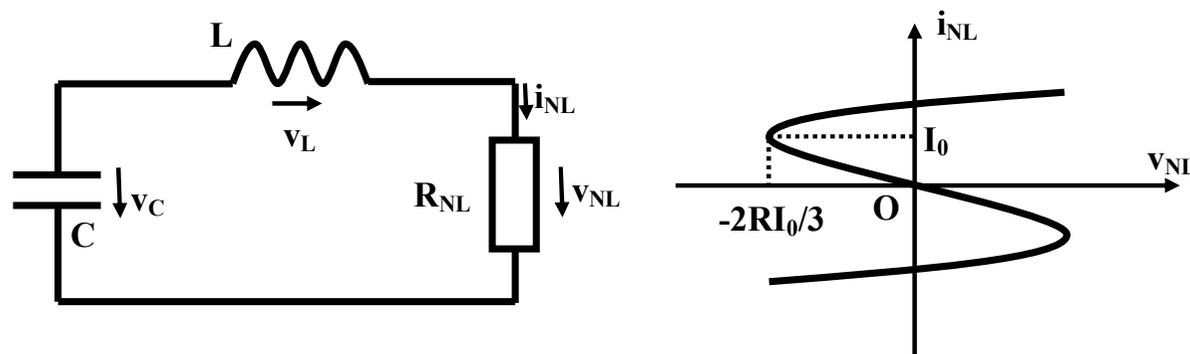
- 理想的纯LC谐振腔，内部能量不增不减，电感磁能和电容电能以等幅正弦振荡形式来回转换，形成的正弦波形是我们期望获得的，但却无法真正使用
 - 一旦使用，就意味着从谐振腔向外耦合能量，谐振腔中必然有因能量耗散等效电阻出现，谐振腔中的能量必然最终被等效电阻耗散一空
 - 真实的谐振腔内部有很多耗能机制，包括电容、电感器件并非理想电容、电感元件，寄生电阻、辐射电阻存在耗能；我们观察谐振腔工作情况时，需要耦合其能量，这种耦合导致的能量外泄将等效为电阻
 - 观察到的高Q值谐振腔都是减幅正弦振荡
- 如何维持等幅正弦振荡？
 - 谐振腔中添加负阻供能，抵偿正阻耗能，整体看等效为纯LC谐振腔
- 真实物理世界不存在理想线性负阻
 - 真实负阻加入LC谐振腔后，将会如何工作？

例2 负阻振荡器的仿真分析

- 图示RLC串联谐振电路中的电阻为S型负阻，其端口伏安特性为

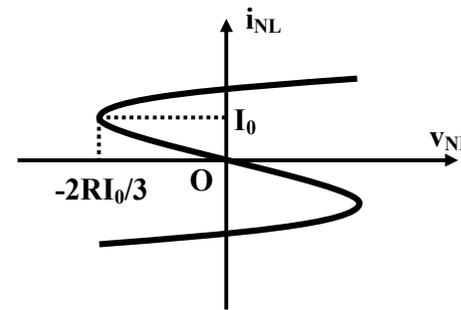
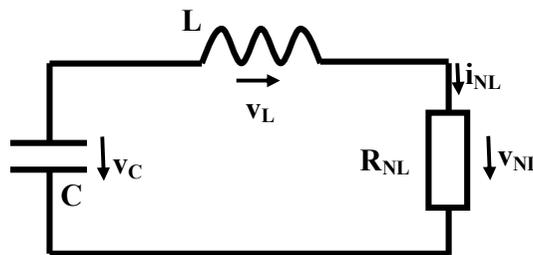
$$v_{NL} = -Ri_{NL} + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3$$

- 其中 $R=100\Omega$ ， $I_0=1\text{mA}$ 。同时串联电感 $L=100\mu\text{H}$ ，电容 $C=20\text{pF}$ ，且电容初始电压 $v_C(0)=10\text{mV}$ ，电感初始电流为0
- 请分析该电路的动态行为



这个负阻是**LC**谐振腔内所有等效电阻的综合效应，包括人为添加的**S**型负阻器件、观测其工作对外能量耦合等效的负载电阻、**LC**谐振腔自身损耗电阻

列写电路方程



$$v_{NL} = -Ri_{NL} + \frac{R}{3I_0^2}i_{NL}^3$$

$$v_C = v_L + v_R = L \frac{di_L}{dt} + v_{NL} = L \frac{di_L}{dt} - Ri_L + \frac{R}{3I_0^2}i_L^3$$

$$i_L = -i_C = -C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}i_L(t) \\ \frac{1}{L}v_C(t) + \frac{R}{L}i_L(t) - \frac{R}{3I_0^2L}i_L^3(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{3I_0^2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C^3(t) \\ i_L^3(t) \end{bmatrix}$$

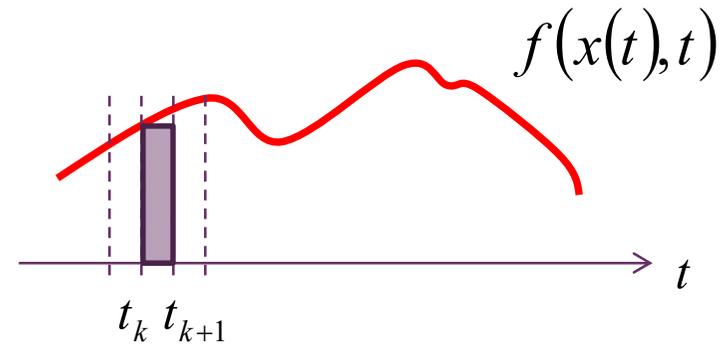
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

状态方程的一般形式

对于非线性动态方程，
可采用数值解

欧拉法

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$



数值解：时间离散化 $t_k = t_{k-1} + \Delta t = t_0 + k\Delta t$

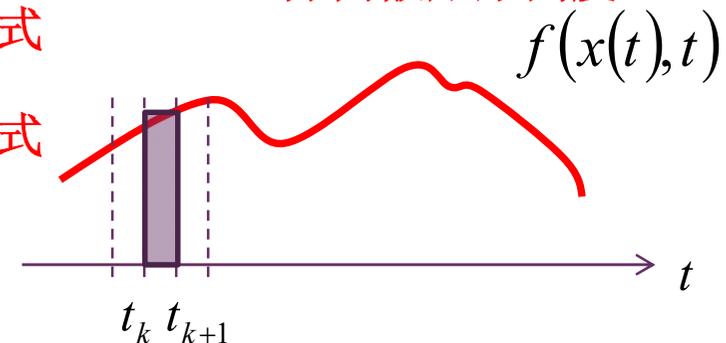
$$\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \cdot dt \approx \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), t_k) \cdot \Delta t \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) \cdot \Delta t \end{cases}$$

前向欧拉法：取 \mathbf{k} 时刻函数值为 \mathbf{k} 段积分离散矩形高度

后向欧拉法：取 $\mathbf{k}+1$ 时刻函数值为 \mathbf{k} 段积分离散矩形高度

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \begin{cases} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), t_k) \cdot \Delta t & \text{显式步进格式} \\ \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) \cdot \Delta t & \text{隐式步进格式} \end{cases}$$

后一时刻状态是从前一时刻状态转移而来



后向欧拉法

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} i_L(t) \\ \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{R}{L} i_L(t) - \frac{R}{3I_0^2 L} i_L^3(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(t_{k+1}) \\ i_L(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C(t_k) \\ i_L(t_k) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} i_L(t_{k+1}) \\ \frac{1}{L} v_C(t_{k+1}) + \frac{R}{L} i_L(t_{k+1}) - \frac{R}{3I_0^2 L} i_L^3(t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

