电子电路与系统基础II

理论课第12讲　LC正弦波振荡器
（负阻振荡原理）

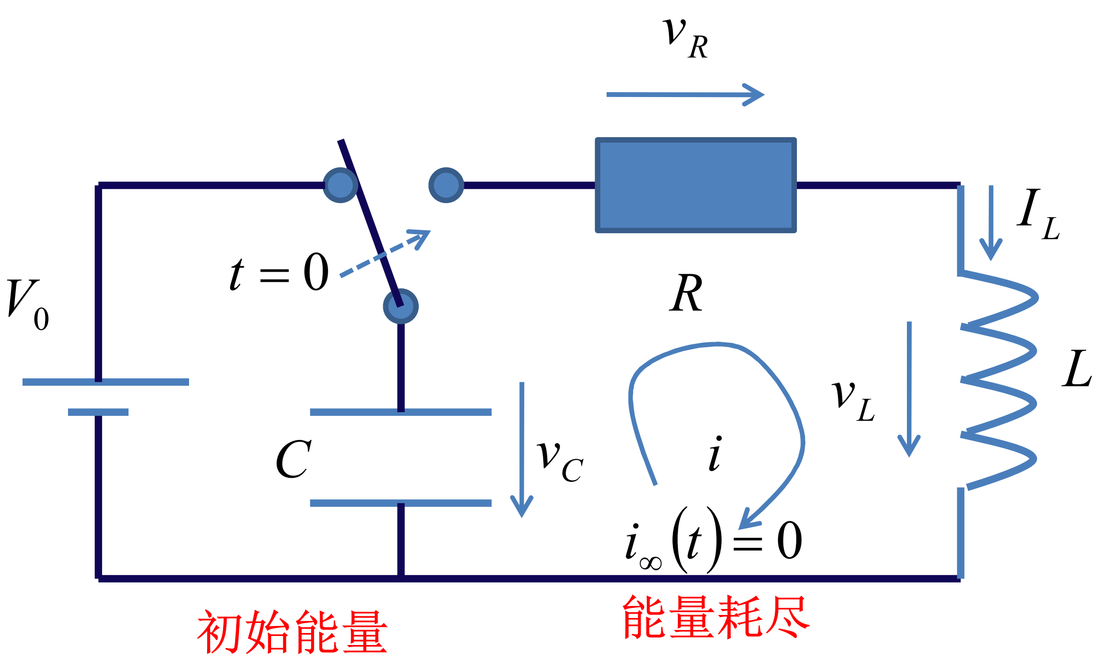
李国林
清华大学电子工程系

LC正弦波振荡器 大纲

- RLC谐振回路中的能量转换分析
  - 过阻尼
  - 欠阻尼
  - 无阻尼
  - 负阻尼
- 负阻振荡原理
  - 基本原理
  - 三点式LC振荡器的负阻原理
  - 差分对负阻LC振荡器
    - 准线性分析

本节重点考察LC正弦振荡的负阻振荡原理，下节则重点考察正反馈正弦振荡原理。前者以LC谐振腔为主体，负阻供能抵偿谐振腔耗能，后者以放大器为主体，用正反馈自供能，两者基本等同，分析角度不同

一、从RLC谐振回路看能量转换



$$v_C(0^-)=V_0 \qquad i_L(0^-)=0$$

$$i(0^+)=i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt}=\frac{v_L(0^+)}{L}=\frac{v_C(0^+)}{L}=\frac{V_0}{L}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad \xi=\frac{R}{2Z_0}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

五要素法

$$i(t)=i_\infty(t)+(I_0-I_{\infty 0})e^{-\xi\omega_0 t}\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t$$

$$+\left(\frac{\dot{I}_0-\dot{I}_{\infty 0}}{\xi\omega_0}+I_0-I_{\infty 0}\right)\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t$$

$$=\frac{V_0}{L\xi\omega_0}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t \qquad (t\ge 0)$$

过阻尼

$$\xi=\frac{R}{2Z_0}>1$$

$$\lambda_{1,2}=\left(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0=-\omega_{p1,2}$$

两个负实根：单位**1/s**

$$i(t)=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\overset{\xi>1}{=}\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0 t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 t$$

$$=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0 t}\frac{e^{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}-e^{-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}}{2}=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\frac{e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}-e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}}{2}$$

$$=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\qquad(t\ge 0)$$

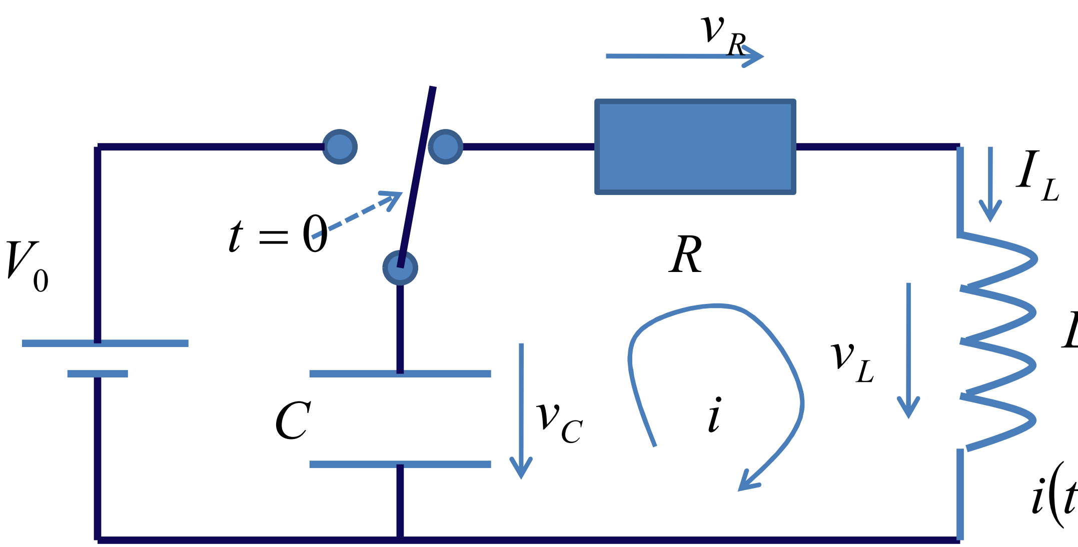
$$\tau_1=-\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{\omega_{p1}}=\frac{1}{\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0}=\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{\omega_0}$$

长寿命项

$$\tau_2=-\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{\omega_{p2}}=\frac{1}{\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0}=\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{\omega_0}$$

短寿命项

分压关系



$$i(t)=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\frac{V_0}{Z_0}e^{-\xi\omega_0 t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t \quad (t\geq 0)$$

$$v_R(t)=Ri(t)=V_0\frac{2\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0 t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t$$

$$v_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=V_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t\right)$$

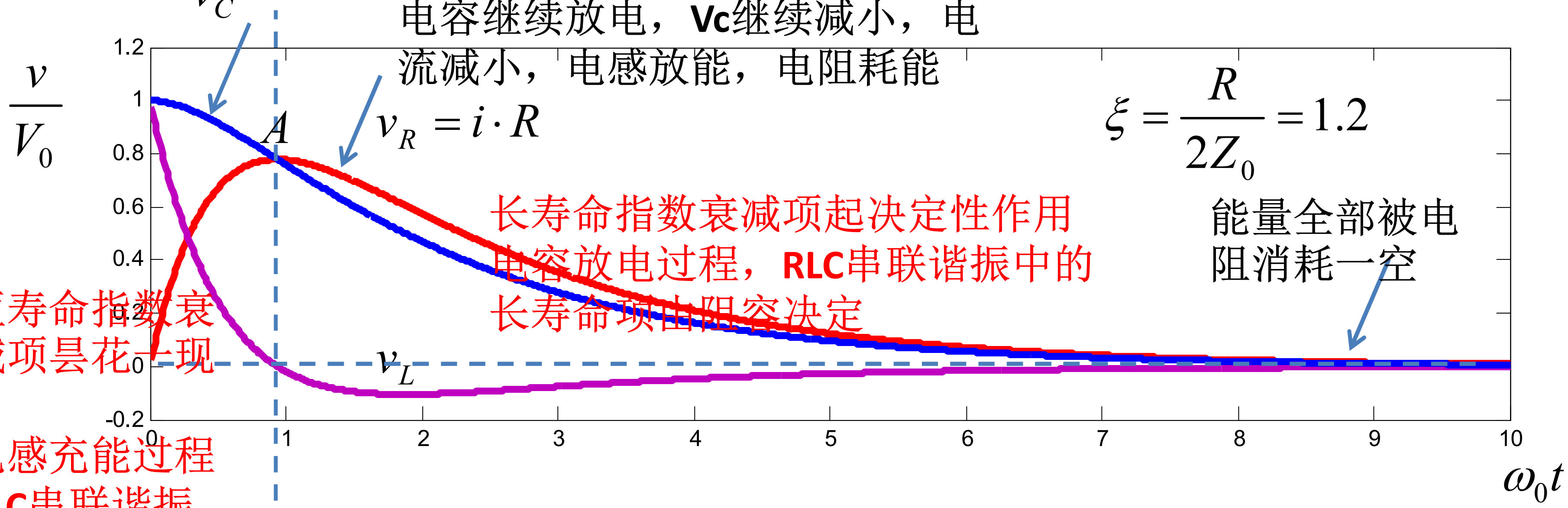
$$v_C(t)=v_L(t)+v_R(t)=V_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t\right)$$

都是指数衰减规律，长寿命项和短寿命项

过阻尼：能量转换关系

电容放电，Vc减小，电流增加，
电感充能，电阻耗能

电容继续放电，Vc继续减小，电流减小，电感放能，电阻耗能

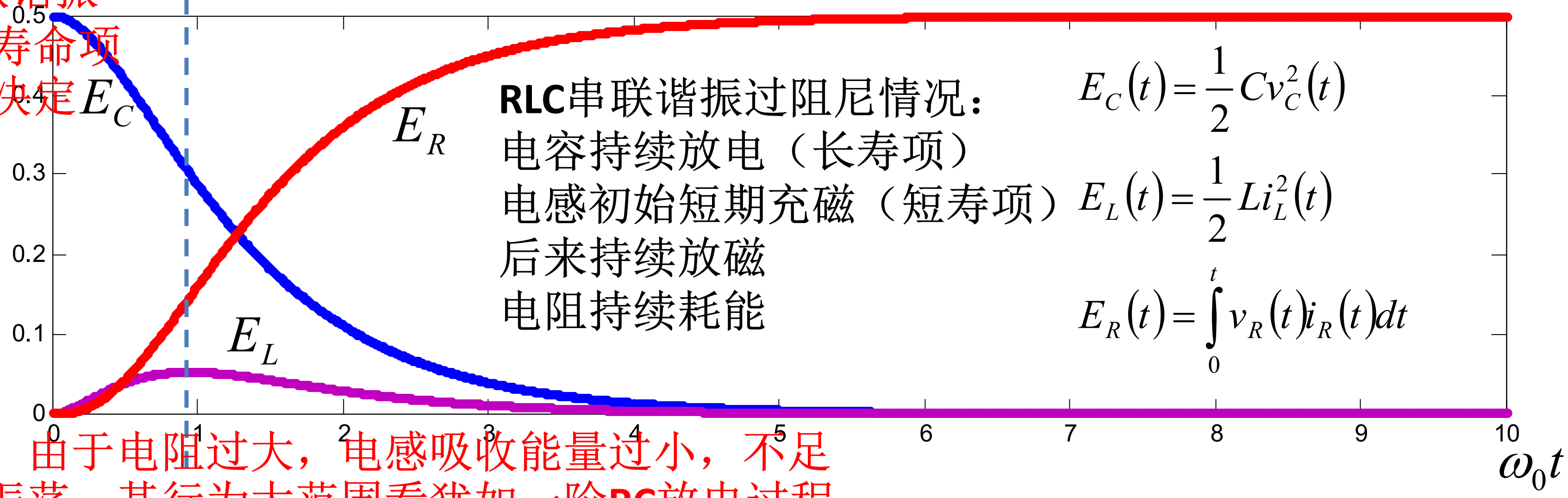


长寿命指数衰减项起决定性作用
电容放电过程，**RLC**串联谐振中的长寿命项由阻容决定

能量全部被电阻消耗一空

短寿命指数衰减项昙花一现

电感充能过程
RLC串联谐振中的短寿命项由阻感决定



RLC串联谐振过阻尼情况：
电容持续放电（长寿项）
电感初始短期充磁（短寿项）
后来持续放磁
电阻持续耗能

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t)$$

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

$$E_R(t) = \int_0^t v_R(t) i_R(t) dt$$

过阻尼：由于电阻过大，电感吸收能量过小，不足以形成振荡，其行为大范围看犹如一阶**RC**放电过程

欠阻尼

$$0 < \xi = \frac{R}{2Z_0} < 1$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$$

$$= -\xi\omega_0 \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_d$$

共轭复数特征根：单位**1/s**

$$i(t) = \frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t$$

$$= \frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega_d t$$

幅度指数衰减的正弦振荡波形

无阻尼

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0$$

$$= \pm j\omega_0$$

共轭纯虚根：单位**1/s**

$$i(t) = \frac{V_0}{Z_0}\sin\omega_0 t$$

正弦振荡波形

临界阻尼

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0$$

$$= -\omega_0$$

负实重根：单位**1/s**

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{V_0}{Z_0}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{V_0}{Z_0}e^{-\xi\omega_0 t}\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t = \frac{V_0}{Z_0}\omega_0 t e^{-\omega_0 t}$$

不是简单的指数衰减

无阻尼：振荡

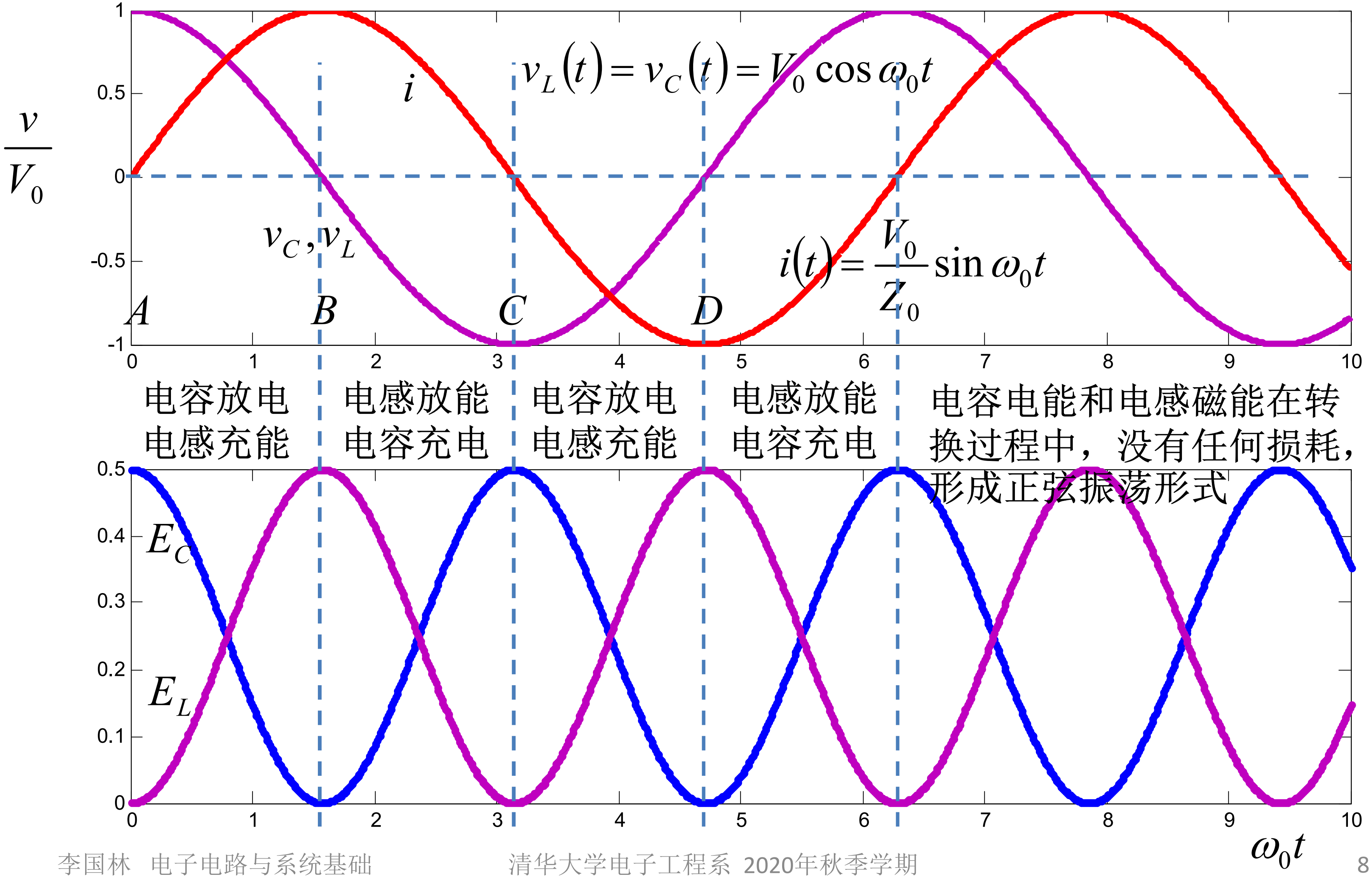
$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 0$$