$$v_C(t_{k+1}) = v_C(t_k) - \frac{\Delta t}{C} i_L(t_{k+1})$$

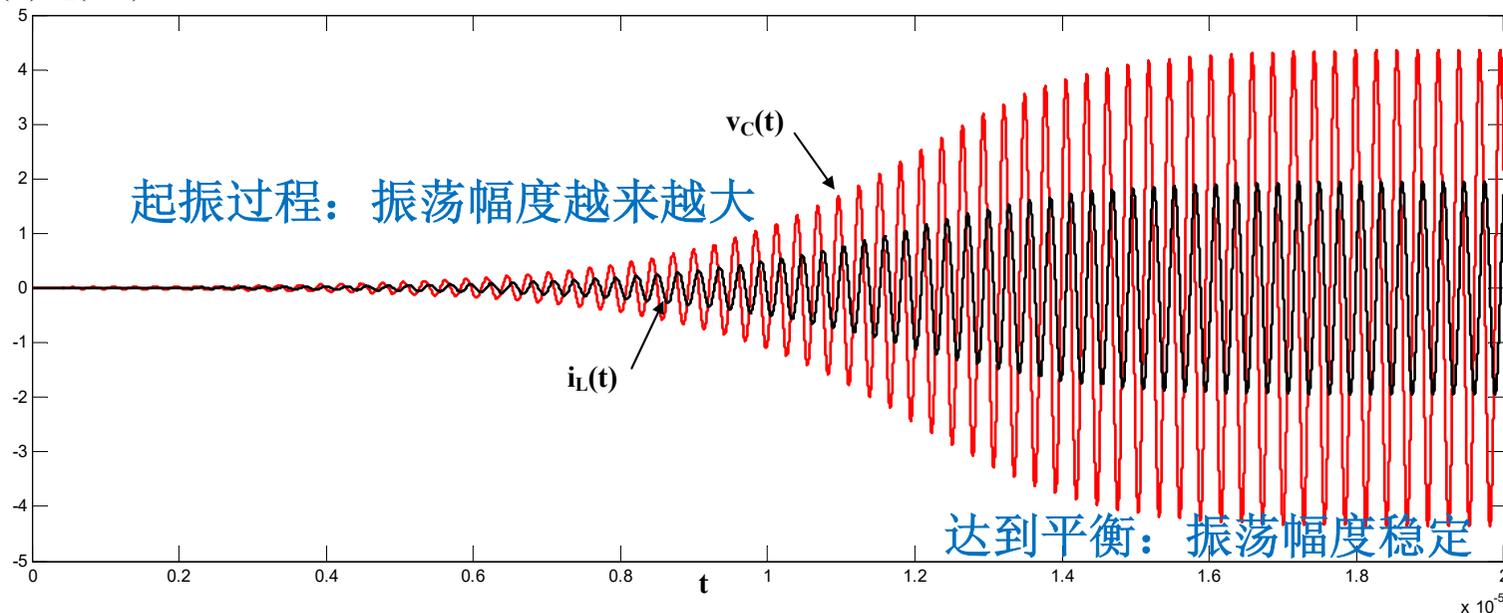
$$\begin{aligned} i_L(t_{k+1}) &= i_L(t_k) + \frac{\Delta t}{L} v_C(t_{k+1}) + \frac{R\Delta t}{L} i_L(t_{k+1}) - \frac{R\Delta t}{3I_0^2 L} i_L^3(t_{k+1}) \\ &= i_L(t_k) + \frac{\Delta t}{L} v_C(t_k) + \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right) \frac{R\Delta t}{L} i_L(t_{k+1}) + -\frac{R\Delta t}{3I_0^2 L} i_L^3(t_{k+1}) \end{aligned}$$

可以用数值法求出 $i_L(t_{k+1})$ ，进一步获得 $v_C(t_{k+1})$ ，如是可由前一个时间点的状态获得下一个时间点的状态，于是从初始状态 $i_L(0) = 0$ ， $v_C(0) = 10\text{mV}$ 获得 $t > 0$ 后的状态

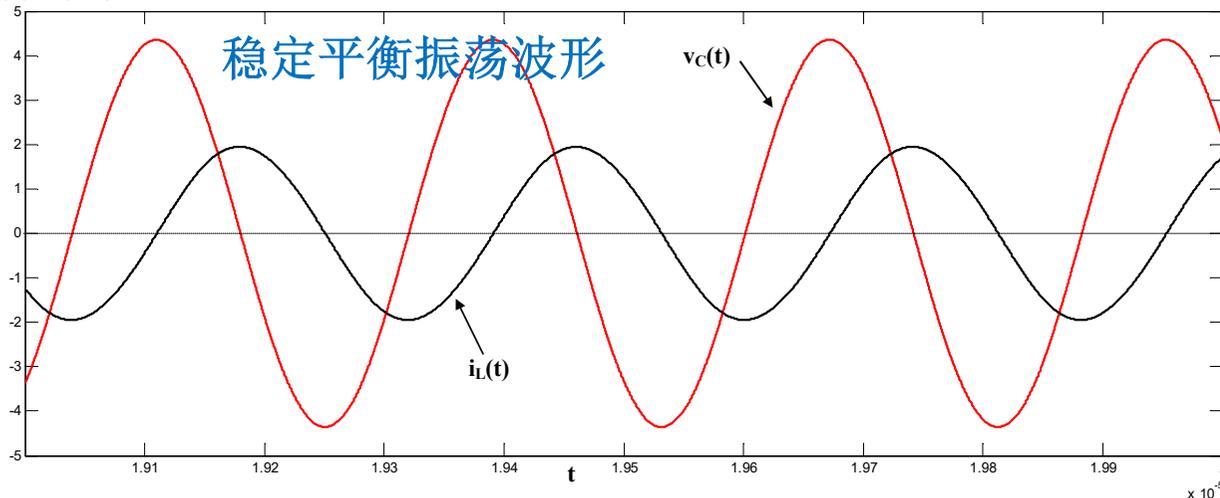
仿真结果

$\Delta t = 0.1ns$

$v_C(V), i_L(mA)$



$v_C(V), i_L(mA)$



$$f_0 = \frac{1}{281ns} = 3.56MHz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times \sqrt{100\mu H \times 20pF}}$$

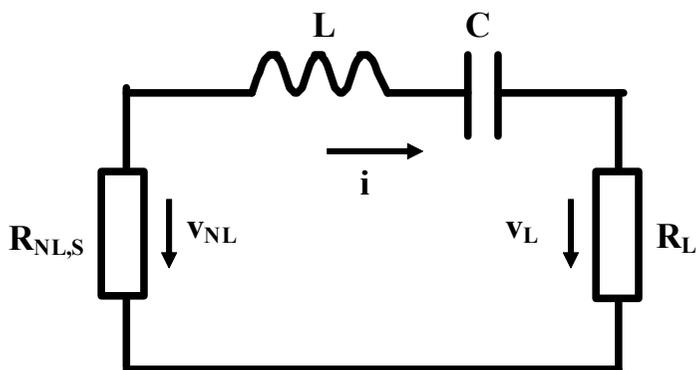
$$I_{Lm} = 2mA = 2I_0$$

$$V_{Cm} = 4.47V = \frac{2I_0}{2\pi f_0 C}$$

为什么有
这样的仿
真结果？

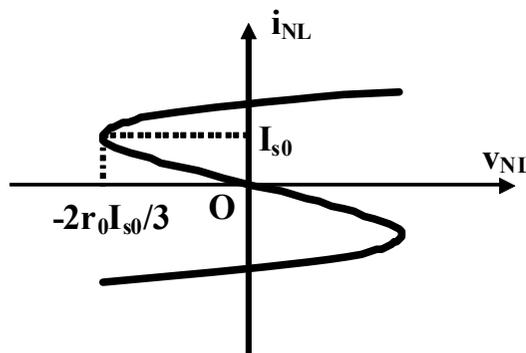
对负阻振荡仿真结果的理论阐释

起振条件



前面数值仿真中的**S**型负阻是整合了**S**型负阻器件、负载电阻和损耗电阻后的综合端口效应，将所有等效串联电阻视为单端口网络，其端口总特性仍然具有**S**型负阻特性

为了分析方便，这里将负载电阻、损耗电阻分离出去，并假设为线性电阻**R_L**，而人为添加的负阻器件的两个关键参量记为**r₀**和**I_{s0}**



起振条件：**r₀ > R_L**

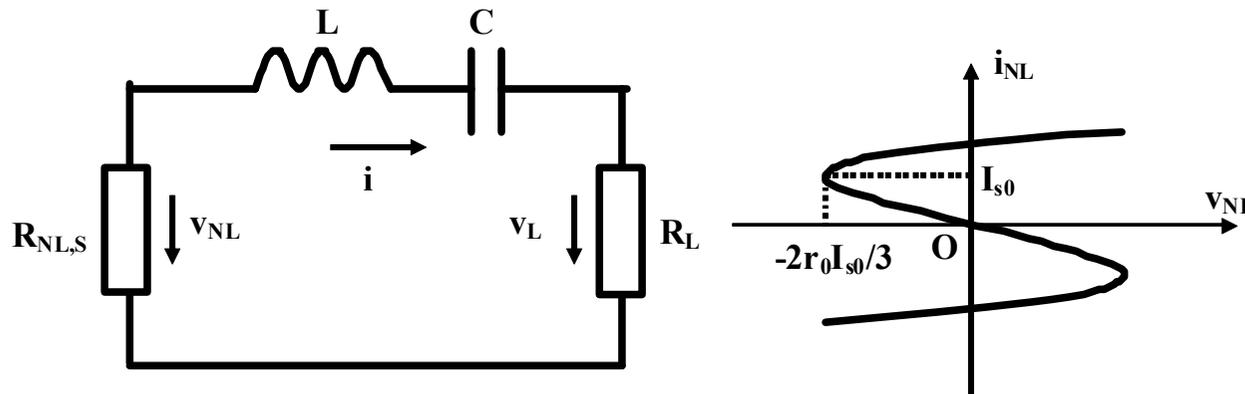
回路总电阻**-r₀ + R_L**为负，才可能在噪声激励下自激增幅振荡：负阻供能大于正阻耗能，多余的能量给电容和电感，其储能越来越多

$$v_{NL} = -r_0 i_{NL} + \frac{r_0}{3I_{s0}^2} i_{NL}^3$$

$$r_d = \left. \frac{dv_{NL}}{di_{NL}} \right|_{i_{NL}=0} = \left(-r_0 + \frac{r_0}{I_{s0}^2} i_{NL}^2 \right) \Big|_{i_{NL}=0} = -r_0$$

负阻器件直流工作点上的微分电阻为负阻

高Q值假设



$$\mathbf{L=100\mu H, C=20pF, R=100\Omega, I_0=1mA, v_C(0)=10mV, i_L(0)=0}$$

$$Q = \left| \frac{Z_0}{R} \right| = \left| \frac{Z_0}{r_0 - R_L} \right| = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{100 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-12}}} = 22.36 \gg 1$$

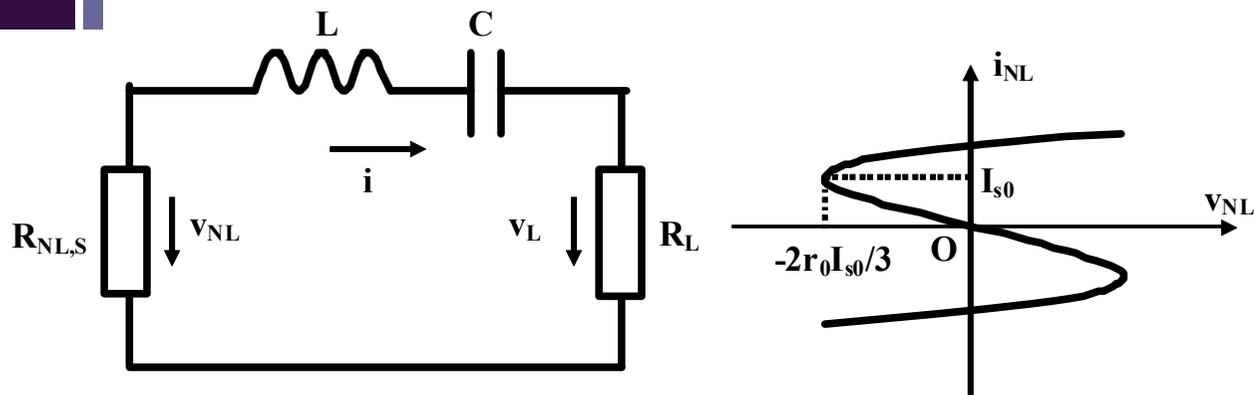
正弦波形纯度

只有Q值足够高（阻尼系数充分接近于0，充分接近于零阻尼情况），选频特性才是足够好，高次谐波分量才能有效滤除，剩下基波分量用于准线性分析：这里的Q值包括无负阻时的Q值，负阻参与后的Q值，均应做如此要求

$$Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1$$

频率稳定度

高次谐波分量被高Q带通滤除



$$v_{NL} = -r_0 i_{NL} + \frac{r_0}{3I_{s0}^2} i_{NL}^3$$

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$

$$v_{NL}(t) = -r_0(-i(t)) + \frac{r_0}{3I_{s0}^2}(-i(t))^3$$

$$= r_0 I_m \cos \omega_0 t - \frac{r_0}{3I_{s0}^2} I_m^3 \cos^3 \omega_0 t$$

$$= r_0 I_m \cos \omega_0 t - \frac{r_0}{3I_{s0}^2} I_m^3 \frac{3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t}{4}$$

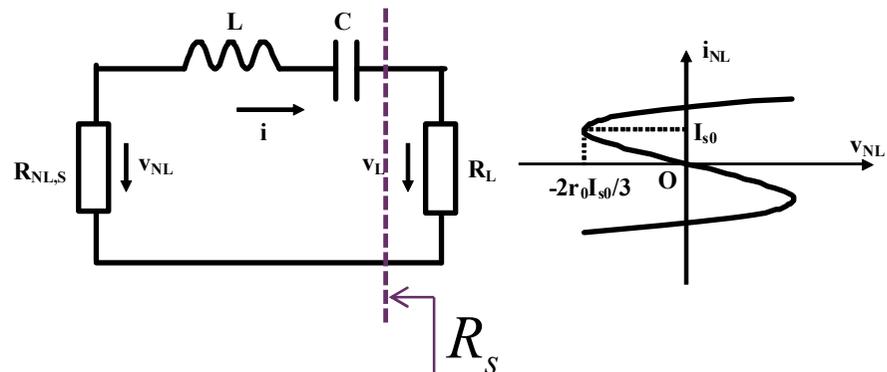
$$= \left(r_0 - r_0 \frac{I_m^2}{4I_{s0}^2} \right) I_m \cos \omega_0 t - \frac{r_0}{12I_{s0}^2} I_m^3 \cos 3\omega_0 t$$

在正弦回路电流激励下，非线性**S**型负阻产生了基波电压分量和高次谐波电压分量，其中，只有基波电压分量可以通过串联**LC**谐振腔到达负载电阻上，高次谐波分量则无法通过**LC**谐振腔到达负载电阻，因而可将**S**型负阻视为只产生基波分量的**准线性**负阻

$$-r_n = -r_0 \left(1 - \left(\frac{I_m}{2I_{s0}} \right)^2 \right)$$

准线性负阻

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$



$$v_{NL}(t) = \left(r_0 - r_0 \frac{I_m^2}{4I_{s0}^2} \right) I_m \cos \omega_0 t - \frac{r_0}{12I_{s0}^2} I_m^3 \cos 3\omega_0 t$$

$$v_L(t) \approx \left(r_0 - r_0 \frac{I_m^2}{4I_{s0}^2} \right) I_m \cos \omega_0 t$$

只有基波分量可以加载到负载电阻上；高次谐波电压分量被电感承担

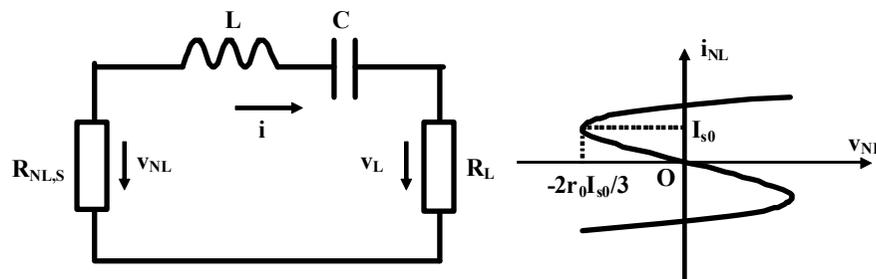
由于负载电阻只看到基波分量，故而从它的视角看，存在一个准线性负阻，该负阻提供能量，该负阻随回路电流增加而降低

$$R_s = \frac{v_L}{-i(t)} = -r_0 \left(1 - \left(\frac{I_m}{2I_{s0}} \right)^2 \right) = -\bar{r}_n$$

正负抵偿：平衡条件

$$\overline{r_n} = r_0 \left(1 - \left(\frac{I_m}{2I_{s0}} \right)^2 \right)$$

负阻随幅度增加而降低



$$\overline{r_n} = r_0 \left(1 - \left(\frac{I_{m\infty}}{2I_{s0}} \right)^2 \right) = R_L$$

负阻抵偿正阻：幅度平衡条件
实部条件

$$I_{m\infty} = 2I_{s0} \sqrt{1 - \frac{R_L}{r_0}}$$

平衡点的回路电流振荡幅度

$$\omega_{osc} L + \frac{1}{-\omega_{osc} C} = 0$$

正负电抗相互抵偿：频率平衡条件
虚部条件

$$\omega_{osc} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

平衡点的回路电流振荡频率

由平衡条件计算振荡幅度和振荡频率

数值仿真设定条件: $L=100\mu\text{H}$, $C=20\text{pF}$, $R=100\Omega$, $I_0=1\text{mA}$, $v_C(0)=10\text{mV}$, $i_L(0)=0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{100 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-12}}} = 3.56\text{MHz}$$

振荡频率和数值仿真结果一致

$$v_{NL,t} = v_{NL} + v_L = -r_0 i_{NL} + \frac{r_0}{3I_{s0}^2} i_{NL}^3 + R_L i_{NL}$$

实际电阻分为负阻和正阻两部分

$$= (-r_0 + R_L) i_{NL} + \frac{r_0}{3I_{s0}^2} i_{NL}^3 = -R i_{NL} + \frac{R + R_L}{3I_{s0}^2} i_{NL}^3$$

$$= -R i_{NL} + \frac{R}{3 \left(\sqrt{\frac{R}{R + R_L}} I_{s0} \right)^2} i_{NL}^3 = -R i_{NL} + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3$$