$$Q = \infty$$

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0$$

$$= \pm j\omega_0$$

特征根为纯虚根



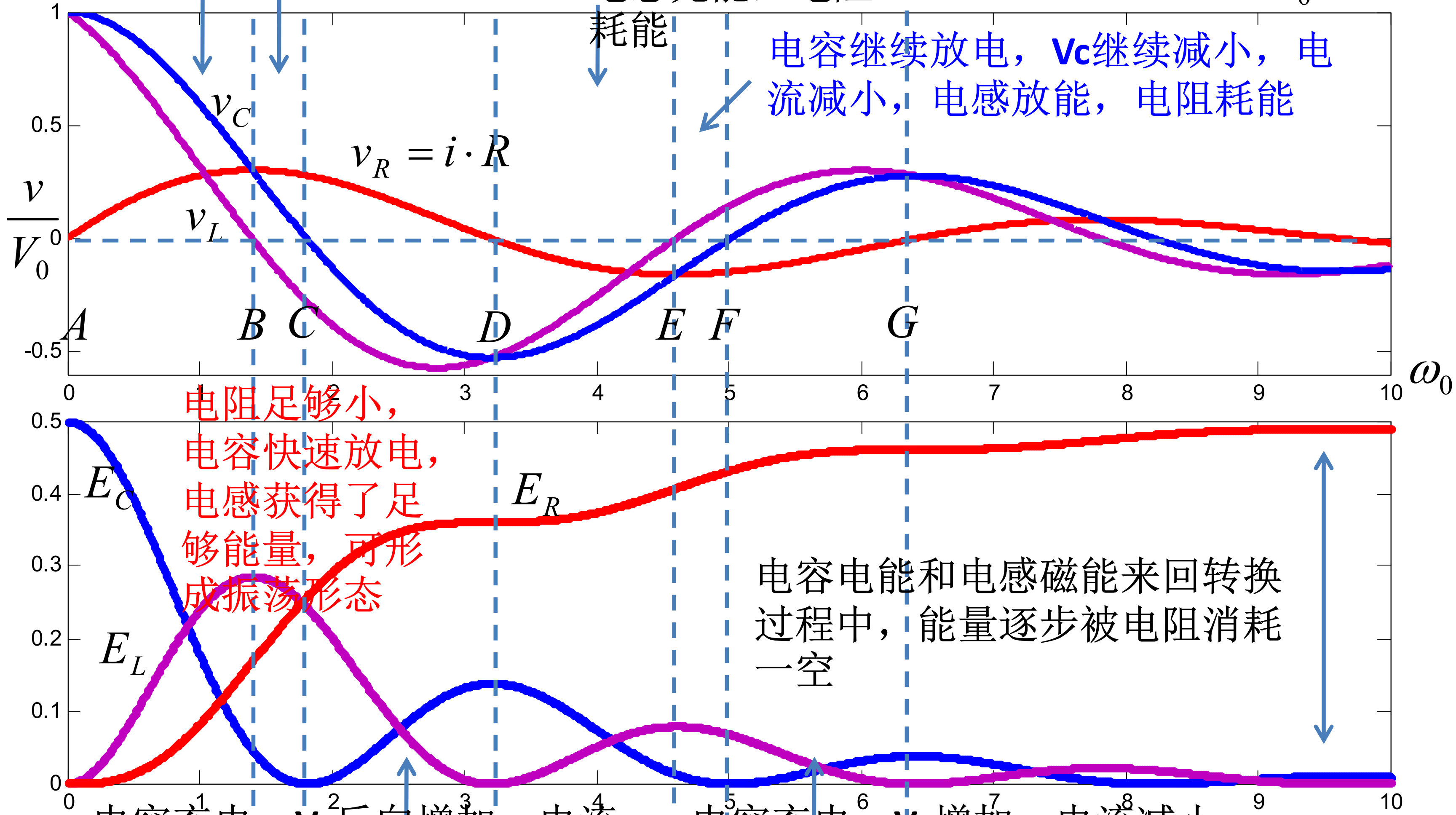
欠阻尼：能量转换关系

电容放电，
Vc减小，
电流增加，
电感充能，
电阻耗能

电容继续放电，
Vc继续减小，
电流减小，电
感放能，电阻
耗能

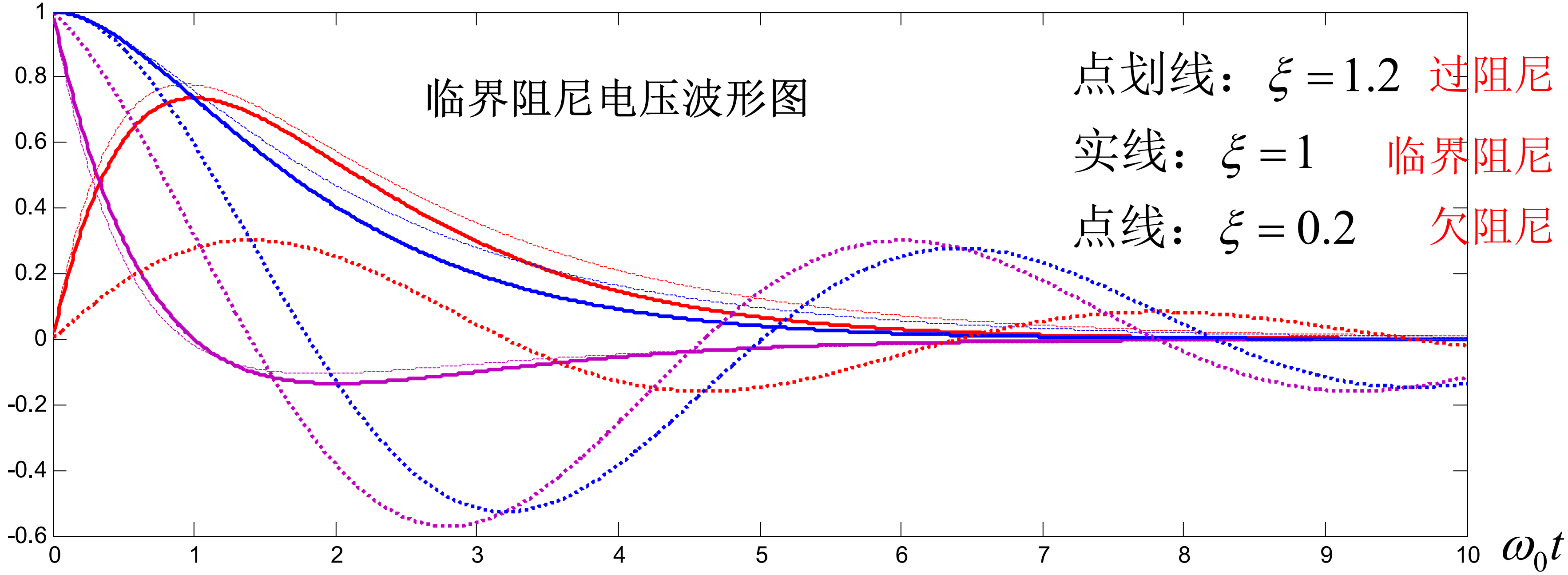
电容放电，Vc减小，
电流反向增加，
电感充能，电阻
耗能

$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = 0.2$$

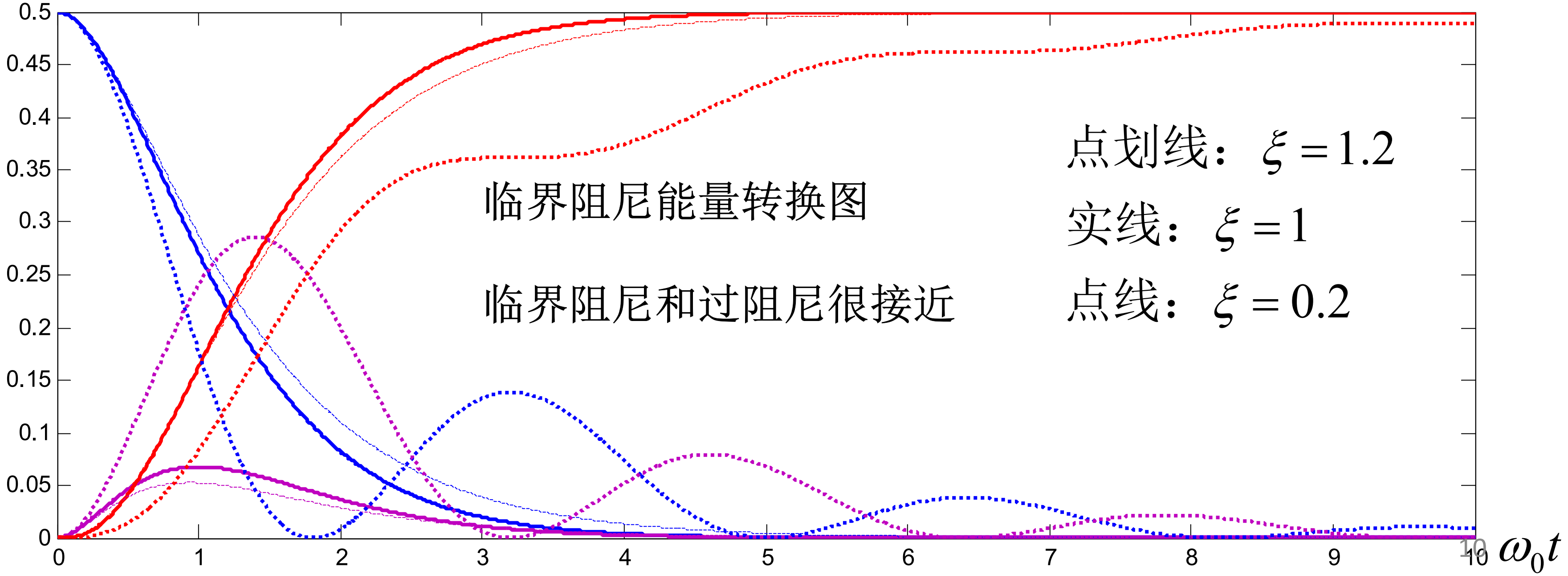


电容充电，Vc反向增加，电流
减小，电感放能，电阻耗能

电容充电，Vc增加，电流减小，
电感放能，电阻耗能



临界阻尼电压波形图
点划线：$\xi = 1.2$ 过阻尼
实线：$\xi = 1$ 临界阻尼
点线：$\xi = 0.2$ 欠阻尼
$\omega_0 t$



临界阻尼能量转换图
临界阻尼和过阻尼很接近
点划线：$\xi = 1.2$
实线：$\xi = 1$
点线：$\xi = 0.2$
$\omega_0 t$

特征根分布

$R>0$ 特征根位于左半平面：系统稳定：耗散系统：冲激响应最终趋于**0**：能量耗尽

$R=0$ 特征根位于虚轴：临界系统：冲激响应为恒值：一阶为常值，二阶为正弦波：能量保持不变

$R<0$ 特征根位于右半平面：系统不稳定：发散系统：冲激响应最终趋于无穷：系统内能量越来越多

假设**LC**不变，只改变**R**的值，则

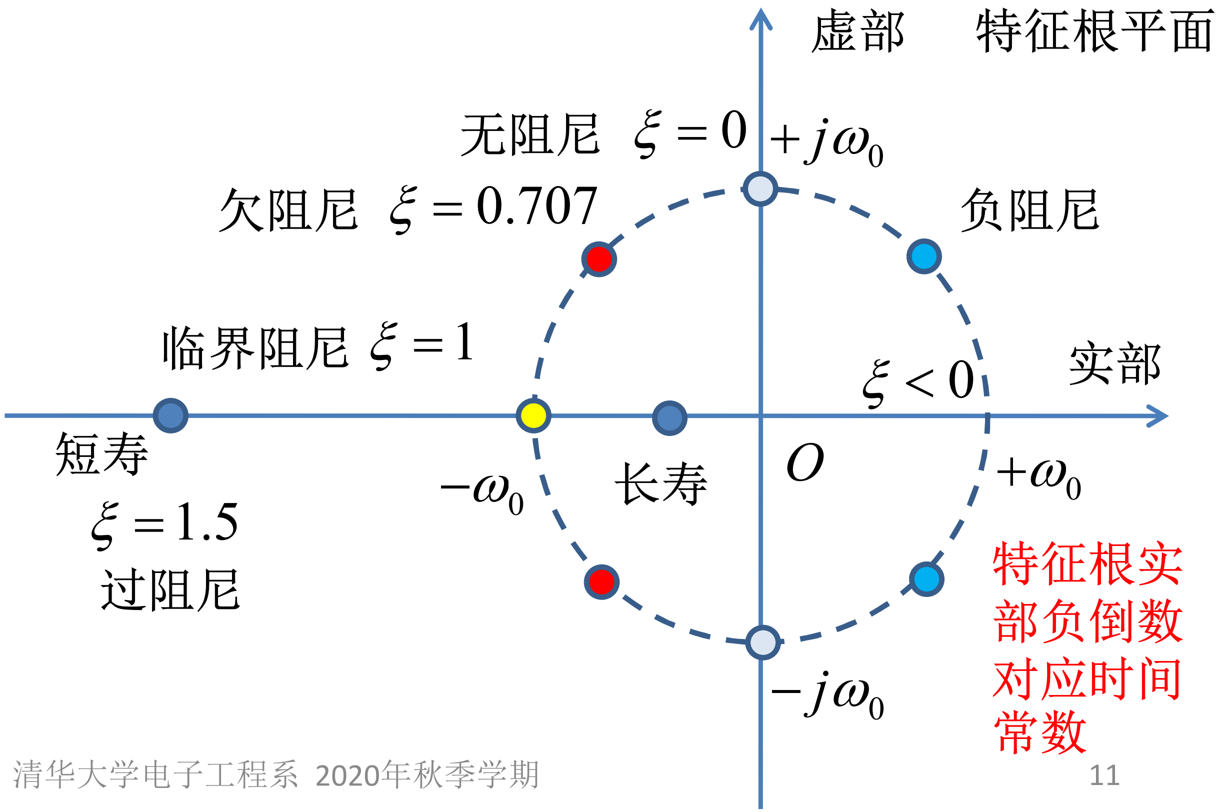
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{不变}$$

$$\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{R}{2Z_0} \qquad \text{改变}$$

$$Q=\frac{1}{2\xi}=\frac{Z_0}{R}$$

$$\lambda_{1,2}=\left(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0$$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\omega_0^2$$



负欠阻尼

$$-1<\xi=\frac{R}{2Z_0}<0$$

$$\lambda_{1,2}=\left(-\xi\pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$$

$$=-\xi\omega_0\pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0=\frac{1}{\tau}\pm j\omega_d$$

$$i(t)=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t$$

$$=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{\frac{t}{\tau}}\sin\omega_d t$$

假设 $\xi=\frac{R}{2Z_0}=-0.1$

$$i(t)=1.005\frac{V_0}{Z_0}e^{0.1\omega_0 t}\sin 0.995\omega_0 t$$

假设存在线性负电阻
RLC串联谐振回路电流则呈现
幅度指数增长规律的正弦振荡

同理，电阻电压、电感电压、电容电压均呈现指数增长规律
这正是正弦波振荡器起振的必要阶段：增幅振荡

负欠阻尼

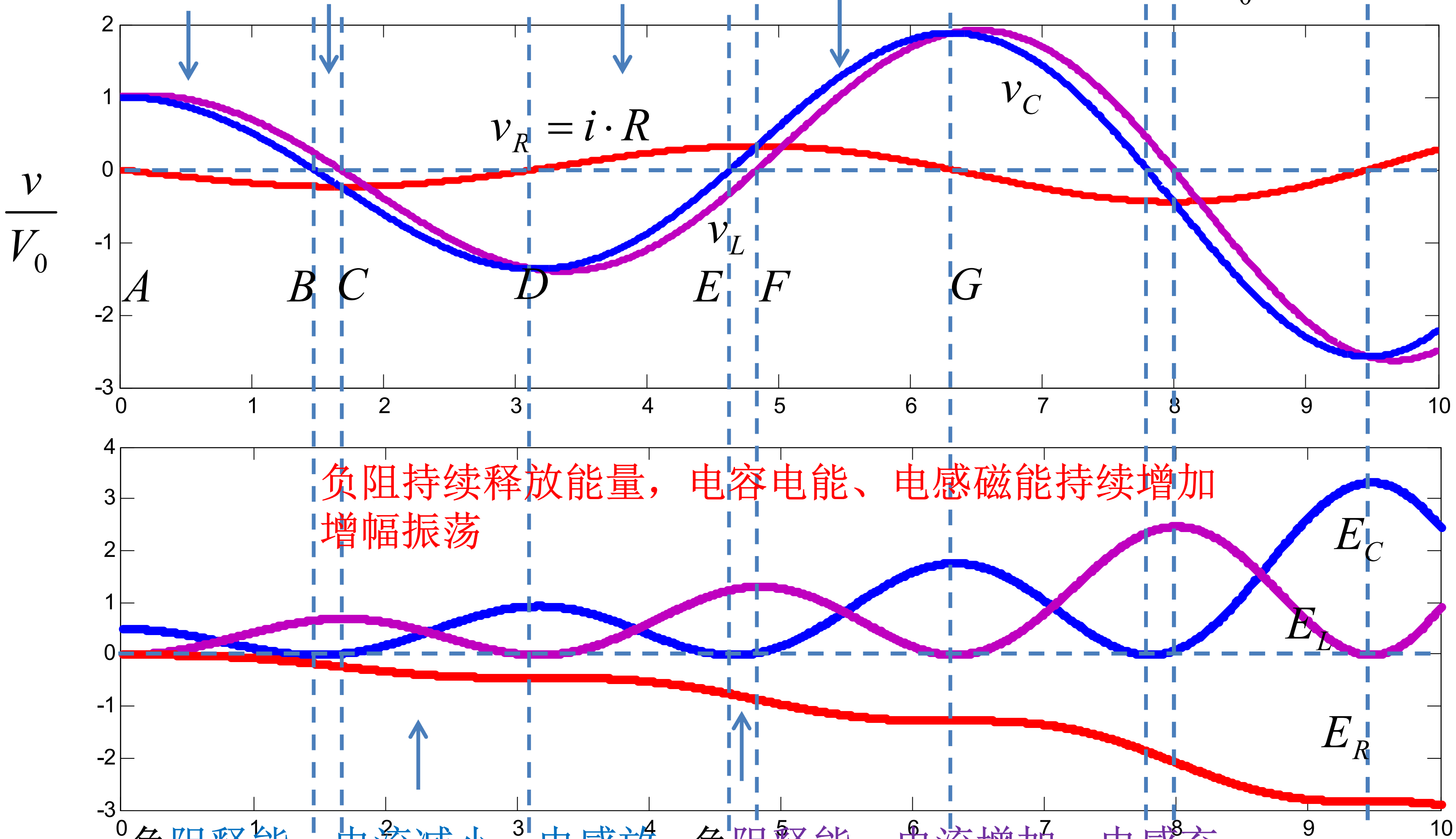
负阻释能，电容放电，Vc减小，电流增加，电感充能

负阻释能，电容充电，Vc反向增加，电流增加，电感充磁

负阻释能，电容放电，Vc降低，电流增加，电感充磁

负阻释能，电流降低，电感放磁，电容充电，Vc增加

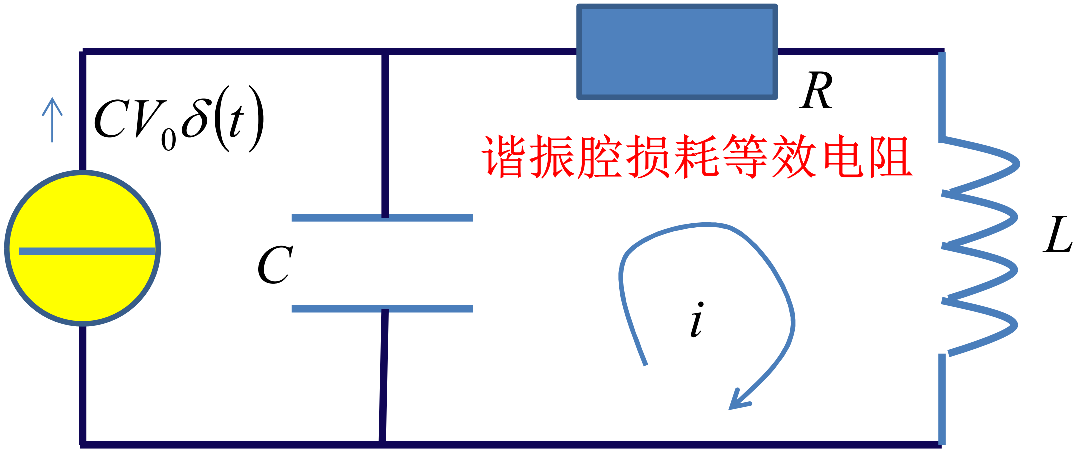
$$\xi = \frac{R}{2Z_0} = -0.1$$



负阻释能，电流减小，电感放磁，电容充电，Vc反向增加，

负阻释能，电流增加，电感充磁，电容充电，Vc增加

二、负阻振荡原理



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\xi = \frac{R}{2Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L$$

零输入自由振荡

$(t \ge 0)$

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{Z_0}\dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 t & \xi>1 \quad \text{过阻尼} \\ \dfrac{V_0}{Z_0}\omega_0 t e^{-\omega_0 t} & \xi=1 \quad \text{临界阻尼} \\ \dfrac{V_0}{Z_0}\dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t & 0<\xi<1 \quad \text{欠阻尼} \\ \dfrac{V_0}{Z_0}\sin\omega_0 t & \xi=0 \quad \text{无阻尼} \end{cases}$$

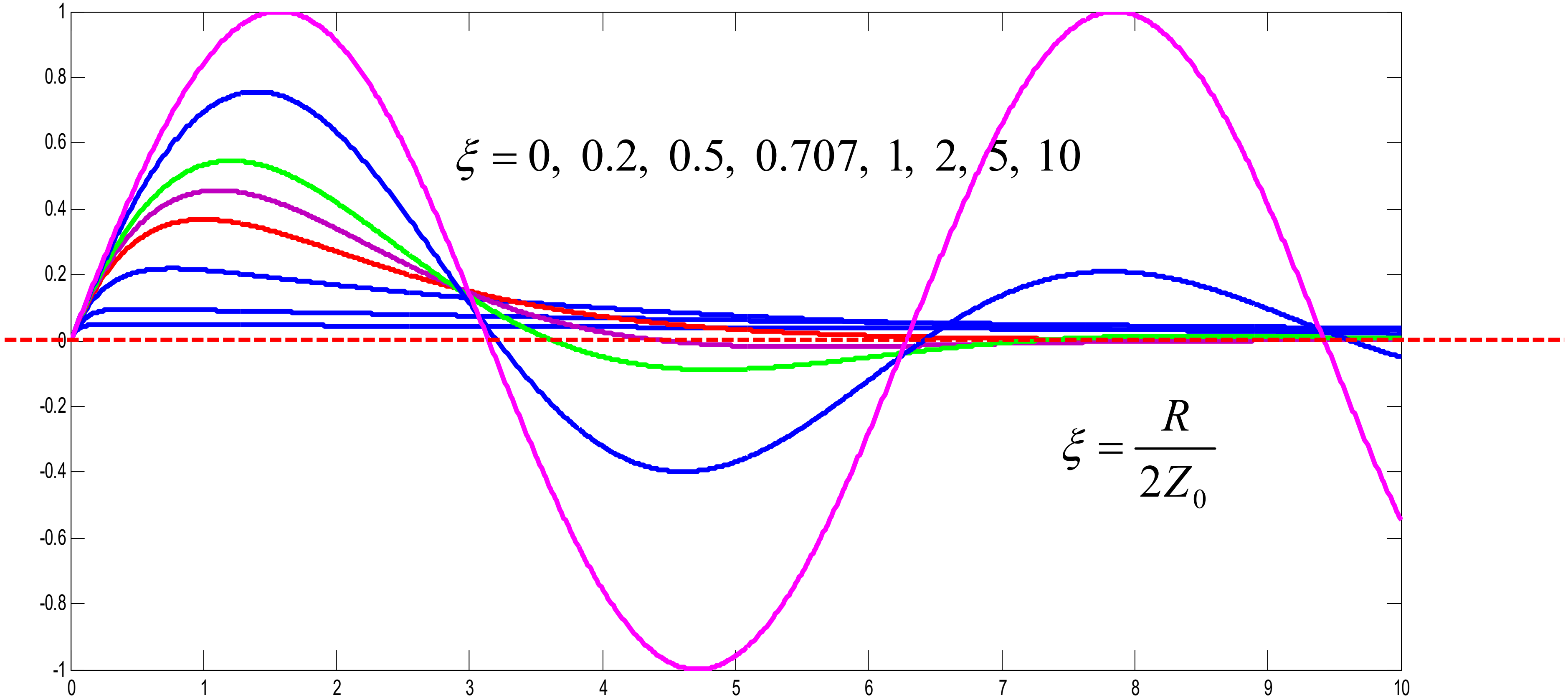
耗散系统

临界系统

RLC自由谐振的回路电流

$$i(t)=\frac{V_0}{Z_0}\sin\omega_0 t$$

串联谐振回路中的电阻为零时，谐振回路无损耗，此时回路电流为正弦波：我们期望获取这个正弦波，怎么办？

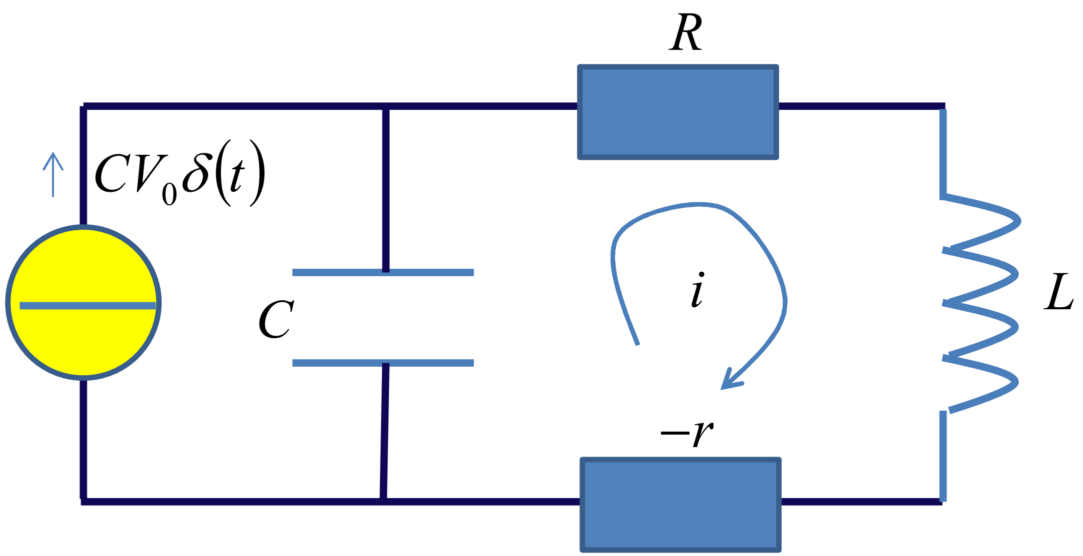


如何获取等幅正弦波？

- 将信号从谐振回路中引出来给负载电阻，就是功率损失，对谐振回路而言，功率损耗等效为正阻，同时谐振腔非理想导致的能量内耗也等效为正阻，因而谐振回路中的正弦波幅度不可避免地会衰减至零（欠阻尼）