数值仿真设定条件: 只有一个综合负阻端口条件

$$I_{s0} = \sqrt{\frac{R + R_L}{R}} I_0 = \sqrt{\frac{r_0}{r_0 - R_L}} I_0$$

$$I_{m\infty} = 2I_{s0} \sqrt{1 - \frac{R_L}{r_0}} = 2I_0 = 2\text{mA}$$

振荡幅度和数值仿真结果也完全一致

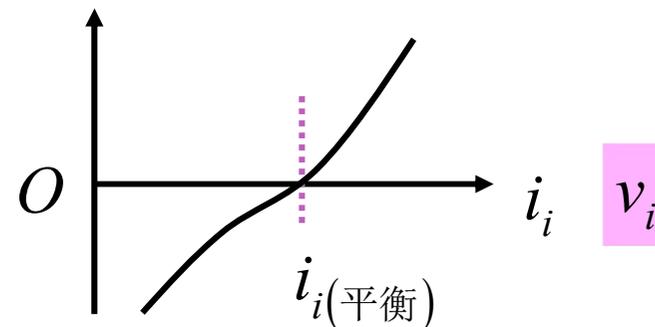
准线性分析无法给出起振全过程（瞬态过程）的时域解析解，但是可以给出进入稳态后的正弦波振荡的振荡幅度和振荡频率：这个近似方法对我们理解正弦振荡原理而言是足够用的

振荡条件小结

- RLC自由谐振（零输入）存在正阻能量损耗，需要负阻提供能量抵偿正阻消耗能量
 - RLC串联谐振回路中添加负阻，抵偿正阻影响，可以形成稳定的正弦波振荡
 - 起振条件： $r_n > R_s$
 - 平衡条件： $r_n = R_s$
 - 稳定条件： r_n 随幅度增加单调下降
 - RLC并联谐振回路中添加负导，抵偿正导影响，可以形成稳定的正弦波振荡
 - 起振条件： $g_n > G_p$
 - 平衡条件： $g_n = G_p$
 - 稳定条件： g_n 随幅度增加单调下降

$$-g_n + G_p$$

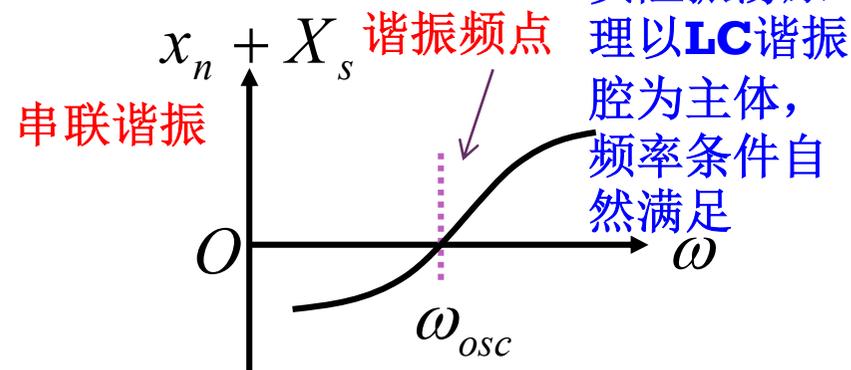
$$-r_n + R_s$$



幅度条件（实部条件）

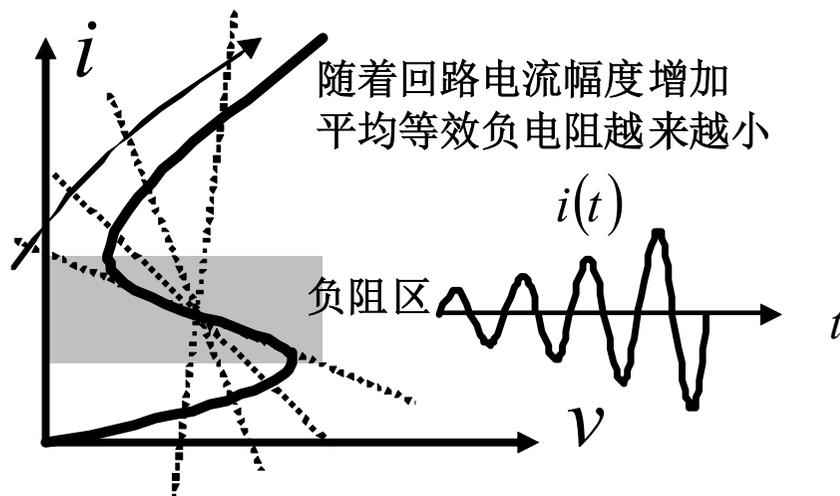
并联谐振

$$b_n + B_p$$



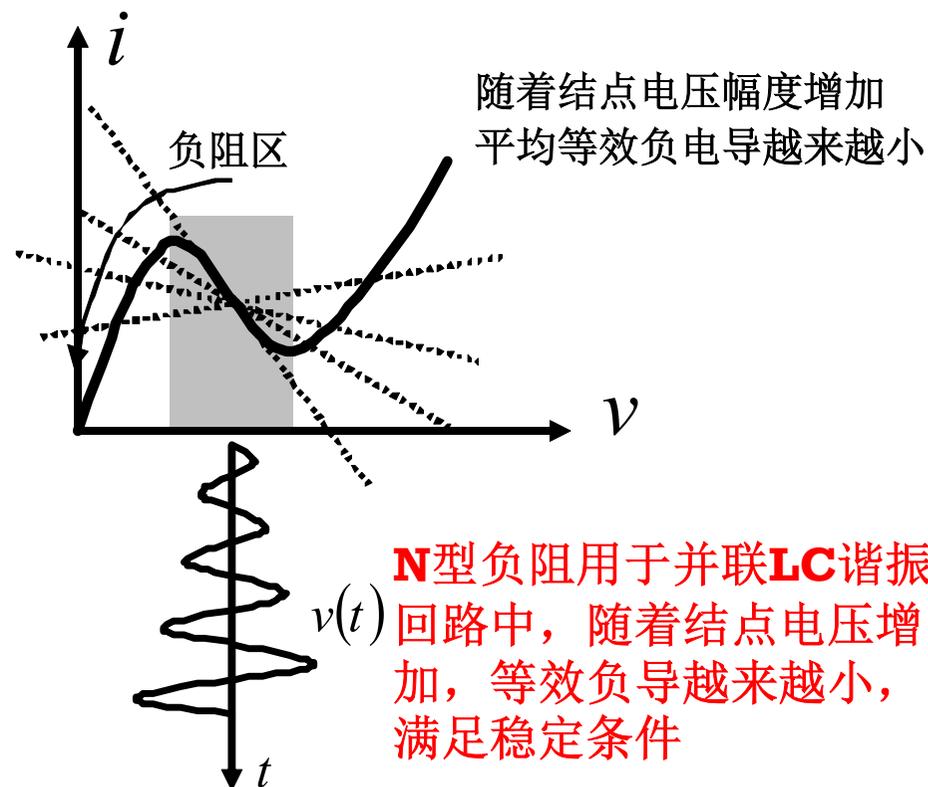
频率条件（虚部条件）

串联S型负阻， 并联N型负阻



S型负阻用于串联**LC**谐振回路中，随着回路电流增加，等效负阻越来越小，满足稳定条件

RLC串联谐振用**S**型负阻形成正弦振荡

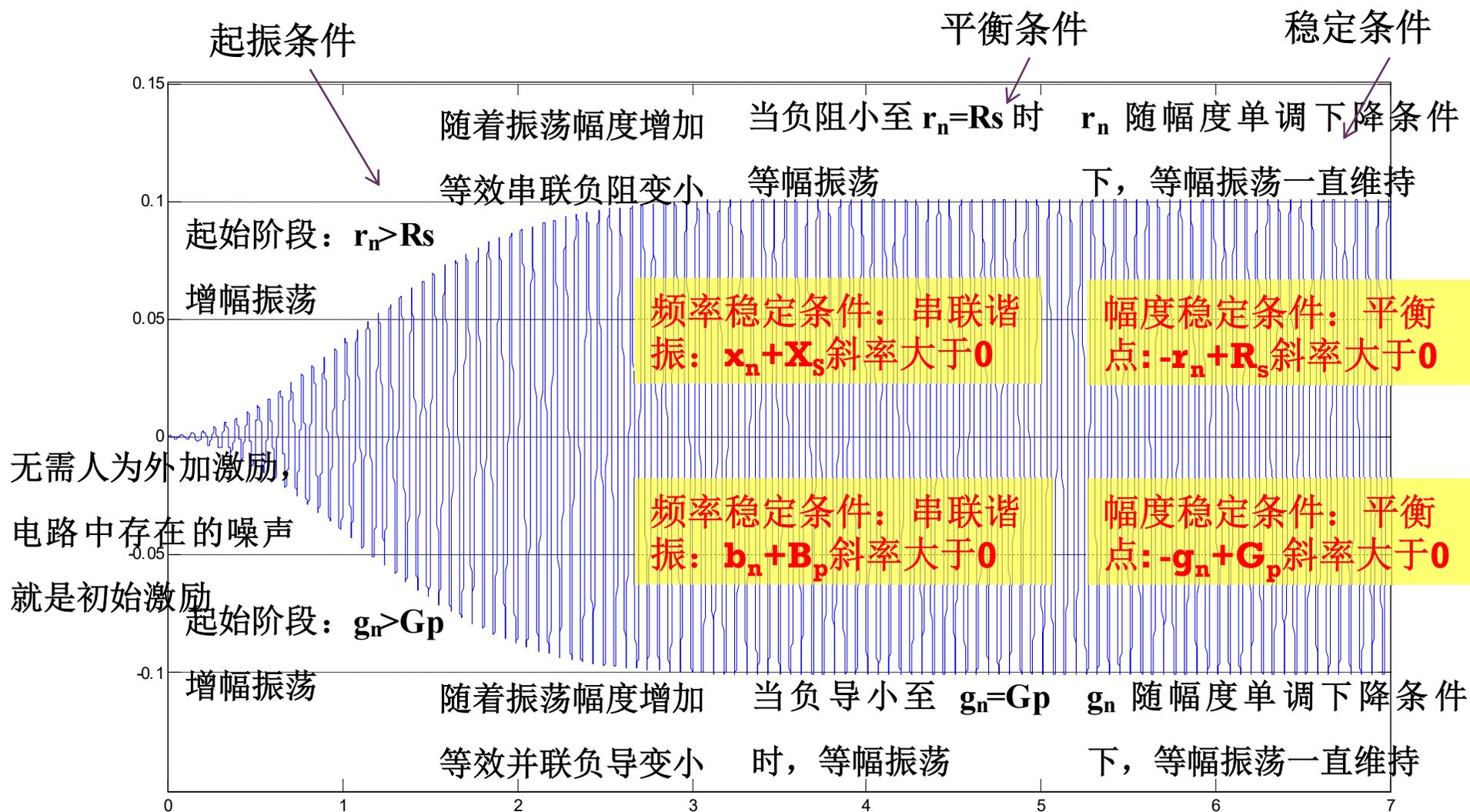


N型负阻用于并联**LC**谐振回路中，随着结点电压增加，等效负导越来越小，满足稳定条件

RLC并联谐振用**N**型负阻形成正弦振荡

S型负阻并入并联谐振回路，**N**型负阻串入串联谐振回路，最终会落入稳定平衡点

正弦振荡：从起振到稳定



小结：负阻

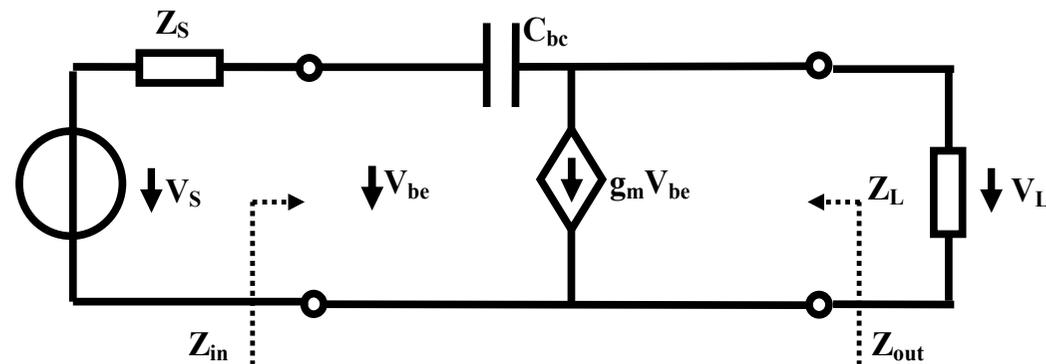
- 二端口的受控源通过正反馈连接，可以形成单端口的等效负阻
- 人为制作的负阻器件，其负阻特性可以通过某种物理机制或内在的正反馈机制形成的
 - 隧道二极管的负阻是隧穿效应形成的，肖克利二极管的负阻是内在正反馈机制形成的
- 常见负阻有两种基本类型，S型负阻和N型负阻
- 对S型负阻施加电压激励，或者对N型负阻施加电流激励，存在3解情况
 - 其中两解对应稳定平衡点，可形成记忆
 - N型负阻的两个稳态解可形成状态记忆单元：如SRAM
 - S型负阻的两个稳态解可形成有记忆的开关
 - 中间位置的解为不稳定平衡点，实际应用中无法观测
 - 观测到的是某种滞回特性

小结：负阻的有源应用

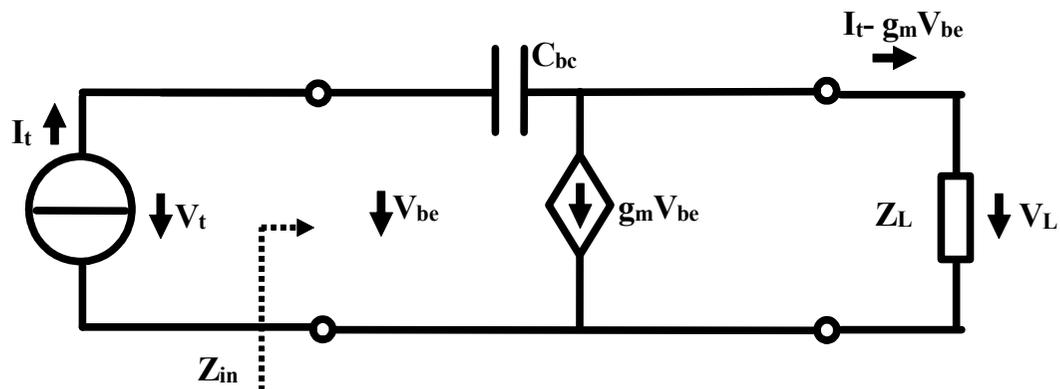
- 对S型负阻施加电流偏置，对N型负阻施加电压偏置，如果将负阻器件偏置在负阻区，负阻区直流工作点上存在线性微分负阻
 - 该线性微分负阻可向外释放功率，从而实现有源功能：放大和振荡
 - 负阻放大器和负阻振荡器对外释放的能量来自直流偏置源，负阻器件将其转换为交流能量，负阻器件起到和晶体管同样的换能作用
- 负阻放大器不如晶体管放大器易于设计、控制和高效，因而几乎不用
- 除了用负阻器件构造负阻振荡器外，受控源类型的振荡器（如晶体管振荡器）一定是正反馈结构的，而正反馈的受控源又可等效为负阻，用负阻理解正反馈振荡是简单的
- 从负阻观点考察LC正弦波振荡器，三个振荡条件为
 - 起振条件：工作点位置的微分负阻效应高于LC腔内部各种损耗正阻效应，形成增幅振荡效应
 - 平衡条件：随着振荡幅度增加，负阻效应降低，当准线性负阻效应和正阻效应相当时，达到平衡，振荡幅度不再增加
 - 稳定条件：负阻器件的准线性负阻效应具有随振荡幅度增加单调下降特性，则属稳定的平衡，可以持续输出稳定幅度和频率的正弦波形

习题选讲： 晶体管寄生电容效应导致稳定性问题

- 作业11.2 晶体管不稳定性的来源
- 练习10.4.10: 图E10.4.6是用来考察CE组态晶体管 C_{bc} 对输入阻抗和输出阻抗影响的原理性电路，其中只剩下晶体管原本设计的压控流源和跨接在压控流源输出和输入之间的寄生电容 C_{bc} ，考察当 $Z_L=R_L$ ， $j\omega L_2$ 两种负载情况下，输入阻抗 Z_{in} 的性质；考察当 $Z_S=R_S$ ， $j\omega L_1$ 两种负载情况下，输出阻抗 Z_{out} 的性质。



加流求压获得端口阻抗



$$\dot{V}_t = \dot{I}_t \frac{1}{j\omega C_{bc}} + (\dot{I}_t - g_m \dot{V}_t) Z_L = \dot{I}_t \left(\frac{1}{j\omega C_{bc}} + Z_L \right) - g_m \dot{V}_t Z_L$$

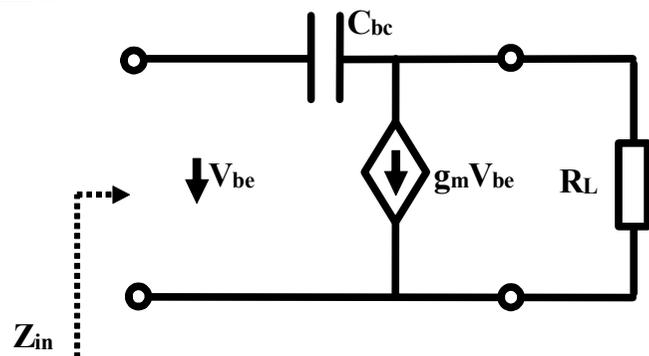
$$Z_{in} = \frac{\dot{V}_t}{\dot{I}_t} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{bc}} + Z_L}{1 + g_m Z_L} = \frac{1}{j\omega(1 + g_m Z_L)C_{bc}} + \frac{Z_L}{1 + g_m Z_L}$$

$$Z_{in}(Z_L = R_L) = \frac{1}{j\omega(1 + g_m R_L)C_{bc}} + R_L \parallel \frac{1}{g_m}$$