- 如何获得稳定的正弦波？
  - 提供负电阻，抵偿等效正电阻
  - 谐振回路消耗多少能量，负阻就提供多少能量，从而确保回路中的正弦波维持不变
    - 如果负阻提供能量大于正阻消耗能量，会出现什么现象？

负阻参与后



$$\xi = \frac{R-r}{2Z_0}$$

如果 $R < r$

则为 $\xi < 0$ 负阻尼

发散系统

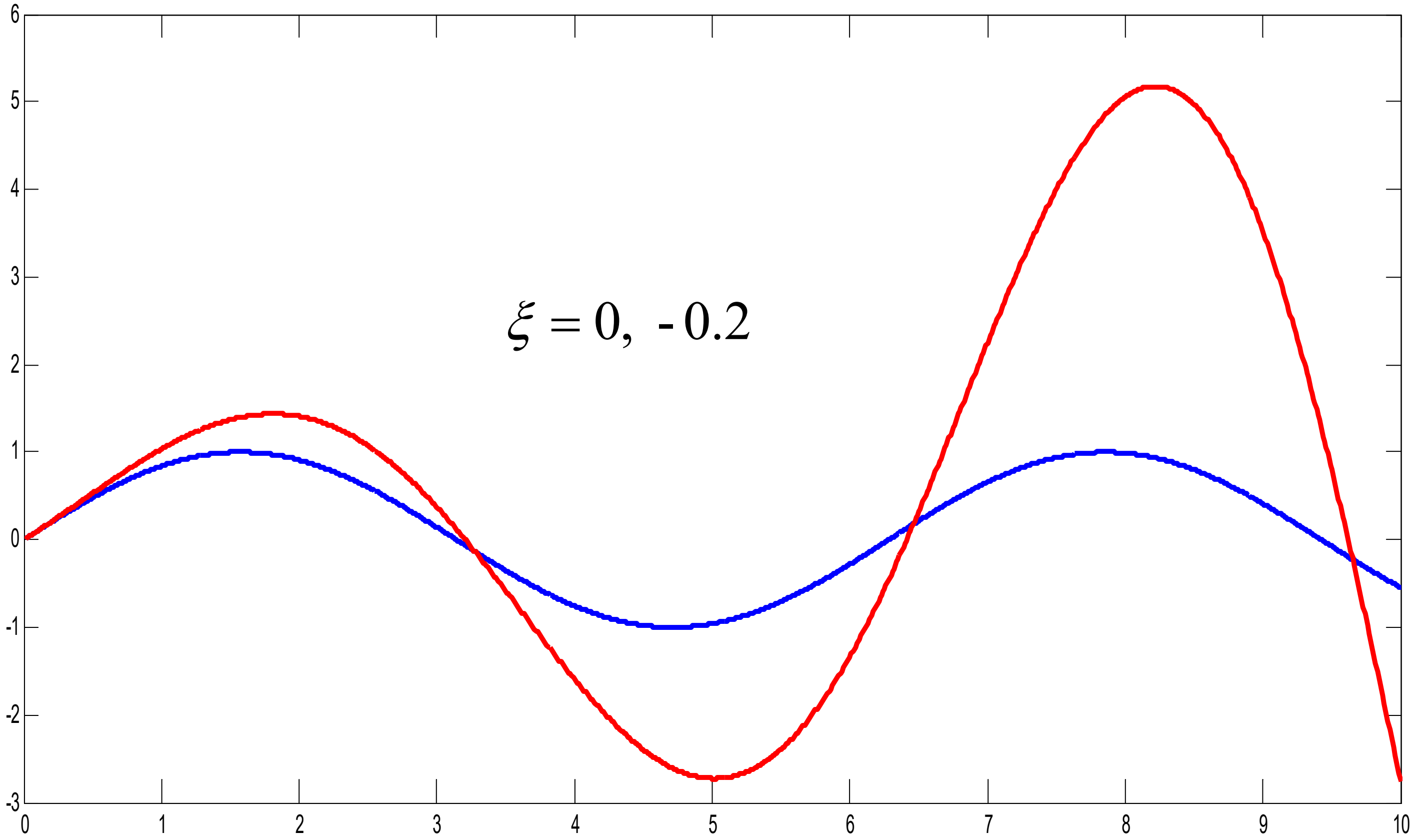
$(t \geq 0)$

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{Z_0}\dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_0 t & \xi < -1 \quad \text{负过阻尼} \\ \dfrac{V_0}{Z_0}\omega_0 t e^{\omega_0 t} & \xi = -1 \\ \dfrac{V_0}{Z_0}\dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t & -1 < \xi < 0 \quad \text{负欠阻尼} \end{cases}$$

指数增长

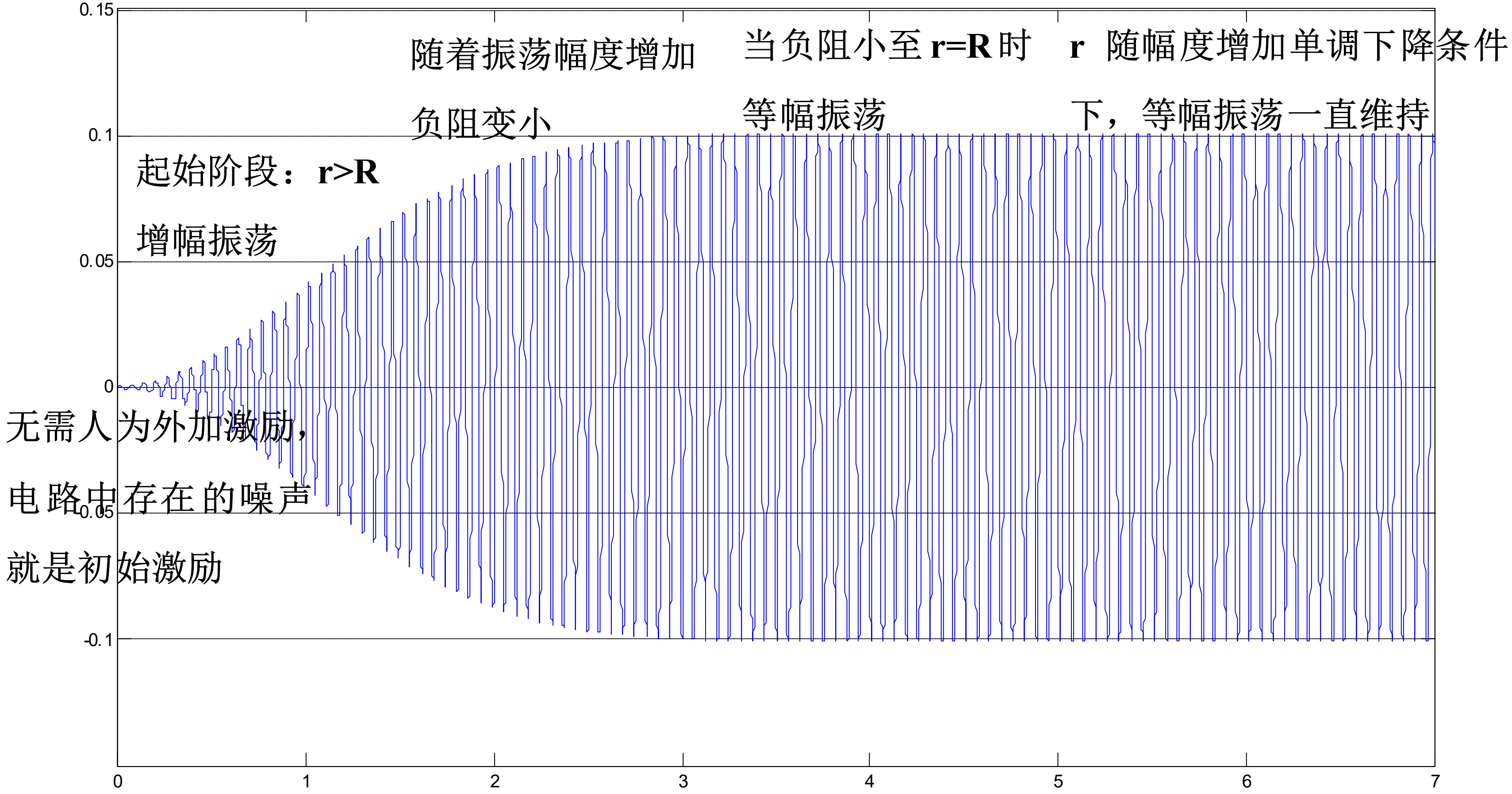
增幅振荡

等幅振荡和增幅振荡



幅度是否会无限增长？不会！随着幅度增加，负阻输出的功率越来越大，实际负阻器件或等效负阻器件将无法承受这种功率输出，其内部负反馈机制（进入正阻区）会导致等效负阻下降，当负阻效应下降到等于正阻后，幅度不再继续增加，负阻器件输出功率不再增加，最终将进入稳幅振荡

正弦振荡波形：从起始到稳定

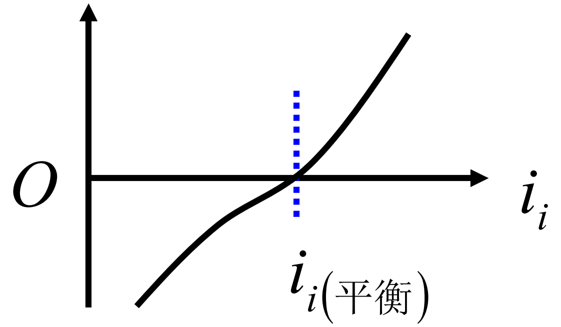


2.1 振荡条件

- **RLC**自由谐振（零输入）存在正阻能量损耗，需要负阻提供能量抵偿正阻消耗能量
  - **RLC**串联谐振回路中添加负阻，抵偿正阻影响，可以形成稳定的正弦波振荡
    - 起振条件：$r_n > R_s$
    - 平衡条件：$r_n = R_s$
    - 稳定条件：r_n随幅度增加单调下降
  - **RLC**并联谐振回路中添加负导，抵偿正导影响，可以形成稳定的正弦波振荡
    - 起振条件：$g_n > G_p$
    - 平衡条件：$g_n = G_p$
    - 稳定条件：g_n随幅度增加单调下降

$-g_n + G_p$

$-r_n + R_s$



幅度条件（实部条件）

并联谐振

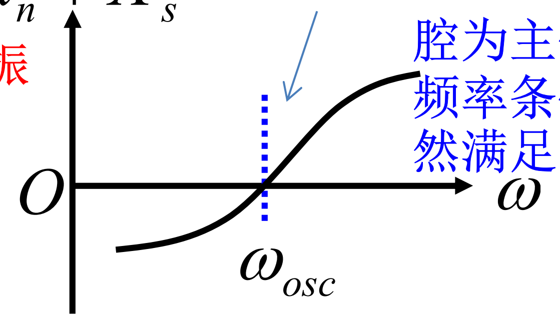
$b_n + B_p$

$x_n + X_s$

串联谐振

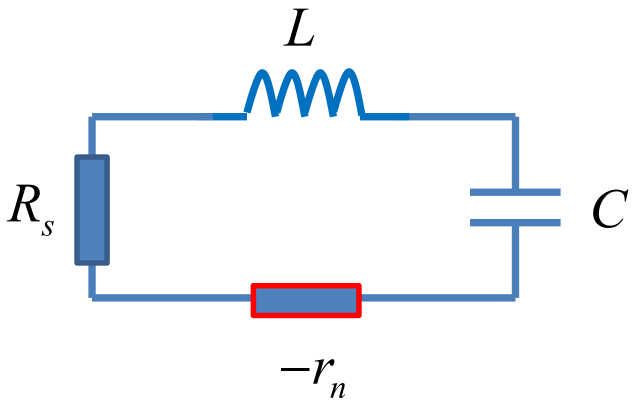
谐振频点

负阻振荡原理以**LC**谐振腔为主体，频率条件自然满足

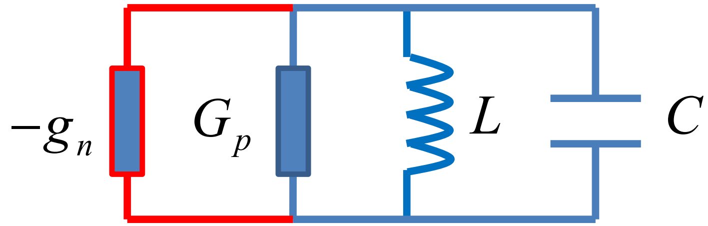


频率条件（虚部条件）

起振条件



$r_n > R_s$



$g_n > G_p$

损耗：
谐振腔损耗
负载损耗
辐射损耗
器件损耗
…
能量损失

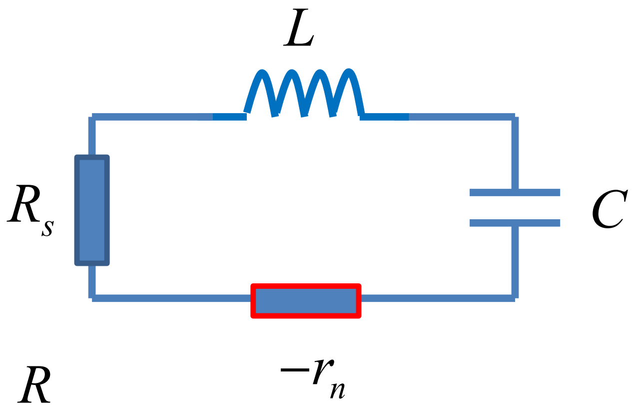
R_S：振荡电路中各种能量损耗折合的等效串联电阻
$-r_n$：有源器件等效负阻

只有负阻提供的能量高于电路内部损耗，才能自激振荡

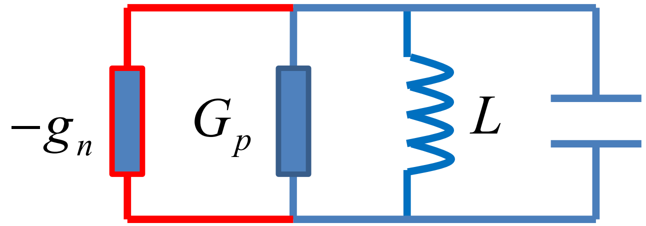
G_p：振荡电路中各种能量损耗折合的等效并联电阻
$-g_n$：有源器件等效负导

只有负导提供的能量高于电路内部损耗，才能自激振荡

平衡条件



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



$$\xi = \frac{R}{2Z_0}$$

$$r_n = R_s$$

正弦振荡的平衡条件

$$g_n = G_p$$

$$\xi = \frac{G}{2Y_0}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\xi\omega_0 t} \frac{\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xrightarrow{\xi=0} \frac{V_0}{Z_0}\sin\omega_0 t$$

$$v(t) = \frac{I_0}{Y_0} e^{-\xi\omega_0 t} \frac{\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xrightarrow{\xi=0} \frac{I_0}{Y_0}\sin\omega_0 t$$

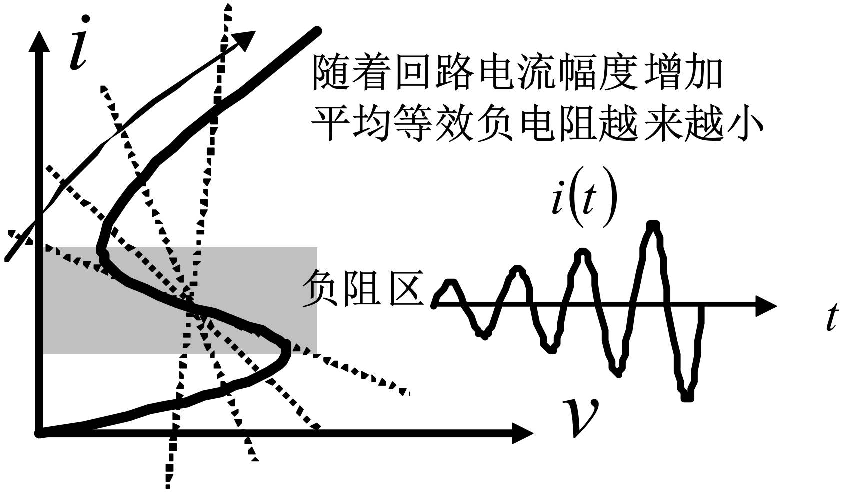
V_0是电容初始电压

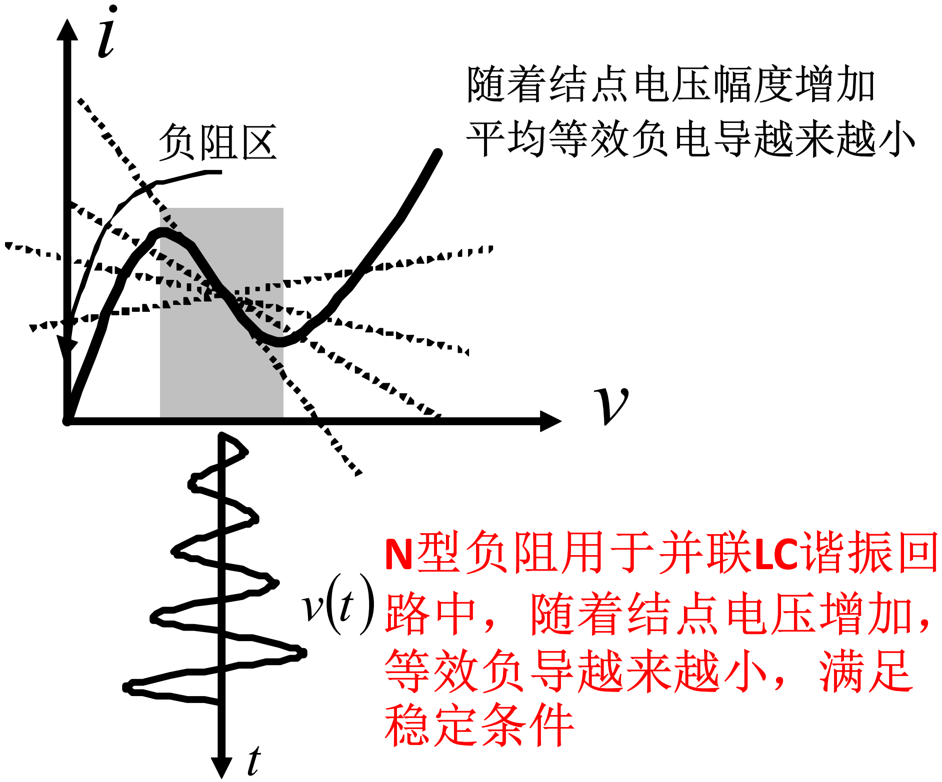
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

I_0是电感初始电流

稳定条件：偏置在负阻区

串联谐振S型负阻，并联谐振N型负阻





S型负阻用于串联LC谐振回路中，随着回路电流增加，等效负阻越来越小，满足稳定条件

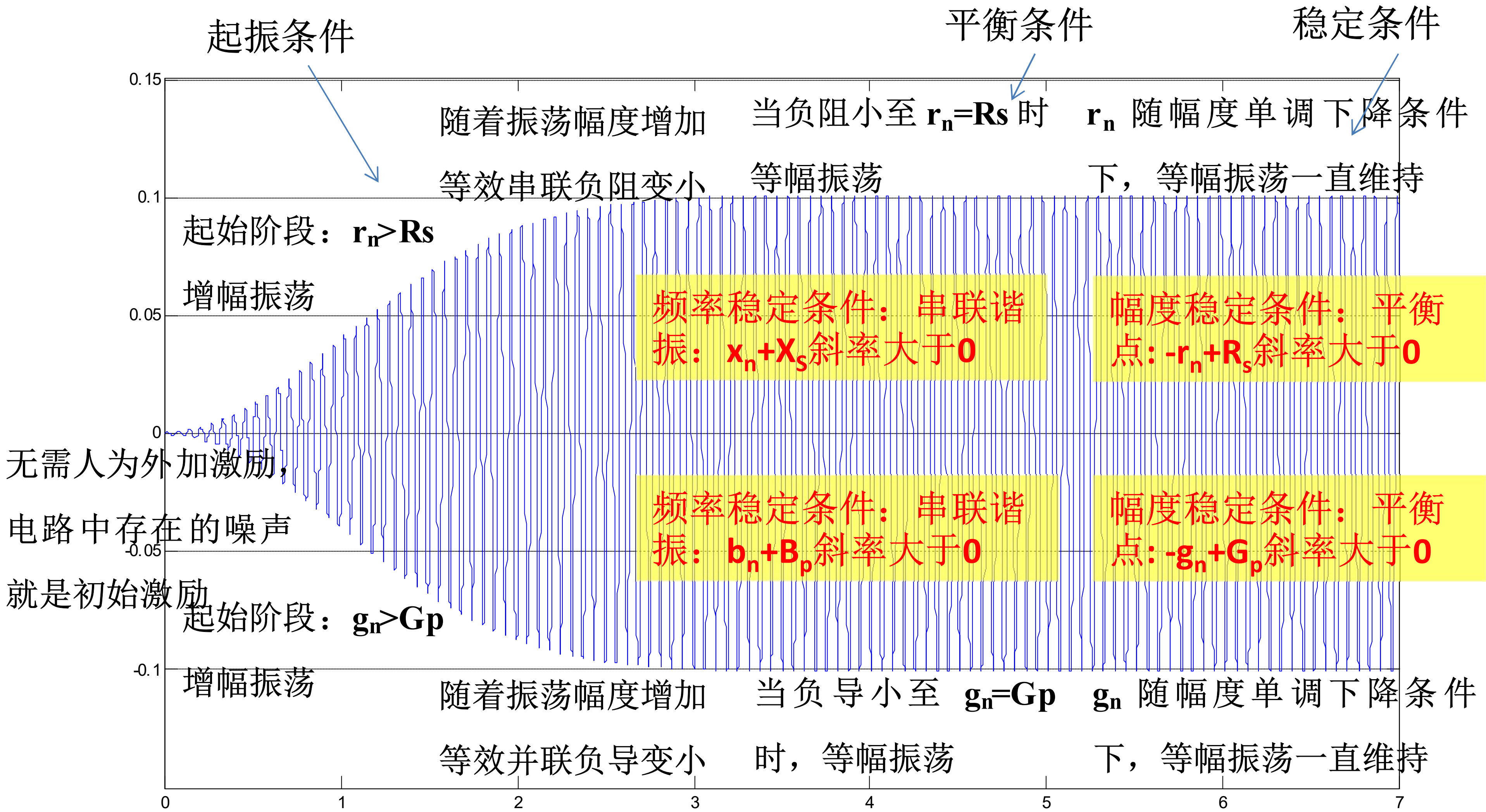
N型负阻用于并联LC谐振回路中，随着结点电压增加，等效负导越来越小，满足稳定条件

RLC串联谐振用S型负阻形成正弦振荡

RLC并联谐振用N型负阻形成正弦振荡

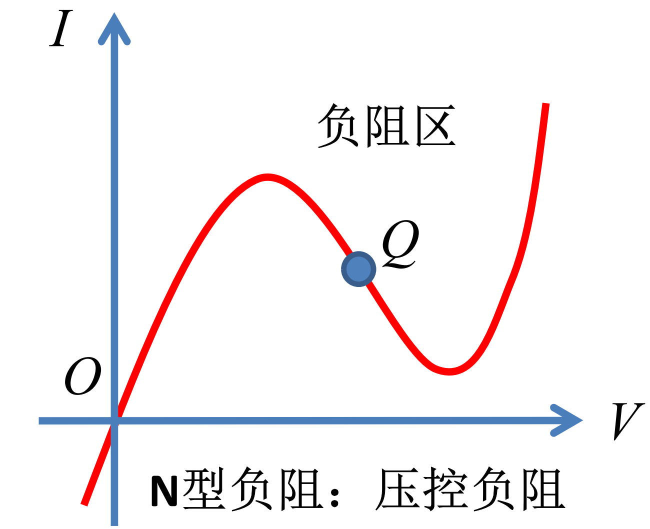
思考：S型负阻并入并联谐振回路，N型负阻串入串联谐振回路，会有什么结果？

正弦振荡波形：从起始到稳定



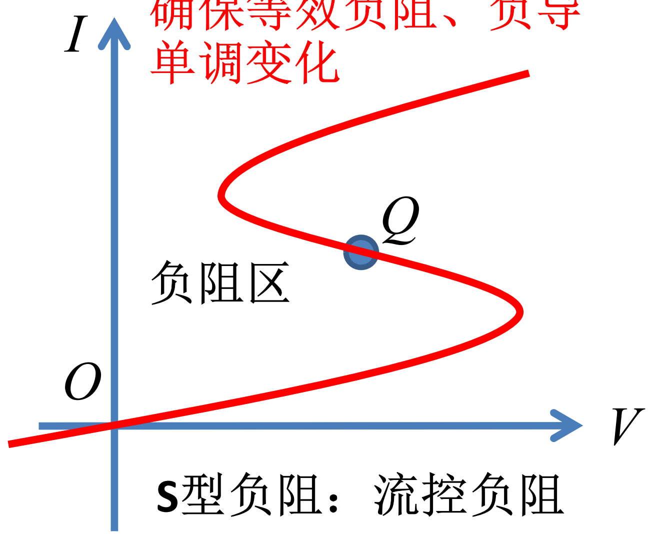
2.2 负阻实现（1）
负阻器件

- 负阻可以用负阻元件实现
  - N型负阻器件实现-g_n
    - 压控负阻用于LC并联谐振振荡：并联结点电压控制负导大小，振荡电压越大，负导越小，振荡幅度不再继续增加
  - S型负阻器件实现-r_n
    - 流控负阻用于LC串联谐振振荡：串联回路电流控制负阻大小，振荡电流越大，负阻越小，振荡幅度不再继续增加



N型负阻：压控负阻

直流工作点尽可能偏置在负阻区中间位置：确保等效负阻、负导单调变化

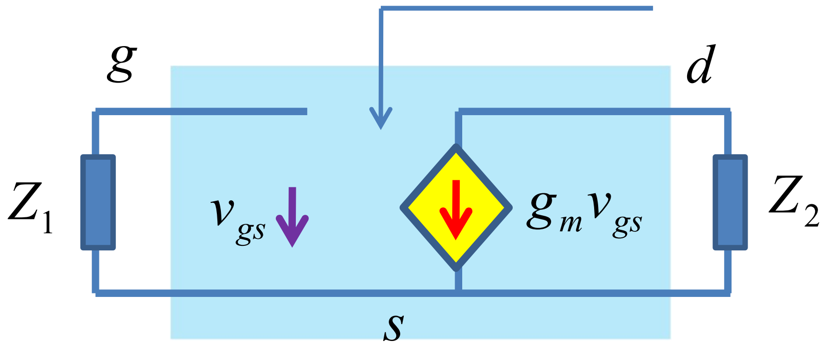


S型负阻：流控负阻

负阻实现（2）：受控源等效

- 负阻向外提供能量，是有源的
  - 受控源是有源的，可通过正反馈形成等效负阻
    - 晶体管跨导器正反馈形成负阻例

$$Z_{in}=Z_1\langle g_m\rangle Z_2=Z_1+Z_2+g_mZ_1Z_2$$



晶体管核心模型：跨导器

$$Z_1=\frac{1}{j\omega C_1}$$

$$Z_2=\frac{1}{j\omega C_2}$$

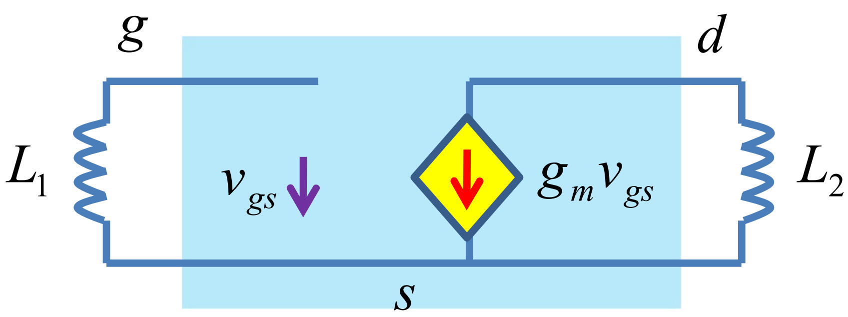
$$g_mZ_1Z_2=-\frac{g_m}{\omega^2C_1C_2}$$

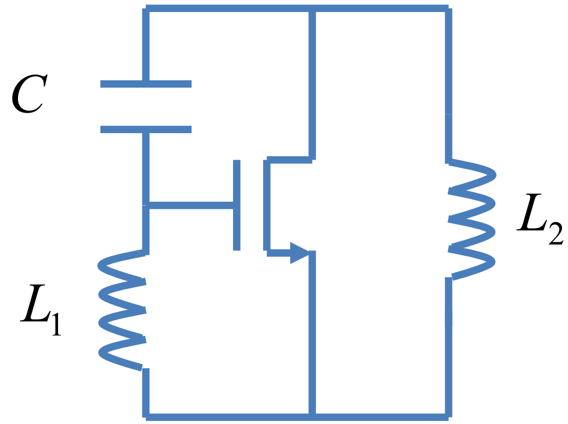
$$Z_1=j\omega L_1$$

$$Z_2=j\omega L_2$$

$$g_mZ_1Z_2=-g_m\omega^2L_1L_2$$

等效负阻





$$Z_{in} = Z_1\langle g_m \rangle Z_2 = Z_1 + Z_2 + g_m Z_1 Z_2$$

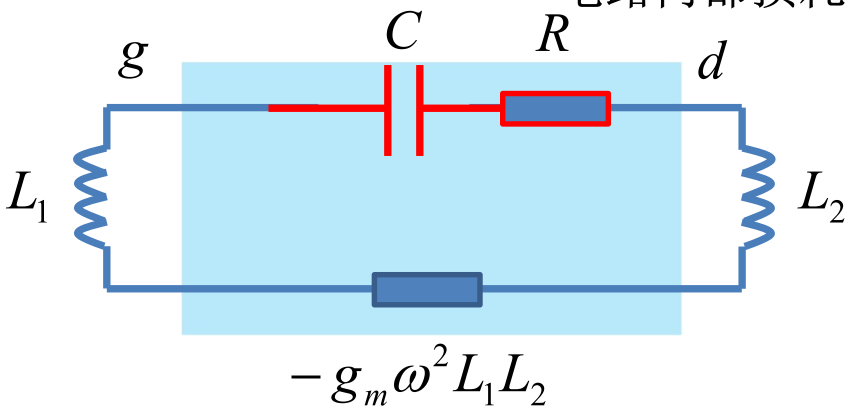
$$= j\omega L_1 + j\omega L_2 - g_m \omega^2 L_1 L_2$$

随着幅度增加
跨导变小，负阻变小
满足稳定条件

哈特莱振荡器
Hartley Oscillator

在栅漏之间接电容，即可构成谐振回路

电路内部损耗折合等效电阻



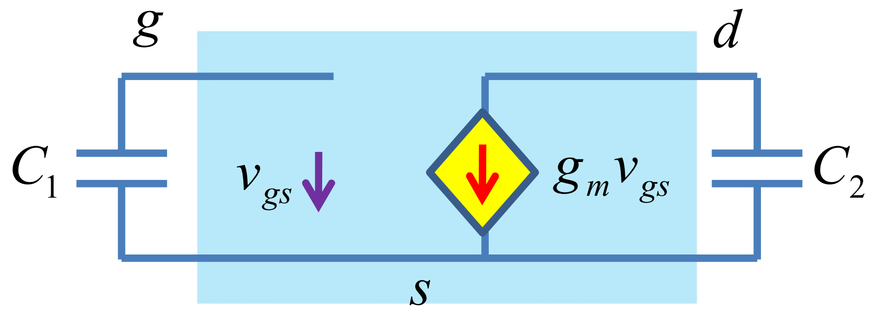
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

振荡频率

起振条件

$$g_m \omega_0^2 L_1 L_2 > R$$

晶体管有足够跨导增益
提供能量大于损耗能量



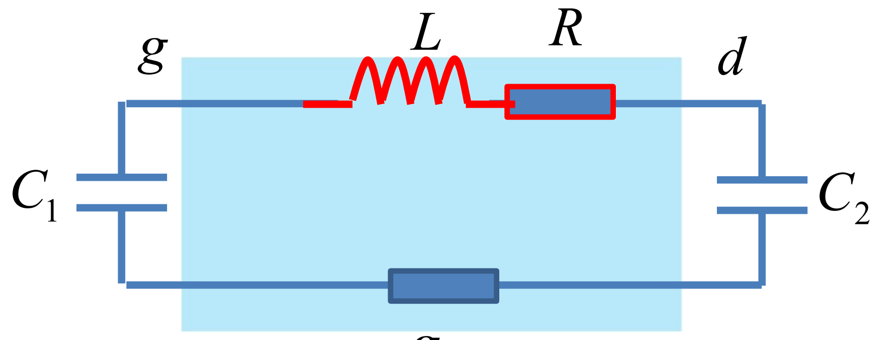
$$Z_{in} = Z_1 \langle g_m \rangle Z_2 = Z_1 + Z_2 + g_m Z_1 Z_2$$

$$= \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} - \frac{g_m}{\omega^2 C_1 C_2}$$

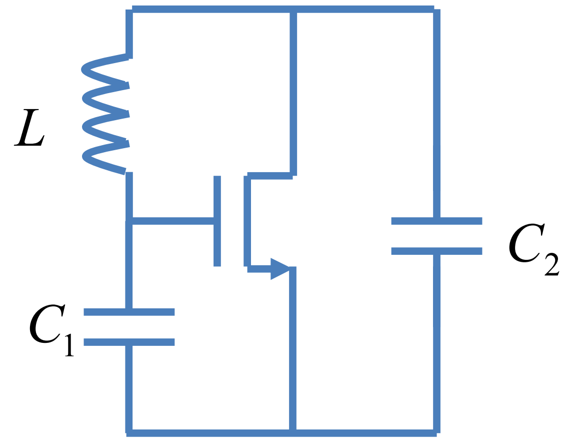
随着幅度增加
跨导变小，负阻变小
满足稳定条件

在栅漏之间接电感，即可构成谐振回路

电路内部损耗折合等效电阻



$$-\frac{g_m}{\omega^2 C_1 C_2}$$



考毕兹振荡器
Colpitts Oscillator

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

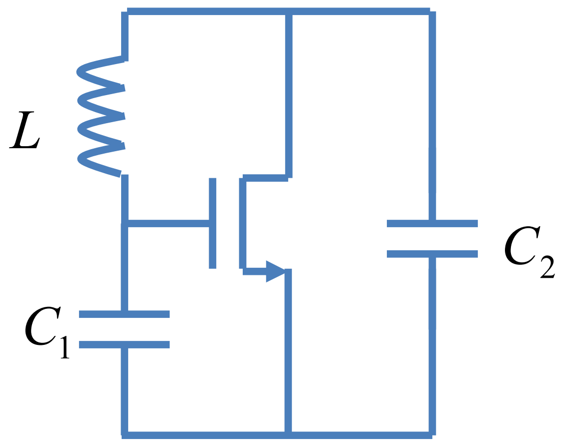
振荡频率

起振条件

$$\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2} > R$$

晶体管有足够跨导增益
提供能量大于损耗能量

三点式振荡器



电容三点式
考毕兹振荡器
Colpitts Oscillator

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

振荡频率

起振条件

$$\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2} > R$$

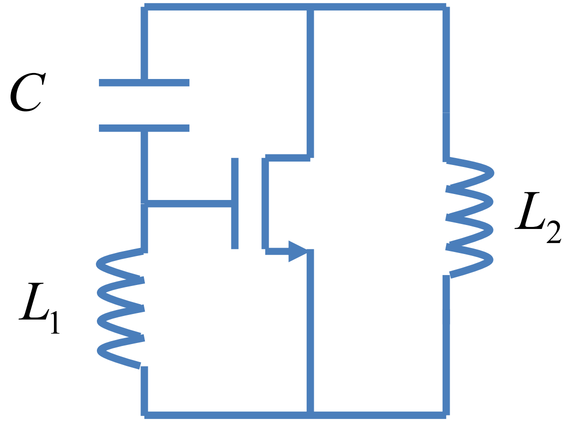
考毕兹振荡器和哈特莱振荡器统称为三点式振荡器：所谓三点式，就是三个电抗元件分别接在晶体管的三个极间

三点式振荡器的最大特征是：和源极（发射极）相连的两个电抗元件是同属性的，同为容性或同为感性，第三个电抗元件反属性：振荡和参考地无关，只和结构有关

三点式振荡器的起振条件是要有足够大的跨导增益，用以补偿电路中的电阻损耗，这是容易理解的

所谓起振条件，就是振荡器无需外加激励自己就能自激振荡的条件

随着幅度增加，跨导变小，负阻变小，自动满足稳定条件



电感三点式
哈特莱振荡器
Hartley Oscillator

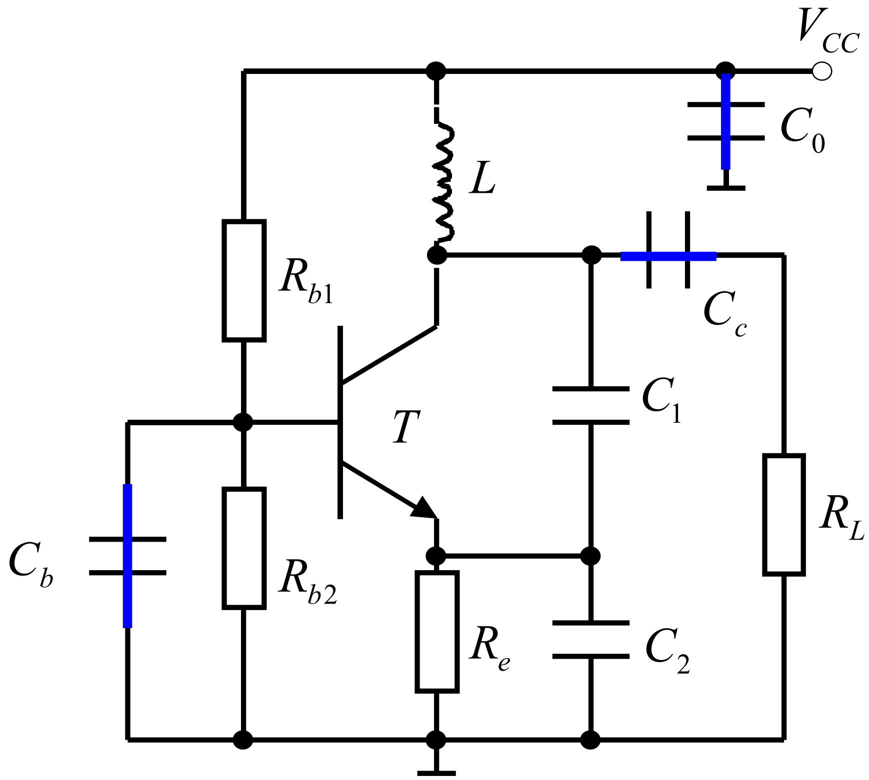
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C}}$$

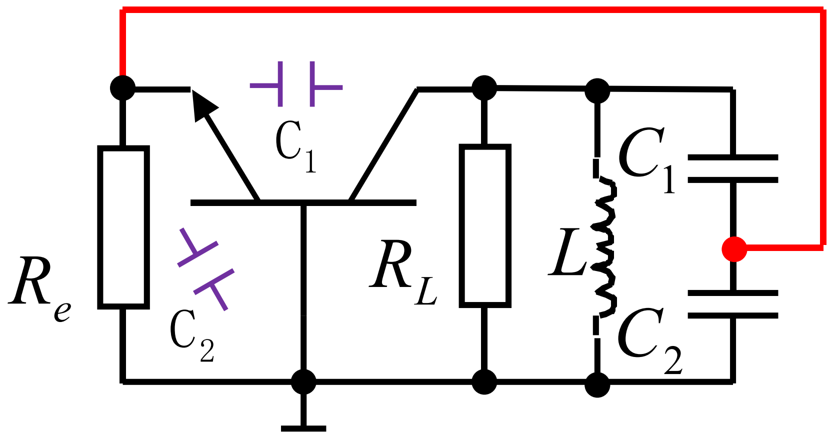
振荡频率

起振条件

$$g_m \omega_0^2 L_1 L_2 > R$$

考毕兹振荡器分析例



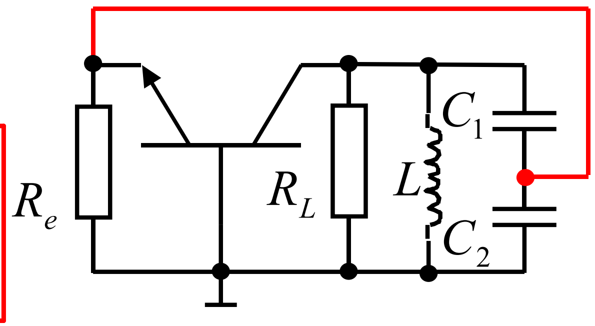


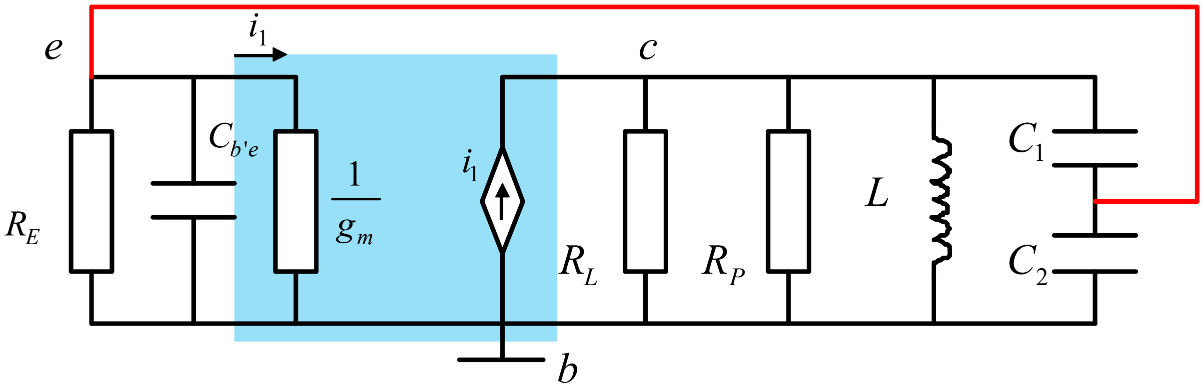
- 这是一个共基组态的考毕兹振荡器
  - 正反馈理解

晶体管必须偏置在有源区：才能等效为跨导器，正反馈才能形成等效负阻/负导

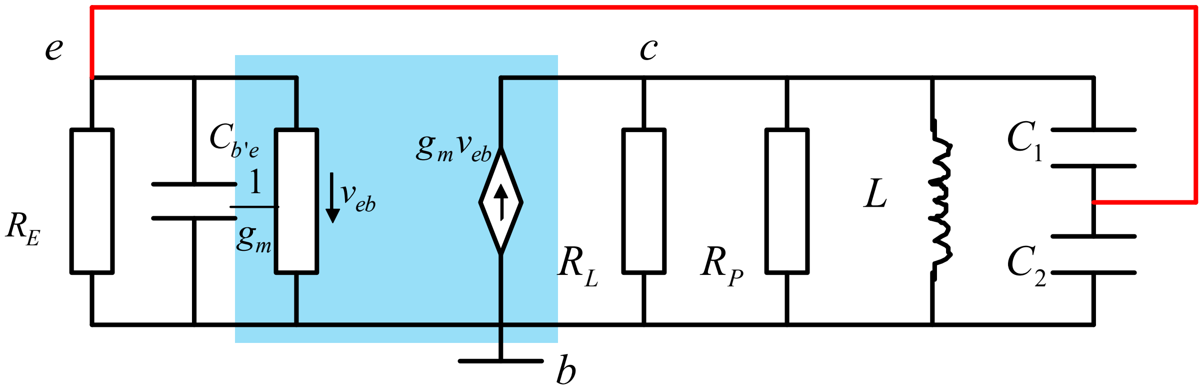
有源区工作晶体管正反馈连接后相当于负阻器件的负阻区，晶体管的欧姆区和截止区则对应负阻器件的正阻区