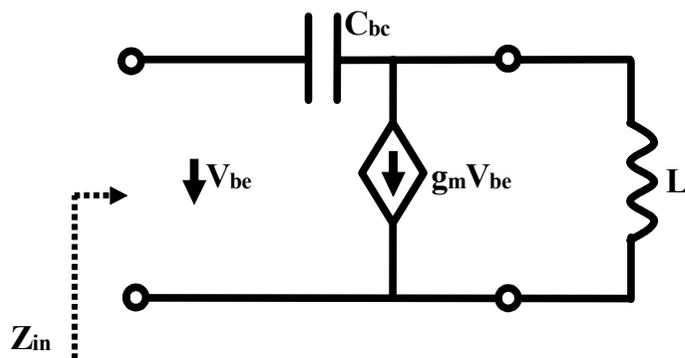
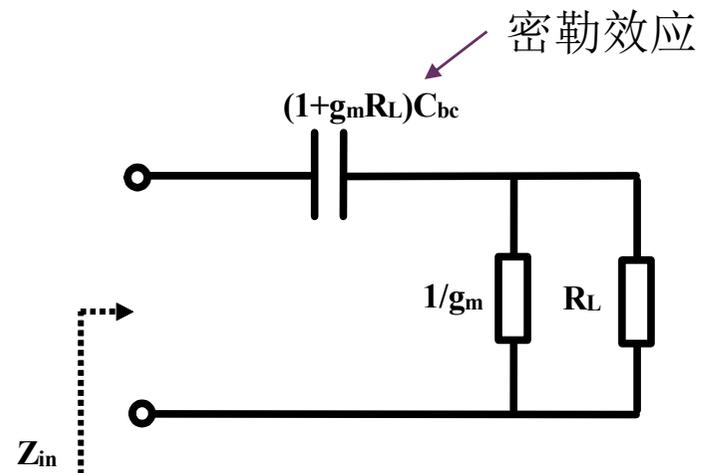
$$Z_{in}(Z_L = j\omega L) = \frac{1}{j\omega C_{bc} - \omega^2 L C_{bc} g_m} + j\omega L \parallel \frac{1}{g_m}$$

$$Z_L \parallel \frac{1}{g_m}$$

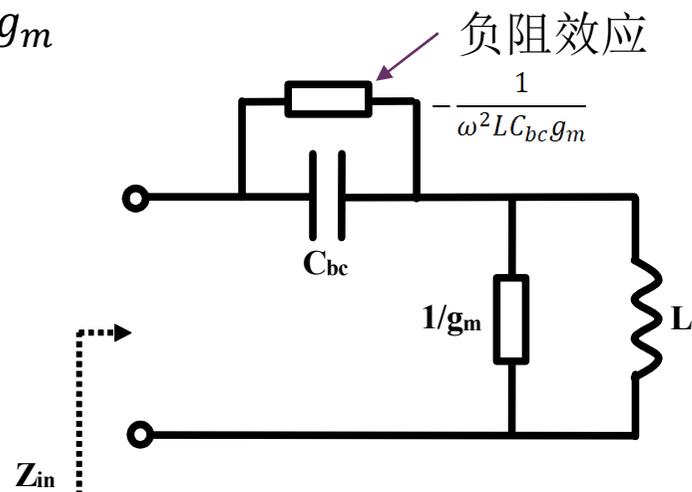
输入阻抗



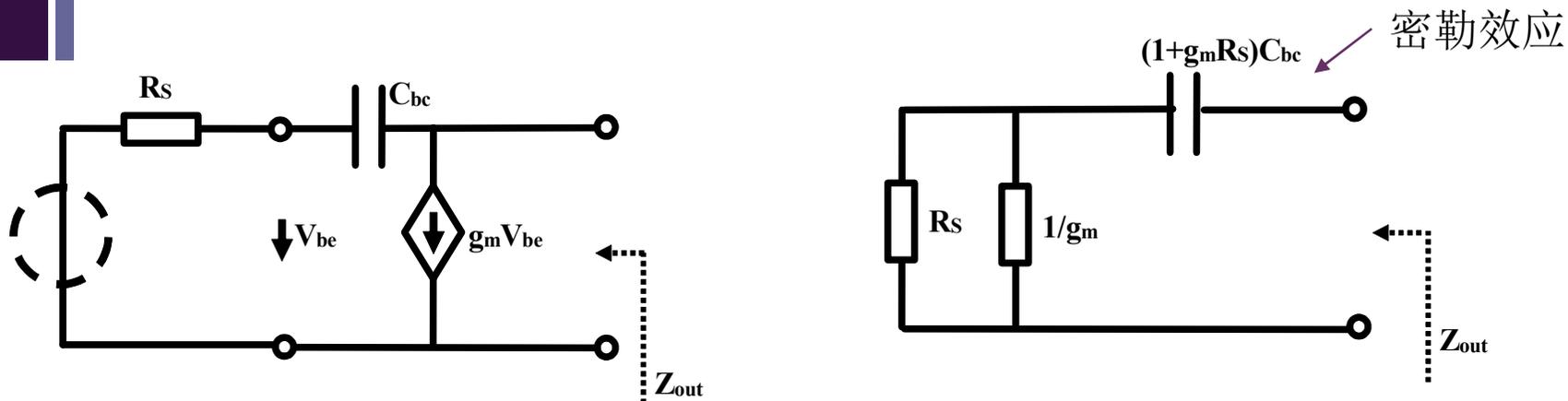
$$Z_{in}(Z_L = R_L) = \frac{1}{j\omega(1 + g_m R_L)C_{bc}} + R_L \parallel \frac{1}{g_m}$$



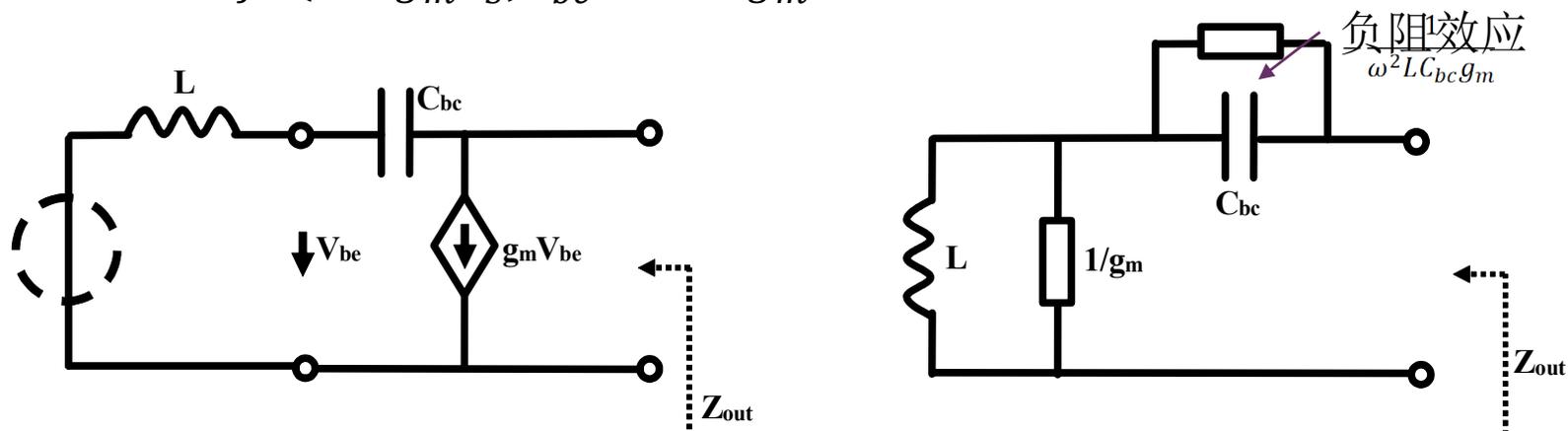
$$Z_{in}(Z_L = j\omega L) = \frac{1}{j\omega C_{bc} - \omega^2 L C_{bc} g_m} + j\omega L \parallel \frac{1}{g_m}$$



输出端口加流求压获得输出阻抗



$$Z_{out}(Z_S = R_S) = \frac{1}{j\omega(1 + g_m R_S)C_{bc}} + R_S \parallel \frac{1}{g_m}$$



$$Z_{out}(Z_S = j\omega L) = \frac{1}{j\omega C_{bc} - \omega^2 LC_{bc} g_m} + j\omega L \parallel \frac{1}{g_m}$$