交流小信号等效电路

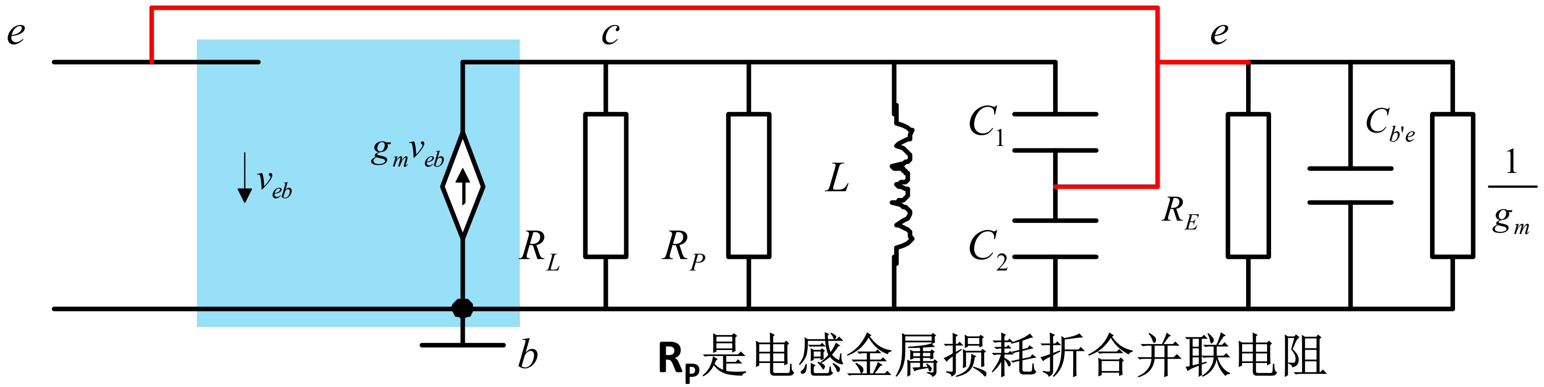




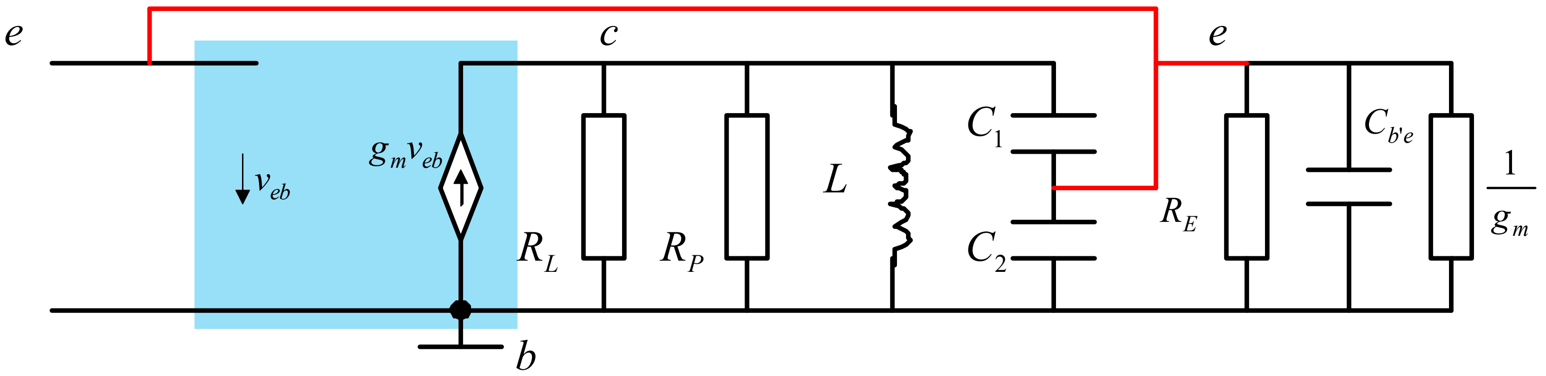
正反馈理解：放大器将信号越放越大：下节讨论

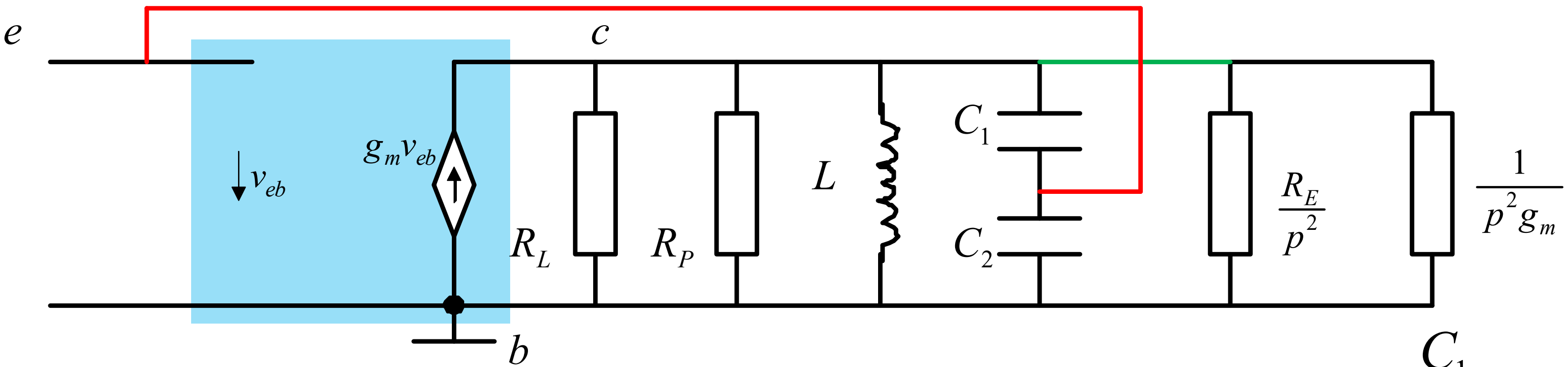


负阻理解：负阻提供能量，谐振腔内能量越聚越多

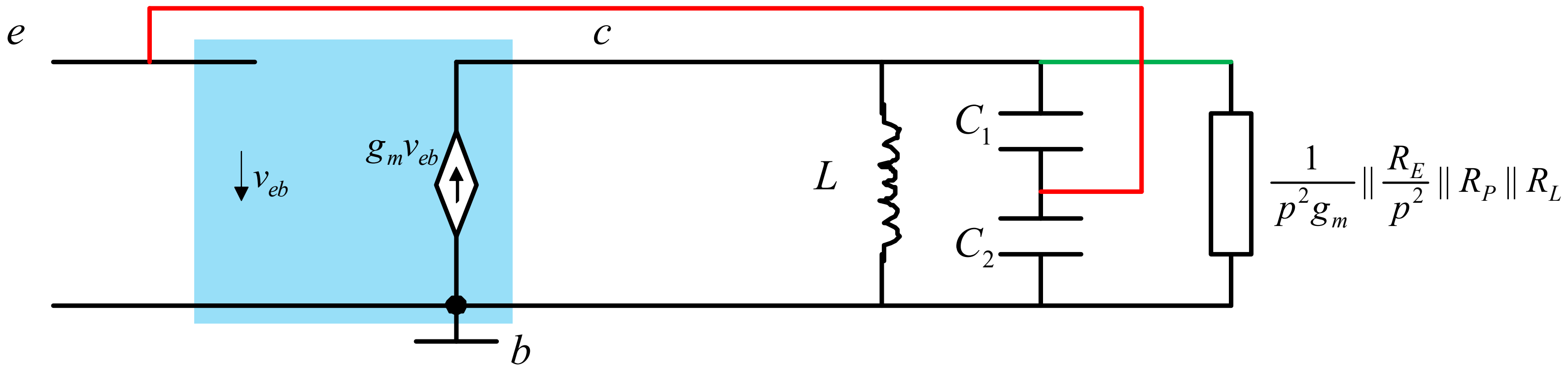


R_P是电感金属损耗折合并联电阻

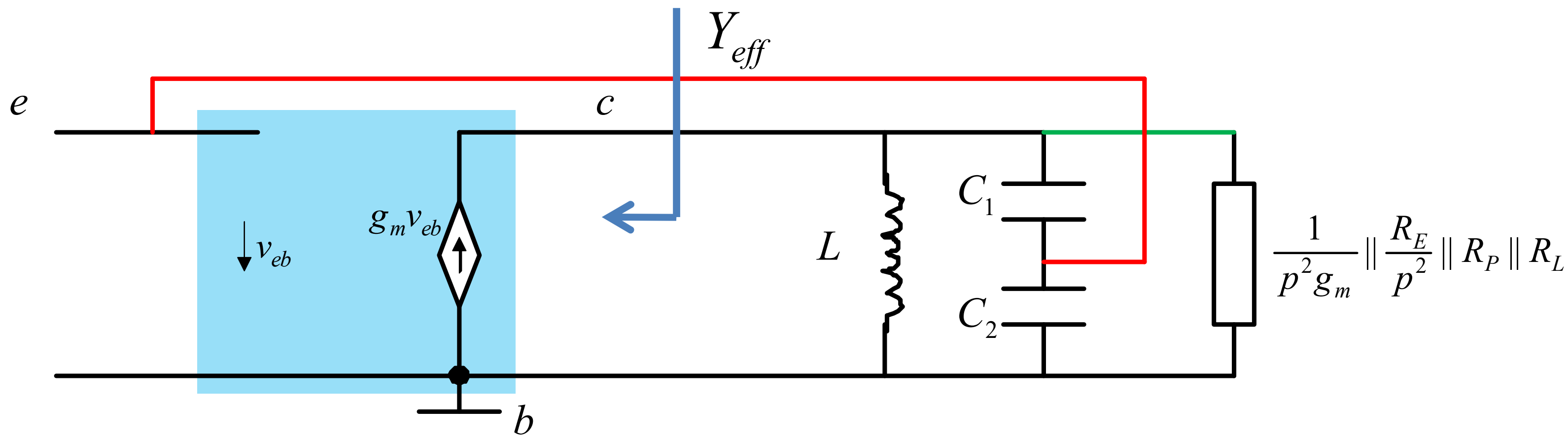




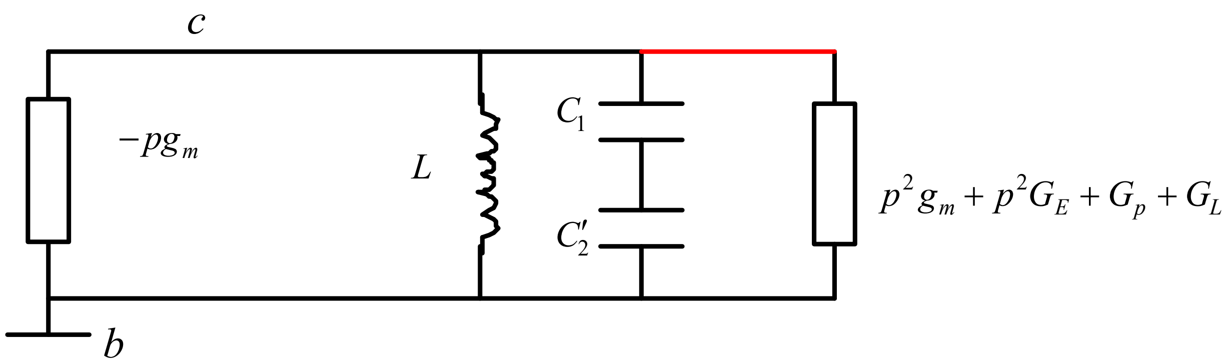
$$C_2' = C_2 + C_{be} \qquad p = \frac{C_1}{C_1 + C_2'}$$



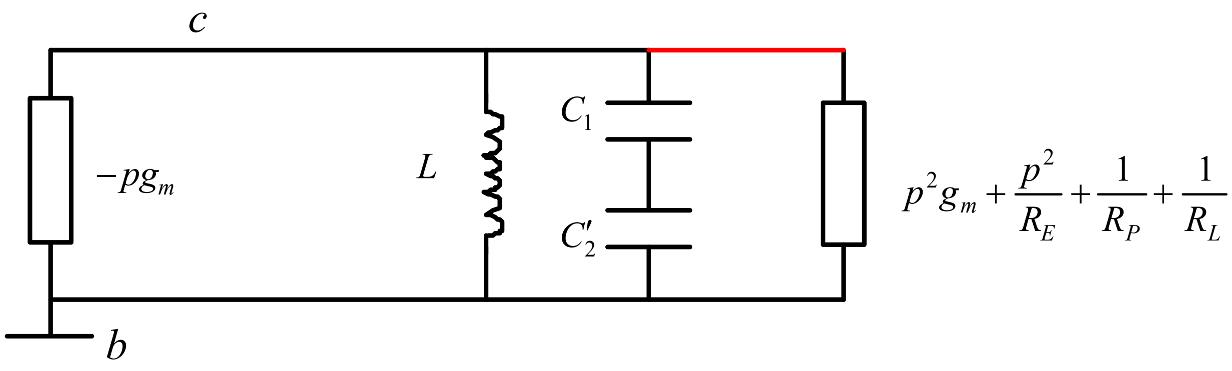
等效负导



$$Y_{eff} = \frac{i_{test}}{v_{test}} = \frac{-i_1}{v_{cb}} = \frac{-g_m v_{eb}}{v_{cb}} = -g_m \frac{v_{eb}}{v_{cb}} = -pg_m$$



起振条件

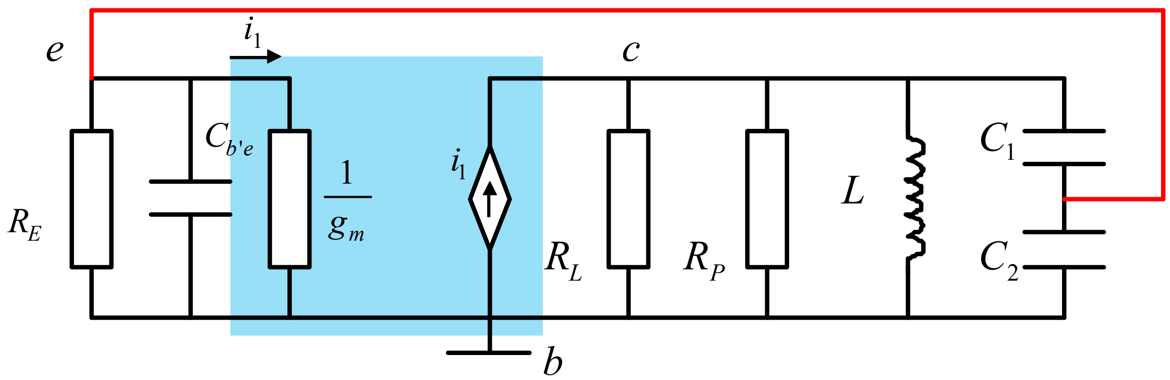


$$pg_m > p^2g_m + \frac{p^2}{R_E} + \frac{1}{R_P} + \frac{1}{R_L} = p^2g_m + G_p$$

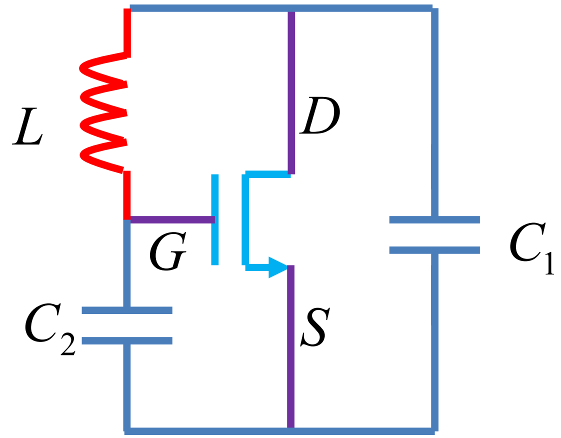
$$g_m > \frac{G_p}{p(1-p)}$$

电路中的损耗折合的等效电导

物理意义明确：跨导必须足够大，足以抵偿电路损耗等效电导



考毕兹振荡器：两种负阻等效



电路中的损耗：

1、电感导线非理想金属损耗；

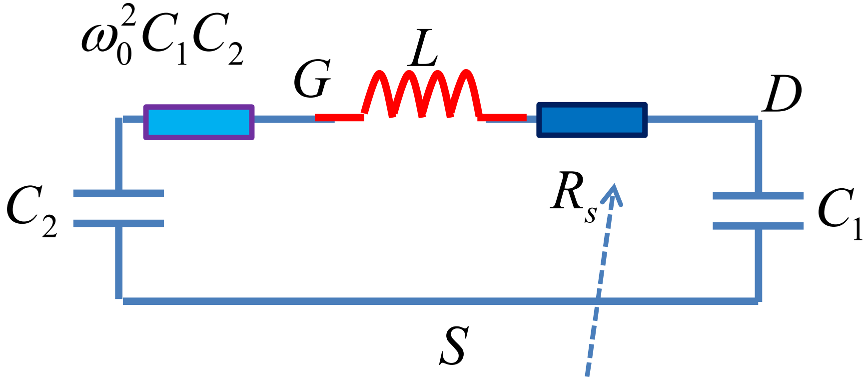
2、直流偏置电阻损耗；

3、负载吸收消耗；

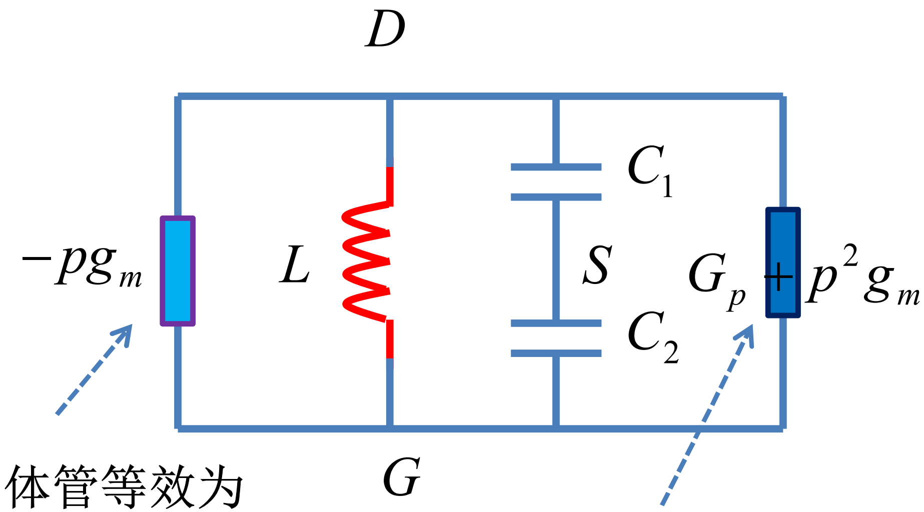
4、晶体管自身损耗：r_{ds}，…

晶体管等效为
串联负阻

$$-\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2}$$

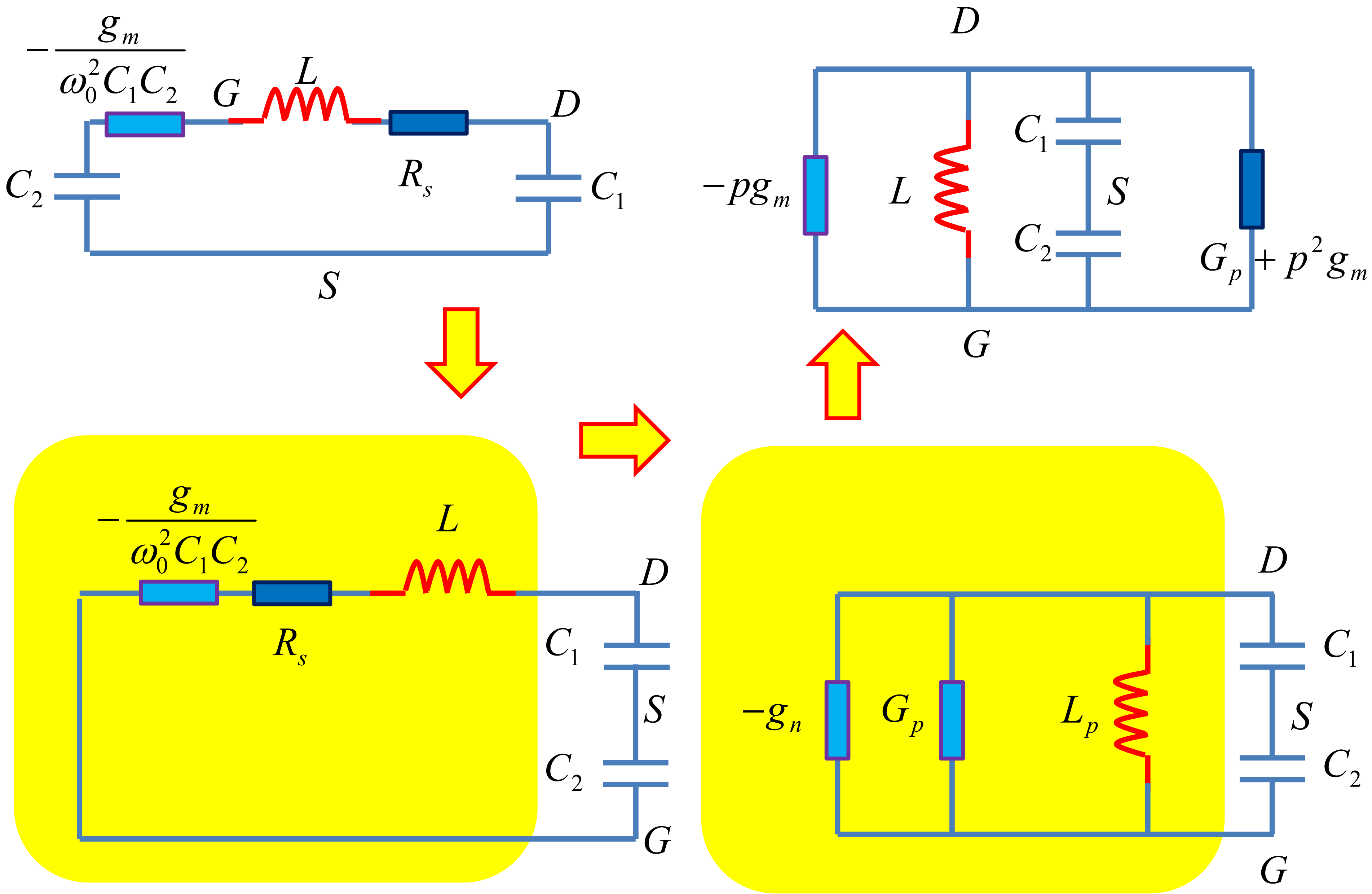


电路中的损耗折合
为等效串联电阻R_S



晶体管等效为
并联负导

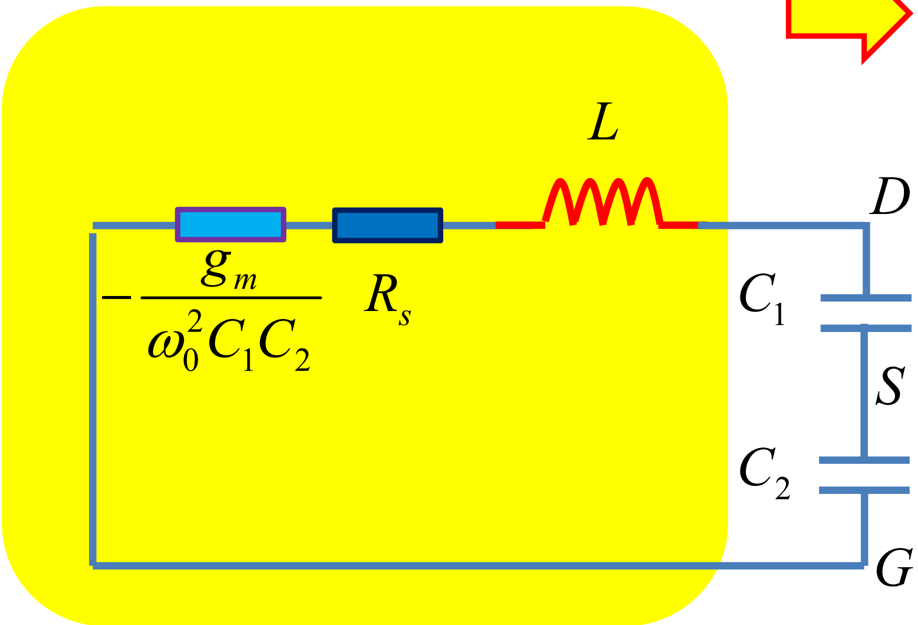
电路中的损耗折合
为等效并联电导G_P

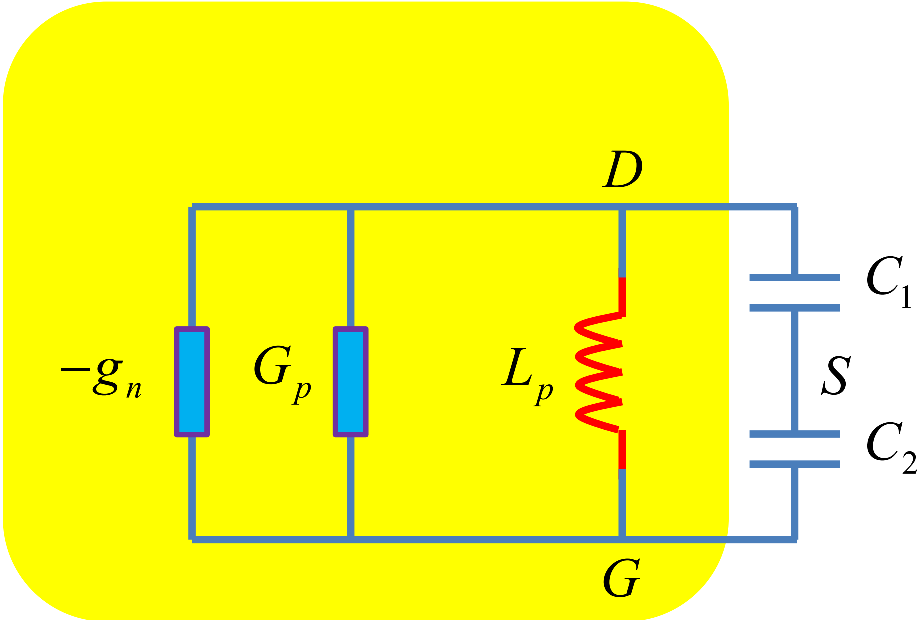

$-\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2}$
G
L
D
C_2
R_s
C_1
S
D
$-pg_m$
L
C_1
S
C_2
$G_p + p^2 g_m$
G
$-\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2}$
L
D
R_s
C_1
S
C_2
G
D
$-g_n$
G_p
L_p
C_1
S
C_2
G

串转并

$$Q=\left|\frac{\omega_0 L}{r}\right|=\left|\frac{Z_0}{r}\right|=\left|\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\right|>>1 \qquad r=R_s-r_n$$

$$L_p=L\left(1+Q^{-2}\right)\approx L$$





$$g_p=\frac{1}{r}\frac{1}{1+Q^2}\approx\frac{1}{Q^2 r}=\frac{r}{Z_0^2}=\frac{R_s}{Z_0^2}-\frac{r_n}{Z_0^2}=G_p-\frac{g_m}{\omega_0^2 C_1 C_2 Z_0^2}=G_p-\frac{C^2 g_m}{C_1 C_2}$$

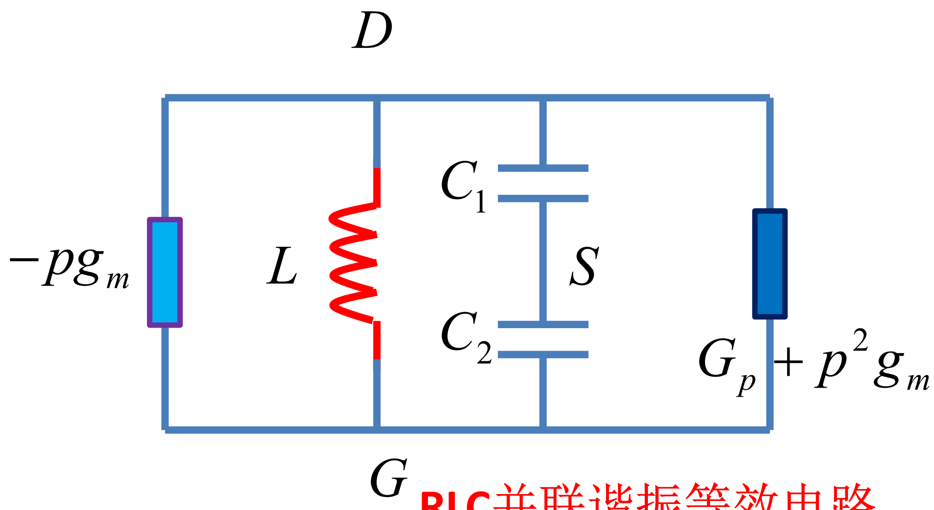
$$=G_p-\frac{\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)^2 g_m}{C_1C_2}=G_p-\frac{C_1C_2g_m}{\left(C_1+C_2\right)^2}=G_p-p\left(1-p\right)g_m=G_p-g_n$$

两者完全等价

$$g_m > \omega_0^2 C_1 C_2 R_s \qquad g_m > \frac{G_p}{p(1-p)}$$

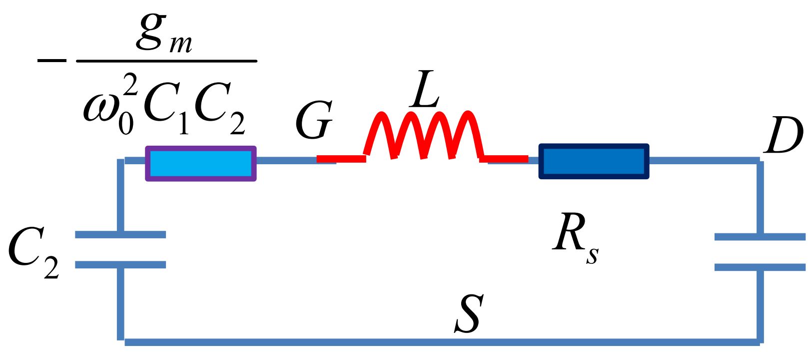
起振条件完全等价

$$G_p = \frac{R_s}{Z_0^2}$$

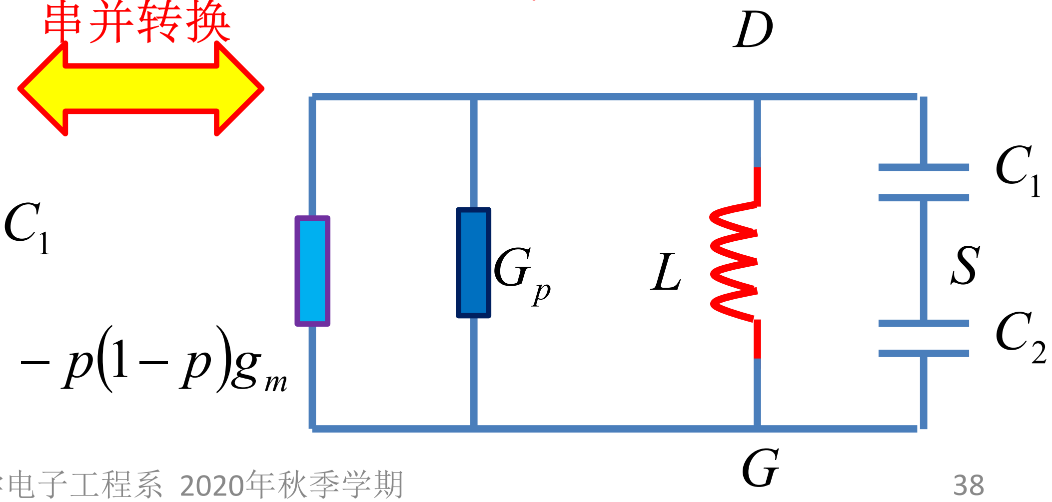


RLC并联谐振等效电路

串并转换



RLC串联谐振等效电路



2.3 晶体管跨导随幅度增加而变小

负阻随幅度增加而变小规律的考察

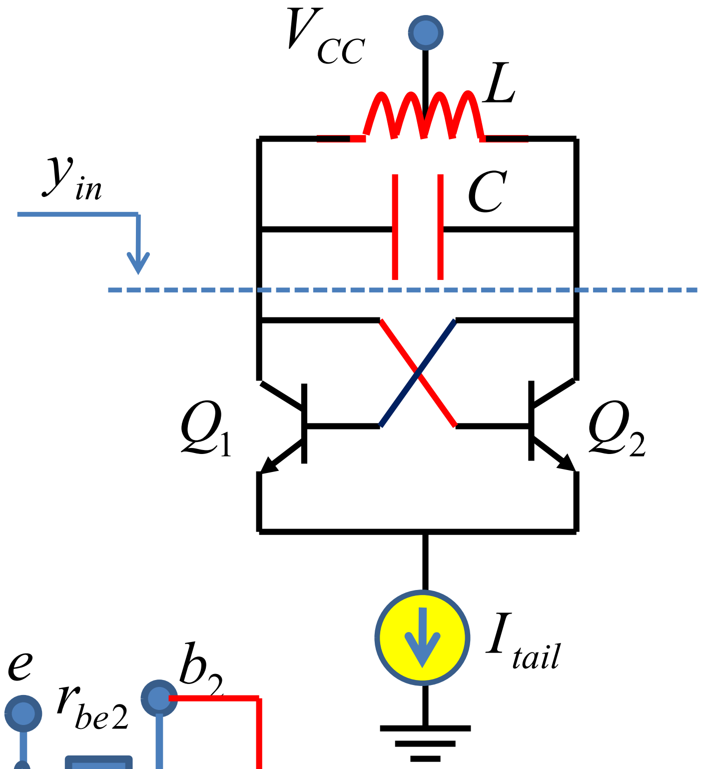
- 在起振过程中，要求晶体管的跨导随着振荡幅度的增加，越来越小，如此振荡最终才会稳定下来
  - 这也是等幅振荡维持所要求的稳定条件

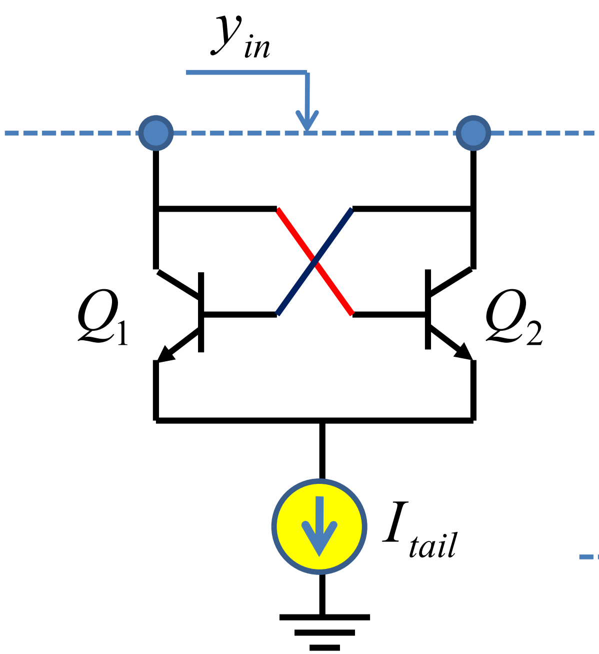
- 是否真的如此变化？
  - 直流工作点位于有源区（线性放大区），但随着信号幅度的增加，晶体管工作区会进入非线性工作区（欧姆区或截止区），从而等效跨导增益下降
    - 等效跨导增益：平均跨导增益：准线性跨导增益

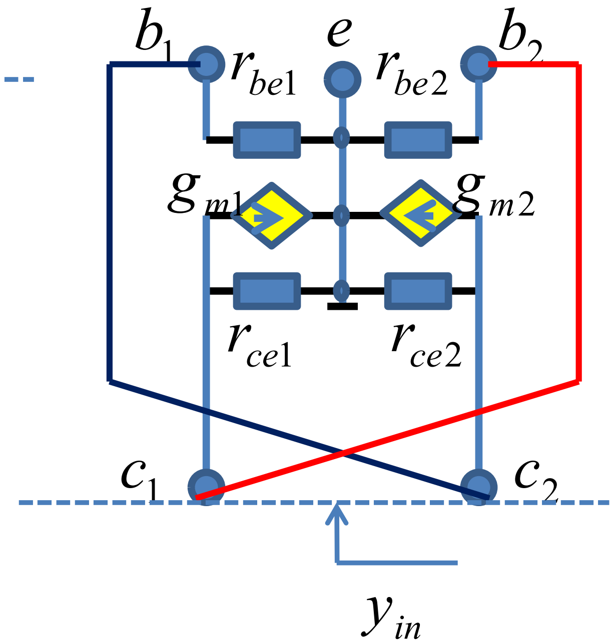
差分对负阻LC振荡器例

简洁的解析表达式容易给出

- 请说明如下LC振荡器起振过程中，跨导器跨导变化规律



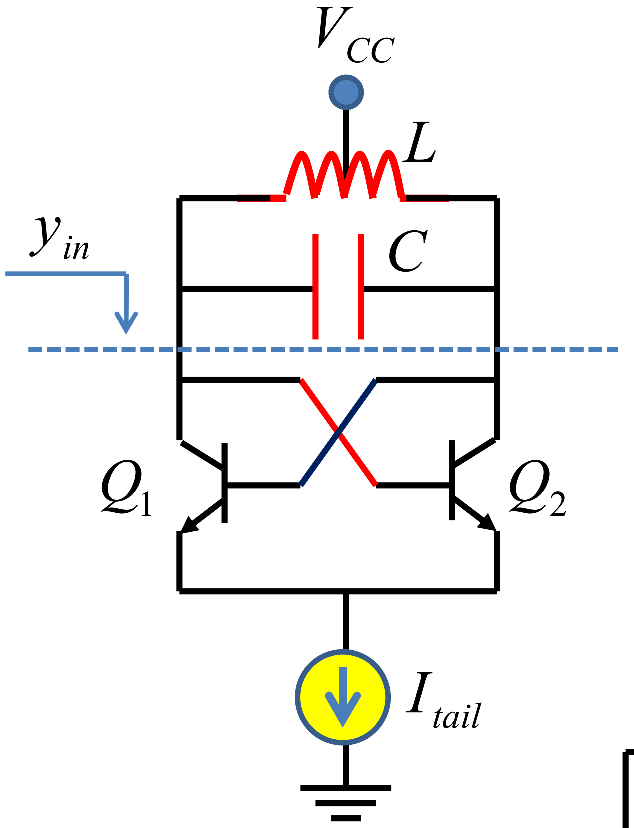


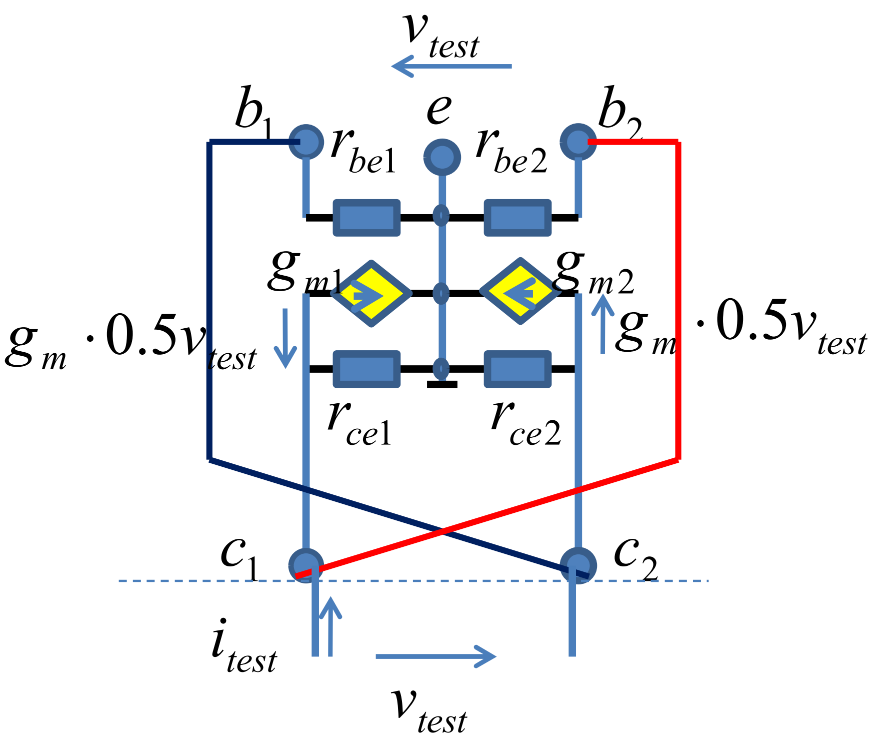


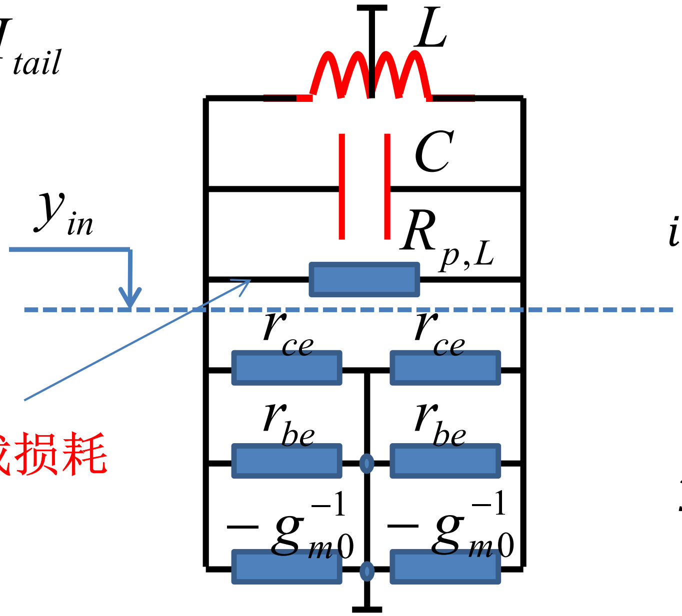
$$g_{m1} = g_{m2} = g_{m0} = \frac{I_{C1,0}}{v_T} = \frac{0.5 I_{tail}}{v_T}$$

直流工作点上

等效负导







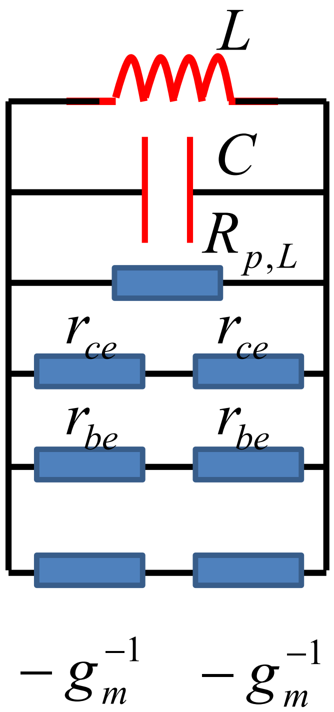
谐振腔损耗+负载损耗

$$i_{test} = \frac{v_{test}}{2r_{ce}} + \frac{v_{test}}{2r_{be}} - g_{m0}(0.5v_{test})$$

$$y_{in} = \frac{i_{test}}{v_{test}} = \frac{1}{2r_{ce}} + \frac{1}{2r_{be}} - \frac{g_{m0}}{2}$$