跨接在输出和输入之间的寄生电容

- C_{bc} 是跨接在CE组态晶体管输入端和输出端的跨接电容
 - 密勒效应：当一个端口接电阻负载时，另一个端口看入阻抗中有一个等效大电容，从而 C_{bc} 很容易呈现高频短路效应，从而高频增益严重下降

$$C_{in} = (1 + g_m R_L) C_{bc}$$

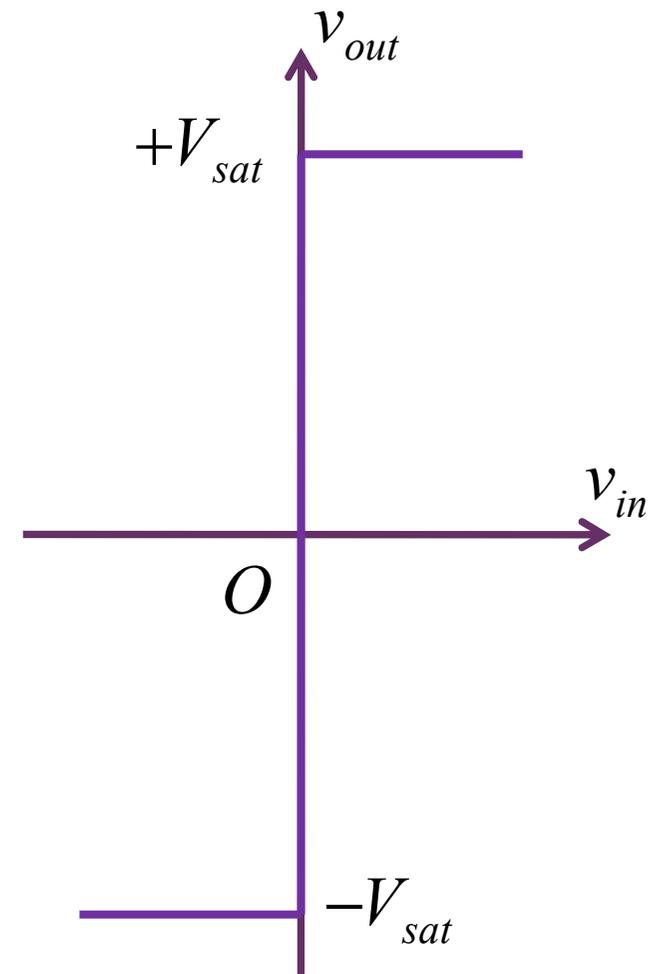
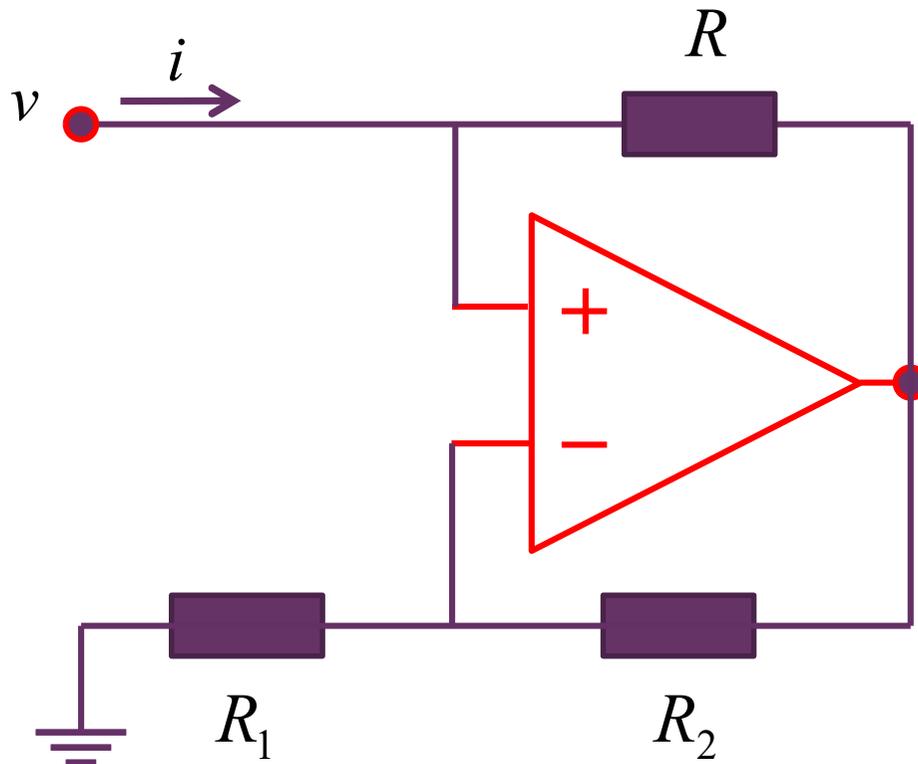
$$C_{out} = (1 + g_m R_S) C_{bc}$$

- 负阻效应：当一个端口接电感负载时，另一个端口看入阻抗中有一个等效负阻，当端口正阻无法抵偿等效负阻时，放大器将自激振荡， C_{bc} 是CE组态晶体管放大器的不稳定来源
 - 哈特莱三点式结构，从任何一个端口看，都会看到等效负阻，其中 C_{bc} 是寄生的，而两个电感则是用来做共轭匹配的，从而放大器调试时将存在自激振荡的可能
 - 绝对稳定性（放大器调试中不会自激）的问题在后续专业课中讨论

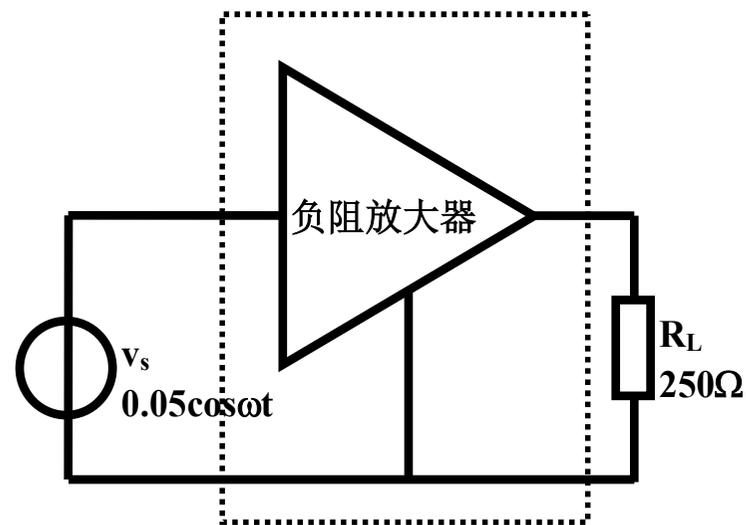
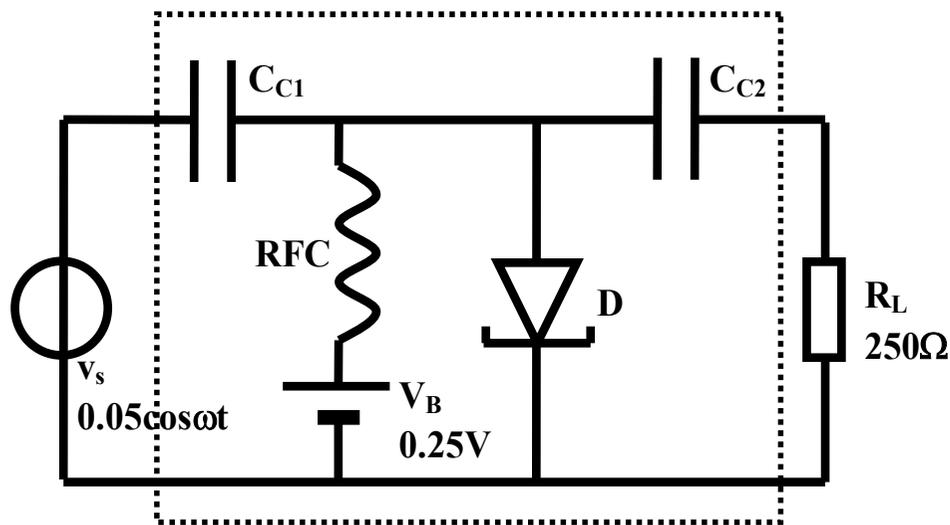
作业1 运放构造的N型负阻

已知理想运放的转移特性，分析确认如图所示单端口网络的伏安特性为**N**型负阻

提示：电压源驱动，确保负反馈大于正反馈，确保获得**N**型负阻特性



作业2 负阻放大器抽象



负阻放大器就是一个并臂负阻

$$G_p = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{G_L}{G_L - g_d} > 1$$

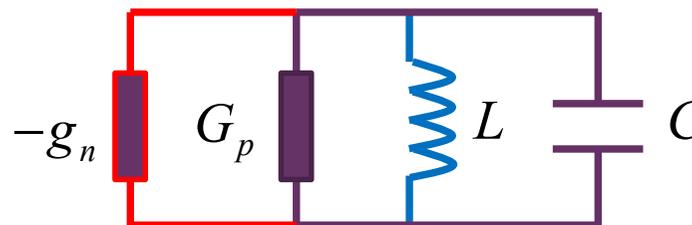
$G_L > g_d$ 确保整体呈现正阻，否则不稳定，或者进入正阻区锁定，或者变成振荡器

- (1) 给出图示虚框二端口网络的 \mathbf{z} 参量
- (2) 给出对应参量的等效电路模型
- (3) 求放大器输入阻抗和输出阻抗

作业3 负阻振荡幅度和频率

- 已知某负导元件的负导大小和振荡幅度的关系为

$$g_n = \frac{0.01}{V_m} \quad \begin{array}{l} \text{电压单位: v} \\ \text{跨导单位: s} \end{array}$$