小信号等效模型

起振条件



$$g_n = 0.5g_{m0} > 0.5g_{be} + 0.5g_{ce} + G_{p,L} = G_p$$

起振条件：小信号等效负导大于回路等效并联电导

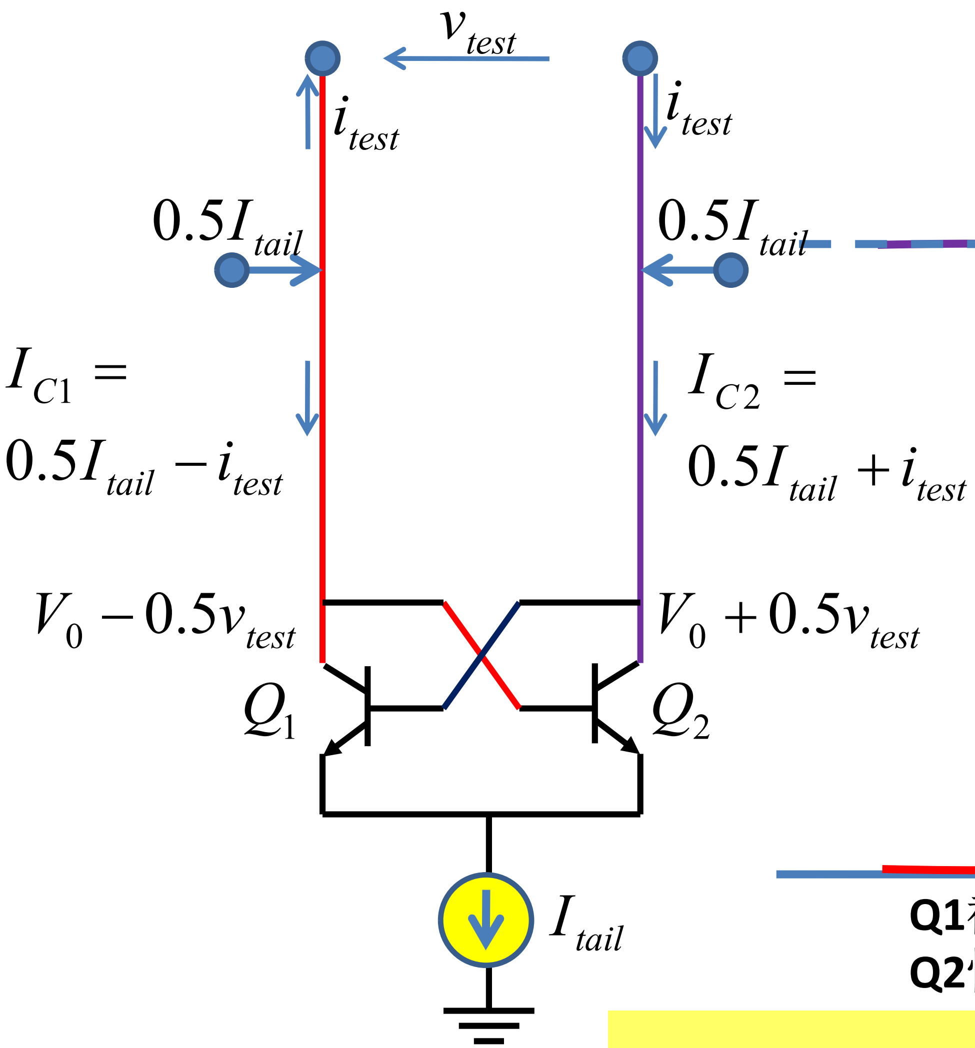
起振需要足够大的跨导增益：增幅振荡

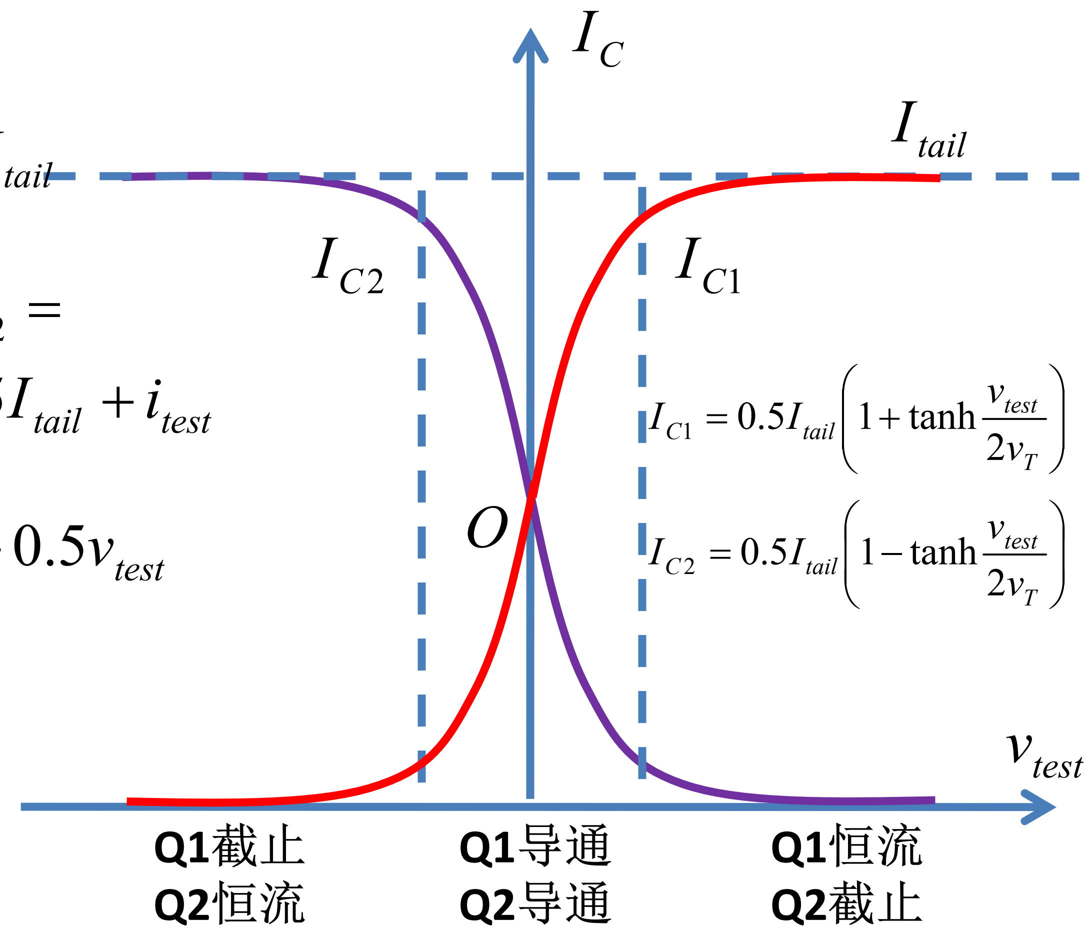
随着振荡幅度增加，跨导增益下降？！
振荡幅度最终平稳

振荡器起振条件本质上是有源器件的有源性条件，只有有源，才可能向外输出功率，才可能振荡（振荡器能够起振），才可能放大（放大器有功率增益）

$$i_{test}=I_{C2}-0.5I_{tail}$$

差分对特性曲线





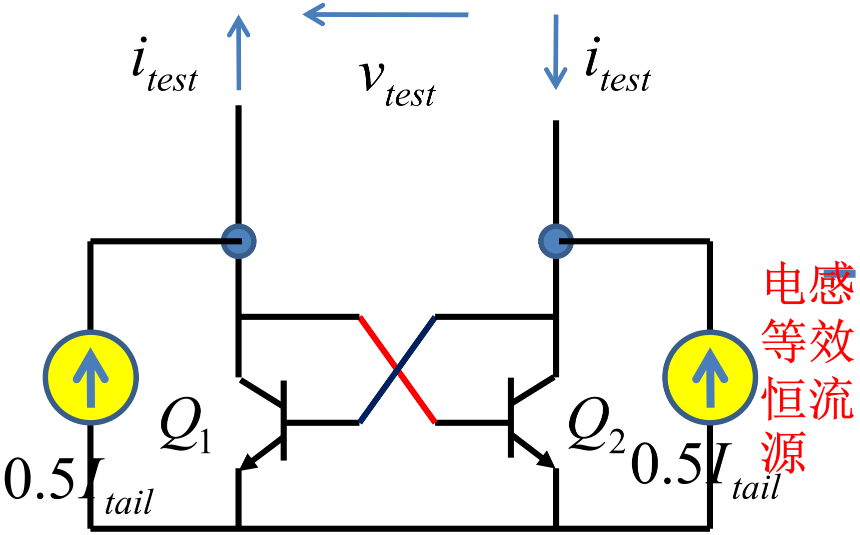
$$i_{test}=I_{C2}-0.5I_{tail}=-0.5I_{tail}\tanh\frac{v_{test}}{2v_T}$$

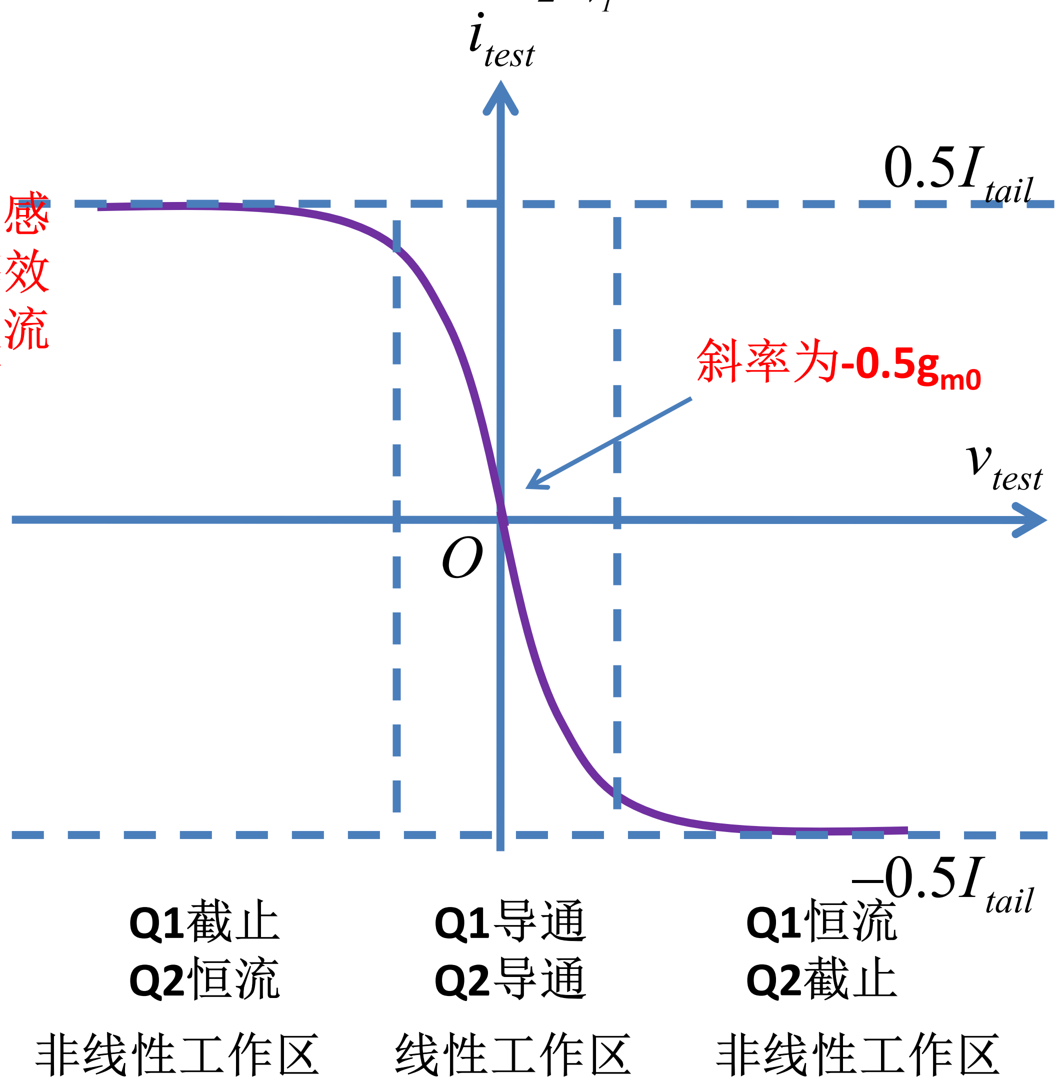
大信号非线性负导

$$i_{test}=I_{C2}-0.5I_{tail}=-0.5I_{tail}\tanh\frac{v_{test}}{2v_T}$$

$$\approx -0.5I_{tail}\frac{v_{test}}{2v_T}=-\frac{1}{2}\frac{0.5I_{tail}}{v_T}v_{test}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{I_{C1,0}}{v_T}v_{test}=-0.5g_{m0}v_{test}$$

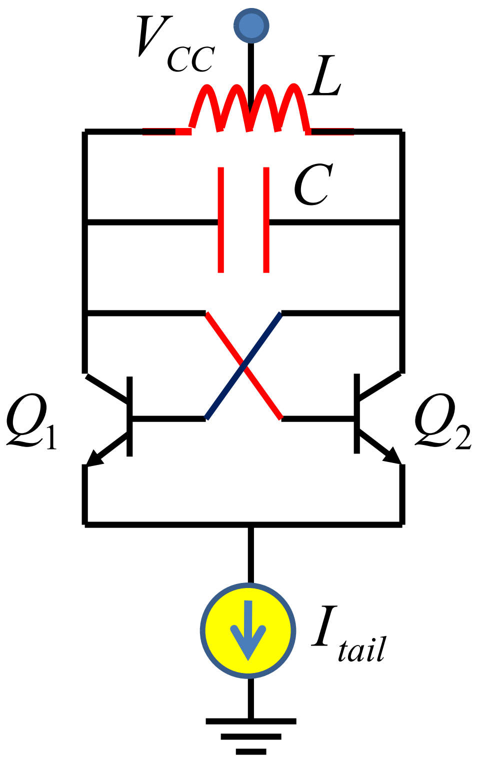




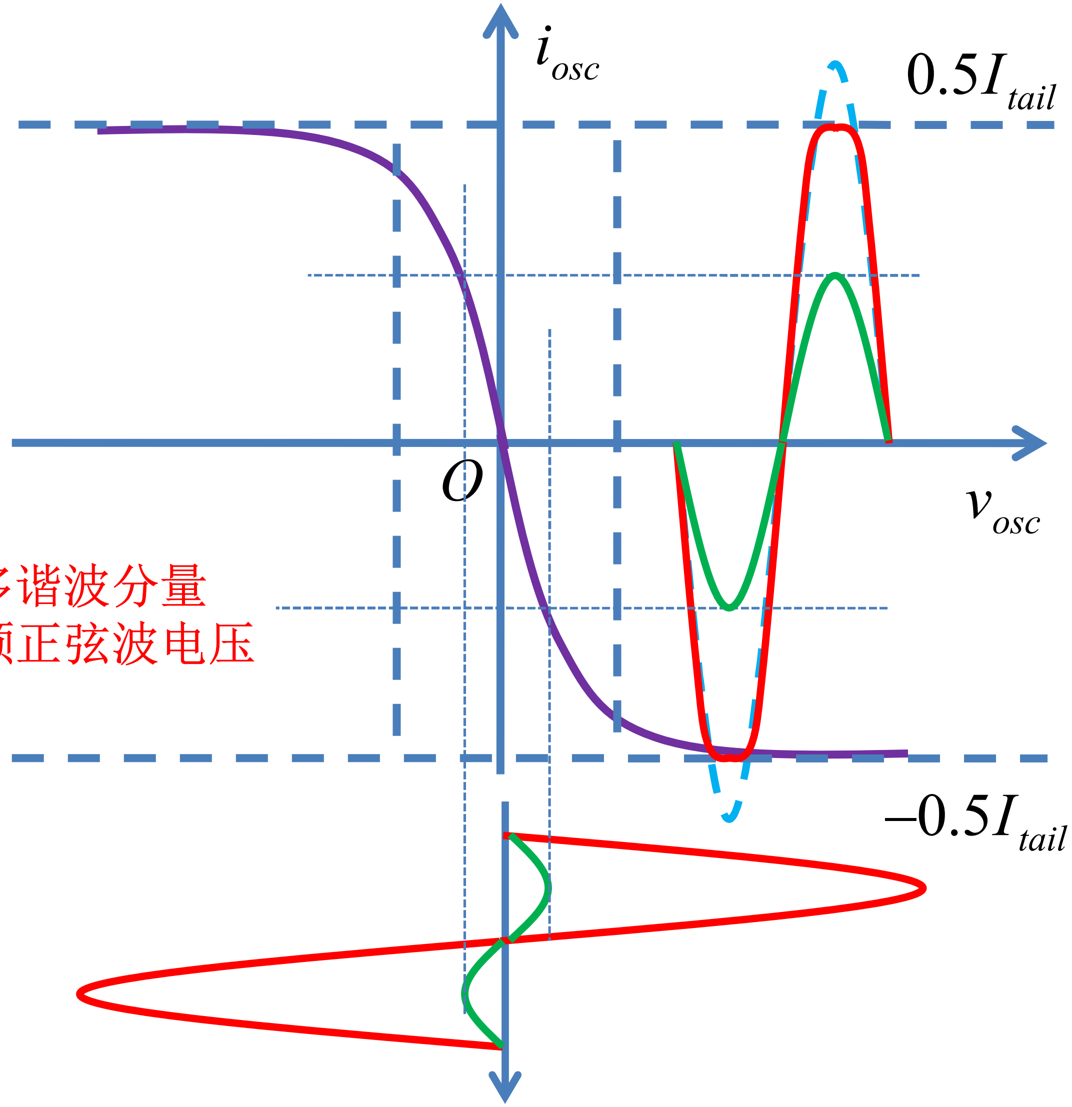
随着振荡信号幅度的增加，晶体管进入非线性工作区，负导越来越小

等效线性负导

- 由于谐振回路的选频作用，振荡电压为正弦波
- 信号进入非线性工作区后，无法定义电阻，我们只考虑振荡频率点的电压电流关系，定义该关系为等效线性电导
  – 准线性负导



电流有很多谐波分量
电压为单频正弦波电压



准线性负导

- 假设振荡电压幅度很大，那么晶体管电流近似为方波信号

$$v_{osc}=V_m\cos\omega_0 t$$

V_m>>2v_T=52mV，很容易满足的条件

$$i_{BJT}=-0.5I_{tail}\tanh\frac{v_{osc}}{2v_T}\approx-0.5I_{tail}S_2\left(\omega_0 t\right)$$

$$=-0.5I_{tail}\left(\frac{4}{\pi}\cos\omega_0 t-\frac{4}{3\pi}\cos 3\omega_0 t+\frac{4}{5\pi}\cos 5\omega_0 t-\ldots\right)$$

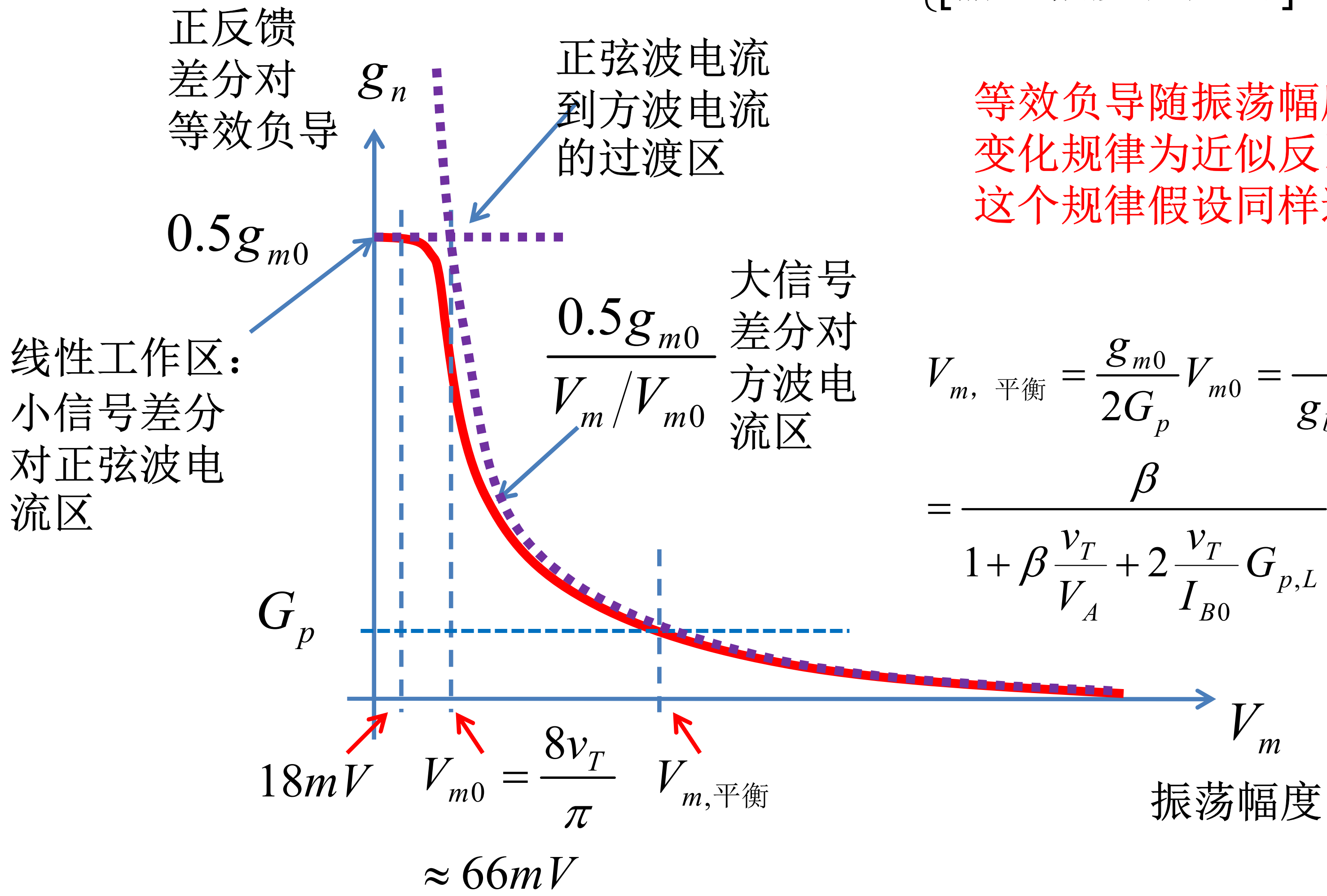
方波电流激励LC并联谐振回路，只有基波分量保留，形成单频正弦波振荡电压

$$-g_n=-\frac{0.5I_{tail}\frac{4}{\pi}}{V_m}=-\frac{4}{\pi}\frac{g_{m0}v_T}{V_m}=-\frac{8v_T}{\pi}\frac{0.5g_{m0}}{V_m}=-\frac{0.5g_{m0}}{V_m/V_{m0}}$$

$$V_{m0}=\frac{8v_T}{\pi}\approx 66mV$$

等效线性负导和振荡幅度成反比

$$g_n = \begin{cases} 0.5g_{m0} & [\text{输入幅度很小时}] \\ \dfrac{0.5g_{m0}}{V_m/V_{m0}} & [\text{输入幅度很大时}] \end{cases} \approx \frac{0.5g_{m0}}{\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{V_m}{V_{m0}}\right)^n}}$$