- 已知电感为 $0.1\mu\text{H}$ ，电容为 200pF ，电感无载 Q 值为 $Q_0=100$

$$Q_0 = \frac{Y_0}{G_{p0}} = \frac{1}{G_{p0}\omega_0 L}$$

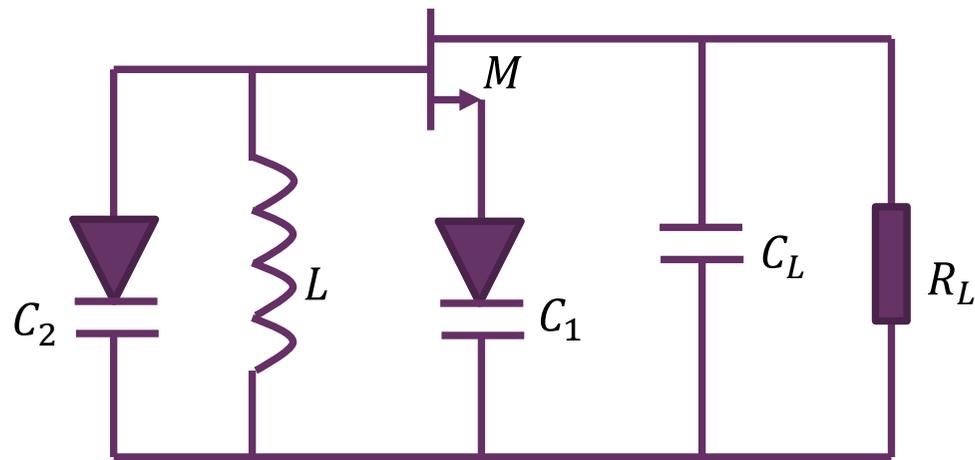
- 负载电阻为 $1\text{k}\Omega$

$$G_{p0} = \frac{1}{Q_0\omega_0 L}$$

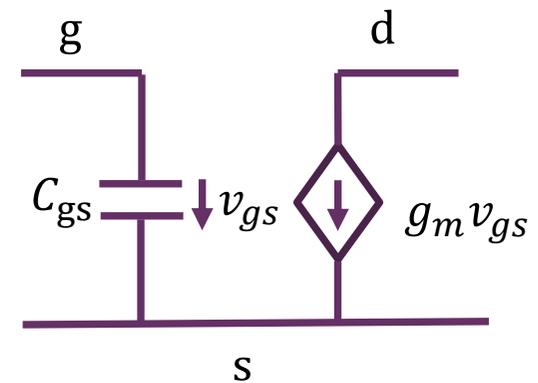
- 求输出正弦振荡信号的频率和幅度

作业4 等效负阻

- 图示为微波频段的变容管调谐的正弦波振荡器，请用交流小信号模型确认这是一个负阻振荡器



交流电路

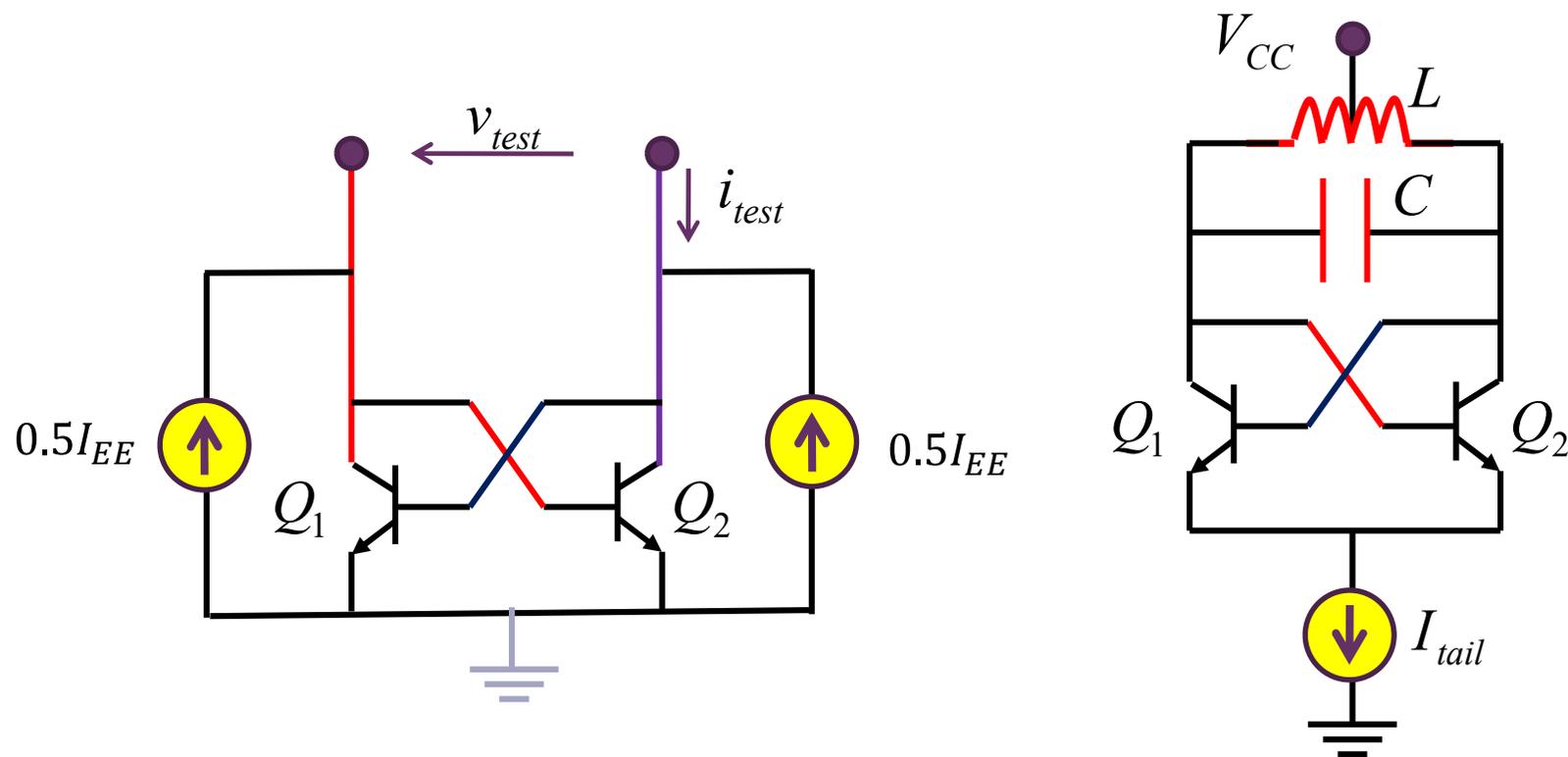


GaAs MESFET

交流小信号简化分析模型

CAD作业1：差分对构造的N型负阻

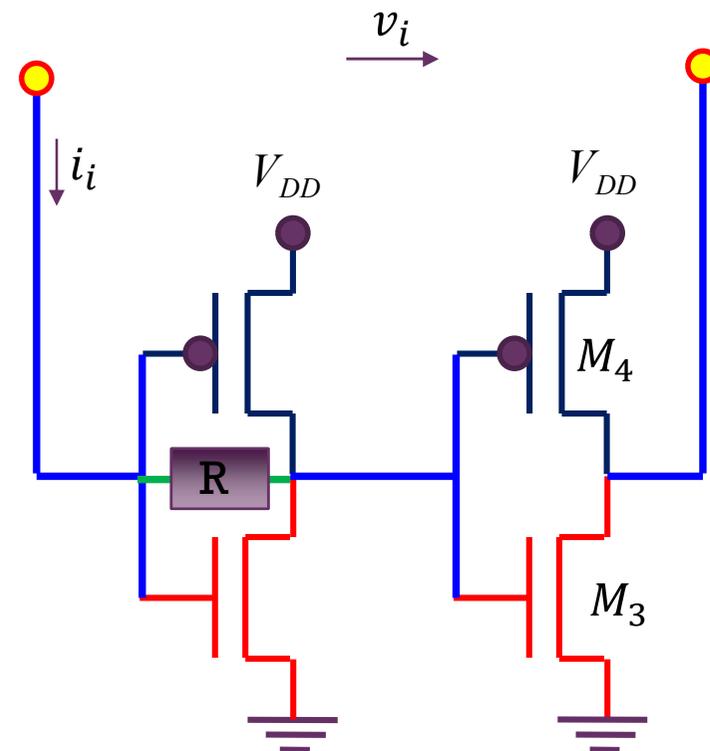
- 仿真确认：在端口加压求流，确认正反馈的差分对是一个N型负阻
- 仿真确认：N型负阻并联在并联LC谐振腔中，可形成正弦振荡（电容两端电压）



CAD作业2 反相器构造的S型负阻

- 首先设计CMOS反相器，使得在 $0.5V_{DD}$ 时翻转
- 仿真确认如下端口将形成S型负阻
- 仿真确认，S型负阻对接电容形成张弛振荡（输出电压方波波形）

两个CAD作业
选作其一即可



本节课内容在教材中的章节对应

- P459: 运放开环: 比较器
- P461: 运放正反馈: 施密特触发器
- P464: 等效负阻
- P983: 负阻二极管
- P61: N型和S型负阻二极管
- P550: 状态记忆单元
- P560: SRAM, DRAM
- P330: 负阻放大器
- P599, P607: 负阻LC振荡器仿真
- P856-874: 负阻振荡原理