等效负导随振荡幅度减小得以确认
变化规律为近似反比关系
这个规律假设同样适用于单晶体管

$$V_{m,平衡}=\frac{g_{m0}}{2G_p}V_{m0}=\frac{g_{m0}}{g_{be}+g_{ce}+2G_{p,L}}V_{m0}$$

$$=\frac{\beta}{1+\beta\dfrac{v_T}{V_A}+2\dfrac{v_T}{I_{B0}}G_{p,L}}\frac{8v_T}{\pi}$$

2.4 小结：起振条件

$$R_pR_s = Z_0^2 = \frac{L}{C}$$

- **LC**谐振回路中有各种损耗，这些损耗可折合为串联在**LC**串联谐振回路中的小电阻$\mathbf{R_s}$或并联在**LC**并联谐振回路中的大电阻$\mathbf{R_p}$
  - **LC**谐振回路的**Q**值很大，才能确保正弦波输出 $\frac{R_p}{Z_0} = Q = \frac{Z_0}{R_s}$
- 起振阶段，振荡幅度小，分析可以用线性模型。晶体管的正反馈连接关系可等效为串联负阻$\mathbf{-r_n}$或并联负导$\mathbf{-g_n}$，如果满足起振条件，振荡器则可自激振荡
  - 两个起振条件完全等价，因而是等效为串联**LC**或者并联**LC**，完全以方便等效与方便处理为依据

$r_n > R_s$ $\qquad$ $g_n > G_p$ $\qquad$ 起振条件

振荡频率和振荡幅度由平衡条件决定

- 电路中固有的噪声是全频带的，只要满足起振条件，**LC**谐振回路自身的选频作用，导致只有特定频点的信号幅度越来越大，以增幅振荡形式自激振荡

串联 $X_L + x_n = 0$ ⟹ $f_{osc} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ⟸ $B_L + b_n = 0$ 并联

- 随着信号幅度增加，等效负阻或等效负导越来越小，当等效负阻或等效负导提供的功率恰好补偿电路中的损耗，信号幅度不再增加，**LC**振荡器将维持等幅振荡
  - 维持等幅振荡的条件：准线性负阻$\mathbf{r_n}$或负导$\mathbf{g_n}$随振荡信号幅度$\mathbf{V_m}$的增加而单调下降

$$r_n(I_m = 0) = r_{n,\max} > R_s$$

$$g_n(V_m = 0) = g_{n,\max} > G_p$$

起振条件

$r_n(I_m)$、$g_n(V_m)$ 单调下降

稳定条件

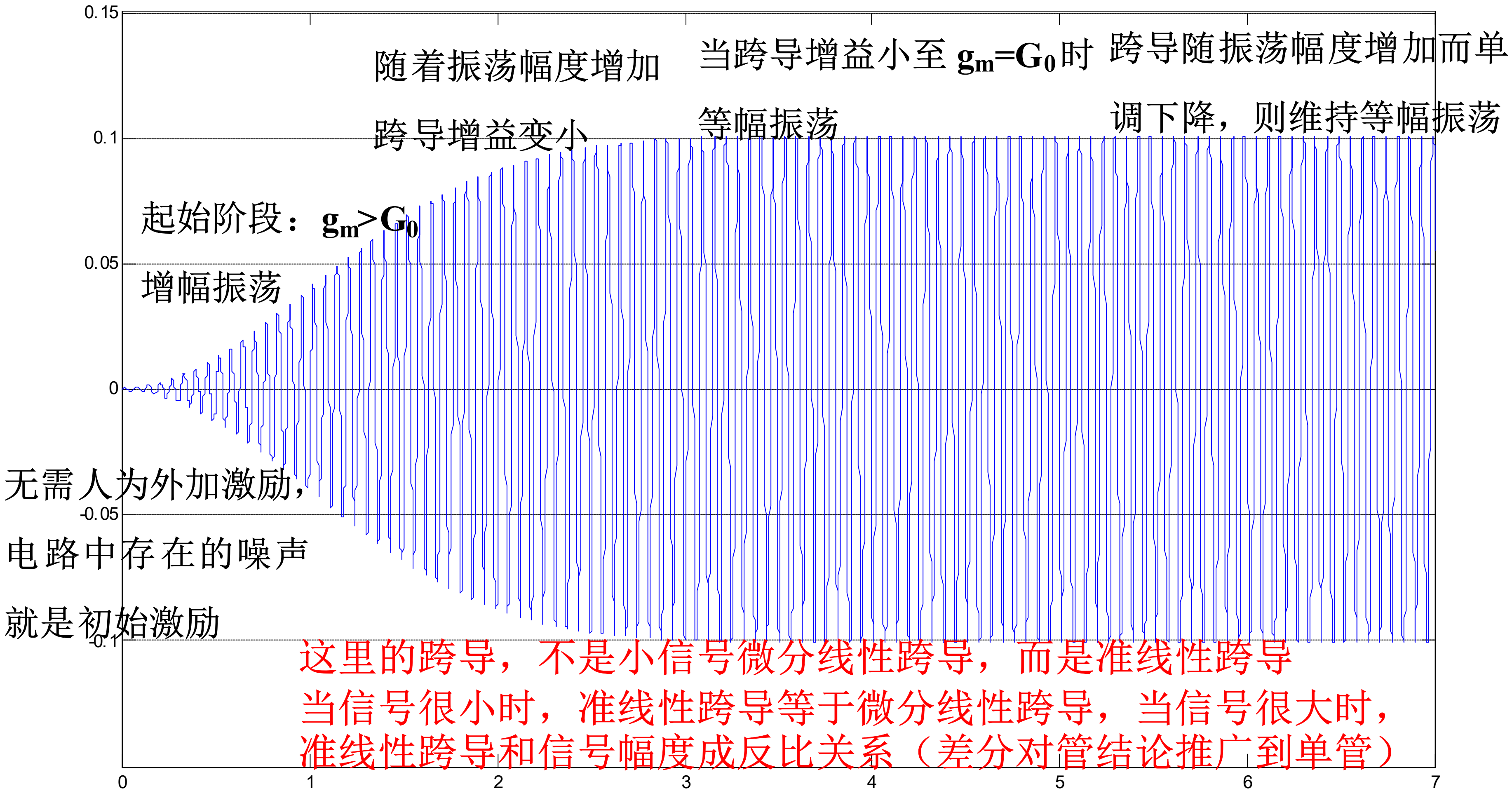
$$r_n(I_{m,osc}) = R_s$$

$$g_n(V_{m,osc}) = G_p$$

平衡条件

三点式振荡器
振荡条件

$$g_m > \omega_0^2 C_1 C_2 R_s = G_0 \qquad g_m > \frac{G_p}{p(1-p)} = G_0$$

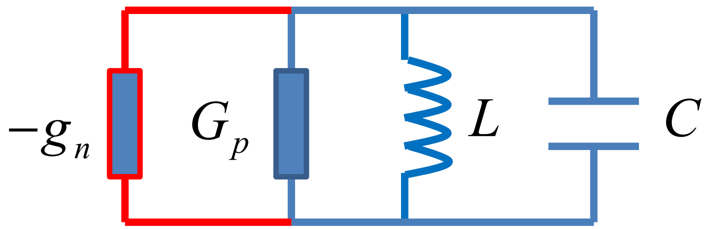


作业1：求振荡幅度和振荡频率

- 已知某负导元件的负导大小和振荡幅度的关系为

$$g_n = \frac{0.01}{V_m}$$

电压单位：V
跨导单位：S



- 已知电感为0.1μH，电容为200pF，电感无载Q值为Q_0=100

$$Q_0 = \frac{Y_0}{G_{p0}} = \frac{1}{G_{p0}\omega_0 L}$$

- 负载电阻为1kΩ

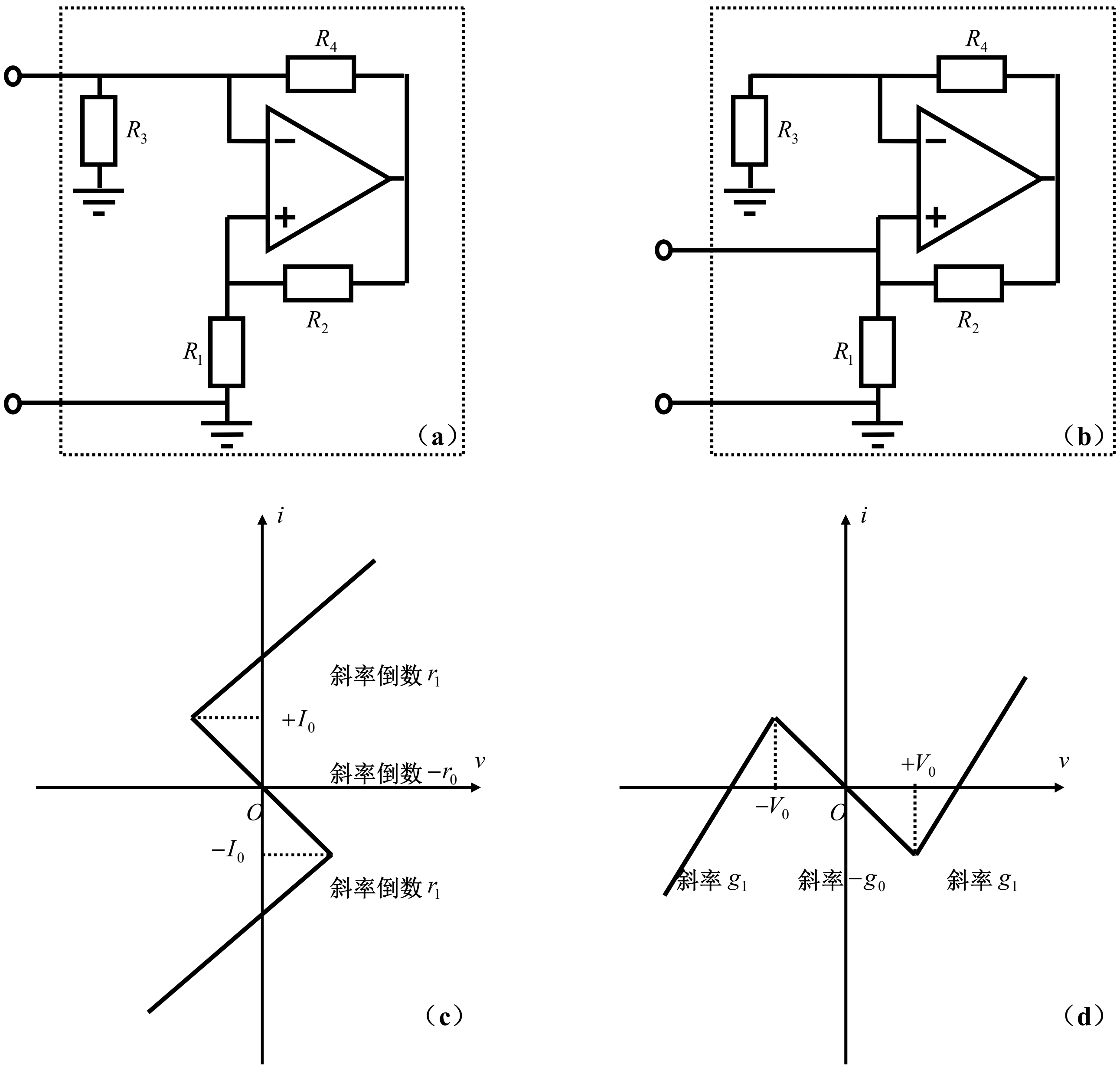
$$G_{p0} = \frac{1}{Q_0\omega_0 L}$$

- 求输出正弦振荡信号的频率和幅度

作业2
等效负阻

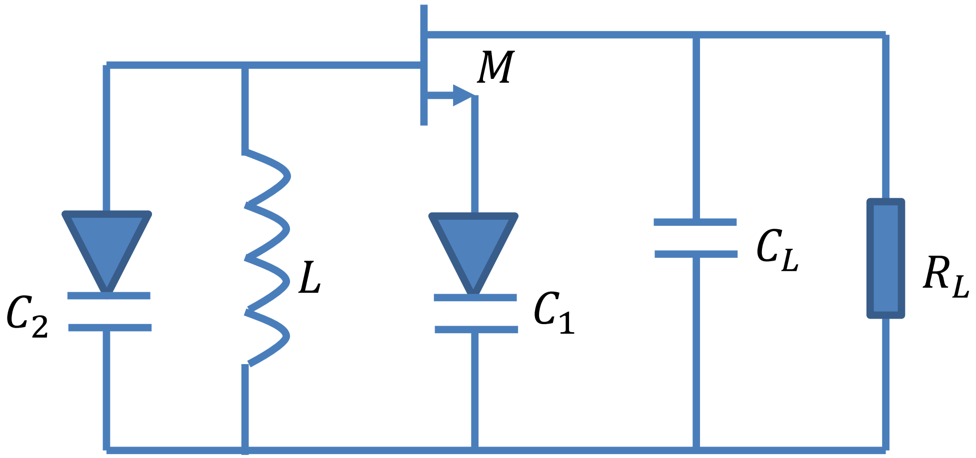
- 图**E10.4.1a**可用来实现**S**型负阻，图**E10.4.1b**可用来实现**N**型负阻。请设计运放外围电路器件大小，用来分别实现图**E10.4.1c**所示的**S**型负阻特性和图**E10.4.1d**所示的**N**型负阻特性。分析中假设运放为理想运放，其正负饱和电压为$\pm V_{sat}$。

- 选作(信号分析，只需了解即可)：以**O**点为工作点，分析**S**型负阻正弦激励电流幅度增加时，准线性负阻随电流幅度变化情况；分析**N**型负阻正弦激励电压幅度增加时，准线性负导随电压幅度变化情况

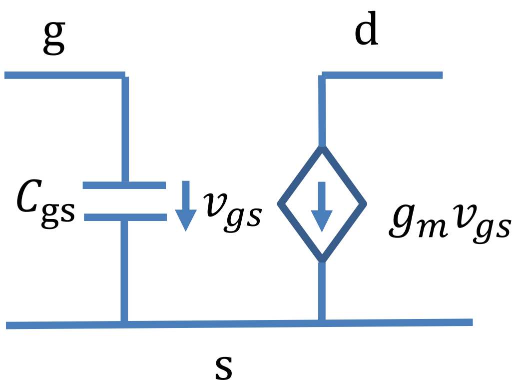


作业3 等效负阻

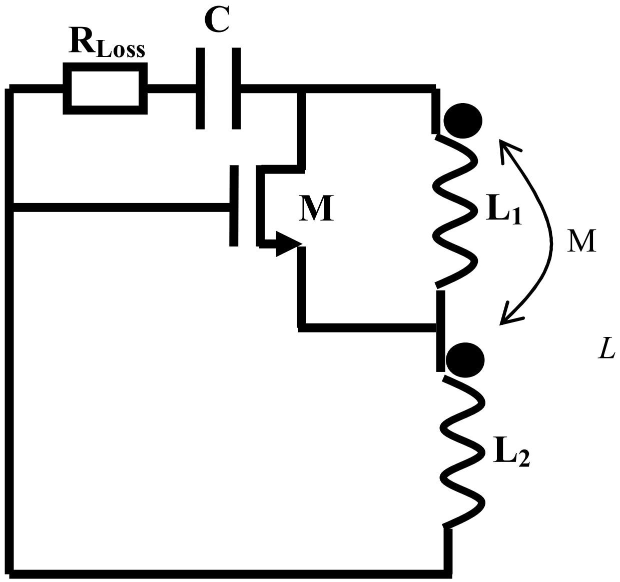
- 图示为微波频段的变容管调谐的正弦波振荡器，请用负阻振荡原理说明它是振荡器



交流电路



GaAs MESFET简化分析模型



作业4 起振条件分析

$$L = L_1 + 2M + L_2 = (N_1 + N_2)^2 \Xi$$

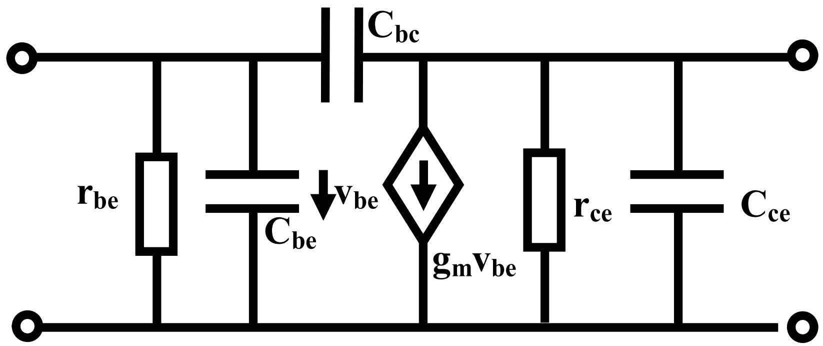
- 某同学在设计哈特莱正弦波振荡器时，首先将一个在磁环上绕了N圈制成的电感L（$=N^2\Xi$，Ξ为磁环磁导）中间引出一个抽头，接到晶体管源极上，电感的两端则分别接在晶体管的漏极和栅极，如图所示。由于一分为二的两个电感绕在同一个磁环上，它们之间具有全耦合关系，即 $M=\sqrt{L_1L_2}$，其中 $L_1 = N_1^2\Xi$，$L_2 = N_2^2\Xi$，这里N_1,N_2和N为电感在磁环上的绕线匝数，$N=N_1+N_2$。假设电路中的所有能量损耗全部折合等效为和电容串联的电阻R_{Loss}，且 $Q=\frac{1}{R_{Loss}}\sqrt{\frac{L}{C}}>>1$。此时图中晶体管可以建模为理想压控流源，其跨导增益为g_m。

（1）请分析该振荡器，用图示的已知电路元件参量**L、M、C、R_{Loss}、g_m**表述该正弦波振荡器的振荡频率和起振条件。

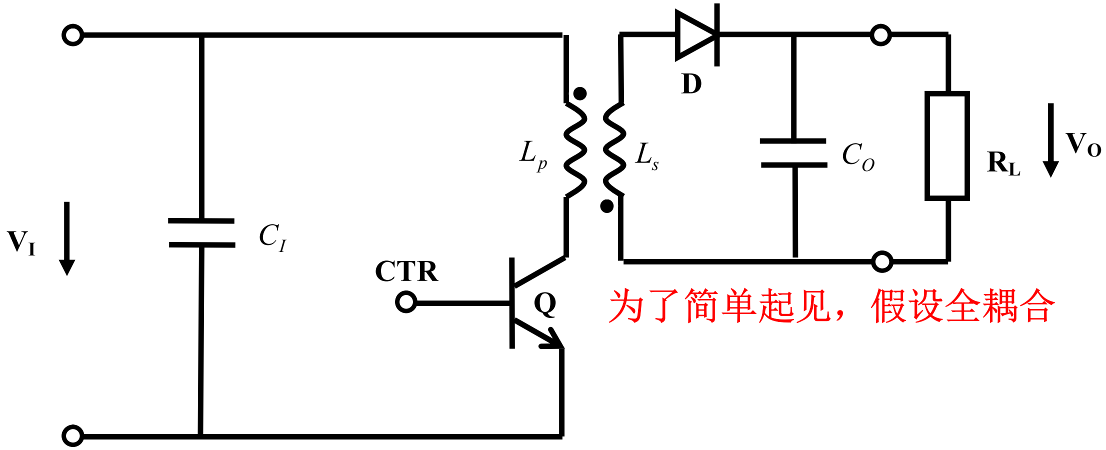
（2）在实际电路设计中，我们往往期望低功耗设计，因而希望直流偏置电流足够的小，换句话说，希望和直流偏置电流成正比关系的跨导g_m应足够的小，该振荡器仍然可以起振。请分析图示振荡电路的电感中间抽头如何引出（即接入系数$p=N_2/N$ 如何取值），该电路可以在较小的g_m（对应较小的直流偏置电流）条件下就可以起振。

选作1：绝对稳定区

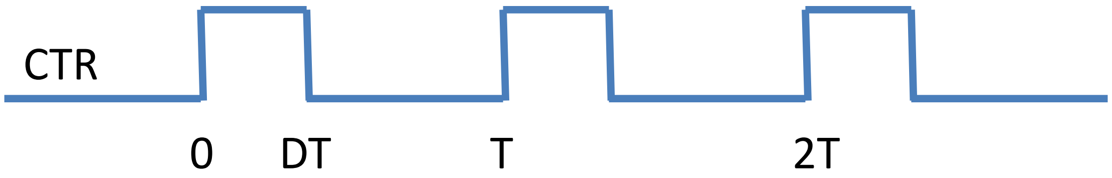
- 二端口网络所谓绝对稳定，指的是其两个端口端接无源负载时，另一个端口的看入阻抗也是无源的。绝对稳定的二端口网络，在端接任意无源负载时，不会出现振荡现象。求图示晶体管二端口网络的绝对稳定区（不会自激振荡的工作频率范围）。



选作2：Flyback Converter



- 反激DC-DC转换器：CTR=1，晶体管Q饱和导通，输入直流电压V_I为初级线圈L_p充磁，变压器同名端接法使得次级线圈电压反相从而二极管D反偏截止，故而V_I对初级线圈的充磁能量全部存储于变压器结构中。此时，负载电阻自大电容C_O获得电能。当CTR=0使得晶体管Q截止，晶体管集电极电压将急剧上升，次级线圈电压反相导致二极管D正偏导通，抽象为开关闭合，假设变压器是全耦合变压器，存储于变压器中的能量将全部自次级线圈L_s对外释放，它对C_O电容充电补充CTR=1阶段释放的电能，同时也为R_L提供直流电能。假设滤波电容C_o极大，导致V_o直流输出电压在充放磁的完整周期内几乎保持不变，CTR方波占空比为D，请分析输出直流电压V_O和输入直流电压V_I之间的关系



CAD仿真

- 从库中找一个晶体管（**BJT**、**MOS**均可）
- 设计晶体管直流偏置电路，使其工作在恒流导通区
- 调试，使其振荡在**1MHz**频点上
  - 查看其起振过程（时域波形）
  - 分析振荡稳定后的正弦波形纯度（傅立叶分析其频谱分量）
  - 如果不振荡，什么原因？如何使其振荡？