电子电路与系统基础II

理论课第10讲　阻抗匹配与变换网络

（变压器、LC匹配网络、部分接入）

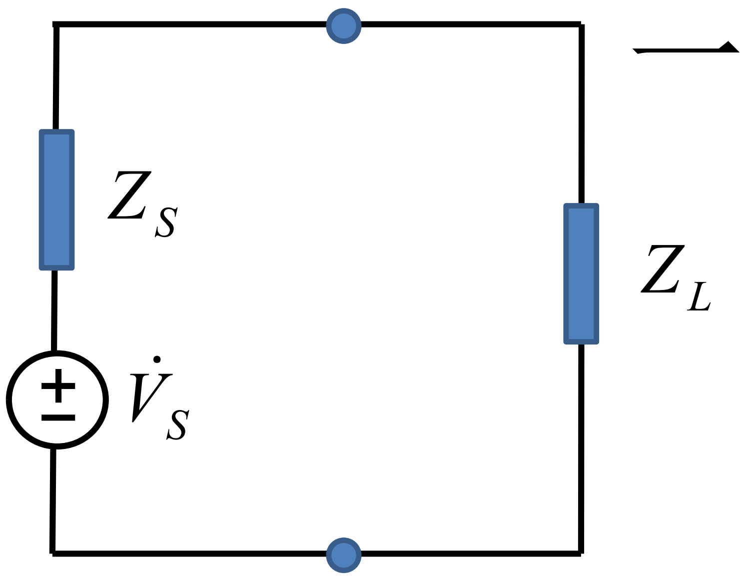
李国林
清华大学电子工程系

阻抗匹配与变换网络 大纲

- 最大功率传输匹配网络
  - 共轭匹配：**LC**匹配网络的构造
  - 谐振角度理解
  - 串并转化公式

- 阻抗变换原理：利用双向网络实现阻抗变换
  - 双向二端口网络实现的阻抗变换
  - 对串并转换的解读
  - 部分接入分析

- 变压器阻抗匹配网络



一、 最大功率传输匹配

$R_L = R_S$ 电阻电路

$$P_L = P_{L,\max} = \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S} = P_{S,\max}$$

$$Z_S = R_S + jX_S \qquad Z_L = R_L + jX_L$$

正弦稳态响应分析：窄带信号可近似视为正弦信号

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{Z_S + Z_L}$$

$$= \frac{\dot{V}_S}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)}$$

$$P_L = I_{rms}^2 R_L = \frac{V_{s,rms}^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} R_L$$

最大功率传输的实现

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} V_{S,rms}^2$$

$$\boxed{X_L = -X_S} \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_S^*}$$

共轭匹配

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} V_{S,rms}^2$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{R_S - R_L}{(R_S + R_L)^3} V_{S,rms}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_S}$$

$$P_L = P_{S,\max} = \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S}$$

共轭匹配

$$P_L = P_{L,\max} = \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S} = P_{S,\max}$$

共轭匹配 $Z_L = Z_S^*$

$R_L = R_S$ 相等：匹配

$X_L + X_S = 0$ 谐振：回路电抗部分相互抵偿

- 电感的电抗是正的，电容的电抗是负的
  - 电感的电纳是负的，电容的电纳是正的
- 要想抵偿电感电抗，则需电容
- 要想抵偿电容电抗，则需电感

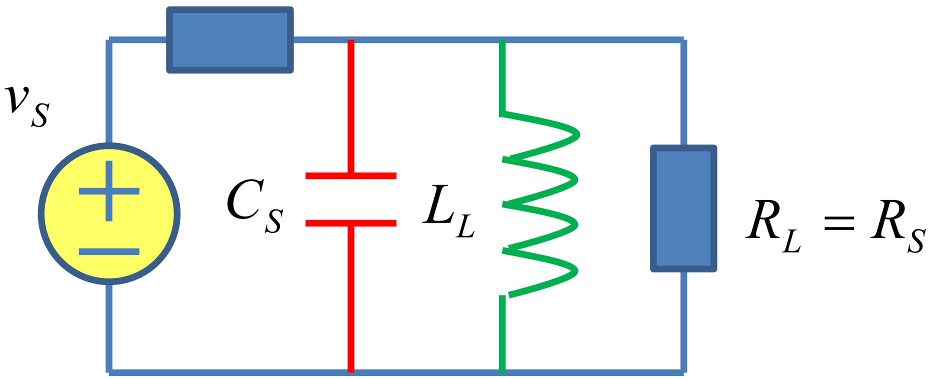
例

$$Z_L = Z_S^* \qquad Y_L = Y_S^*$$

共轭匹配

- 已知某信源输出有寄生电容，如何使得负载获得最大功率传输匹配？

$$G_L = G_S \qquad B_L + B_S = 0$$



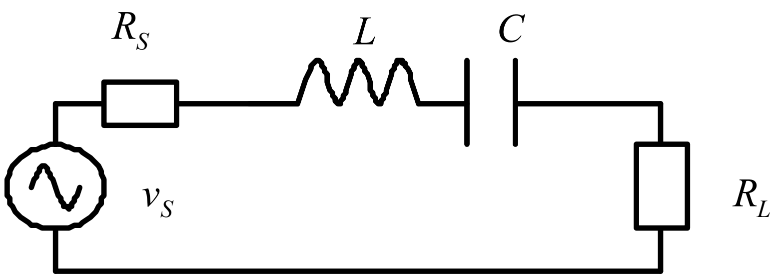
$$-\frac{1}{\omega_0 L_L} + \omega_0 C_S = 0$$

$$L_L = \frac{1}{\omega_0^2 C_S}$$

用感性负载抵偿容性负载，仅在特定的ω_0频点可实现共轭匹配：在匹配频点附件具有带通匹配特性

带通传输

$$|H|^2 = 4\frac{R_S}{R_L}\frac{V_{L,rms}^2}{V_{S,rms}^2} = \frac{\frac{V_{L,rms}^2}{R_L}}{\frac{V_{S,rms}^2}{4R_S}} = \frac{P_L}{P_{S,\max}} = G_p$$



$G_p = 1$ 则意味着负载获得了信源输出的最大的额定功率：最大功率传输匹配：...

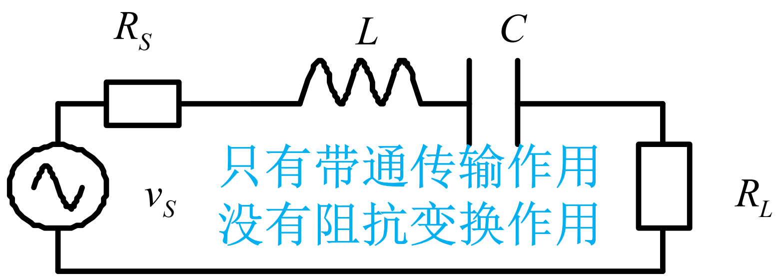
定义：基于功率传输的电压传递函数

$$H(s) = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{V_L(s)}{V_S(s)} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{R_L}{R_S + sL + \frac{1}{sC} + R_L} = H_0\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$H_0 = \frac{2\sqrt{R_S R_L}}{R_S + R_L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \xi = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_S + R_L}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$H_0 \le 1$ $\qquad H_0 = 1(R_L = R_S)$ $\qquad$ H_0^2谐振频点的功率增益

带通选频特性



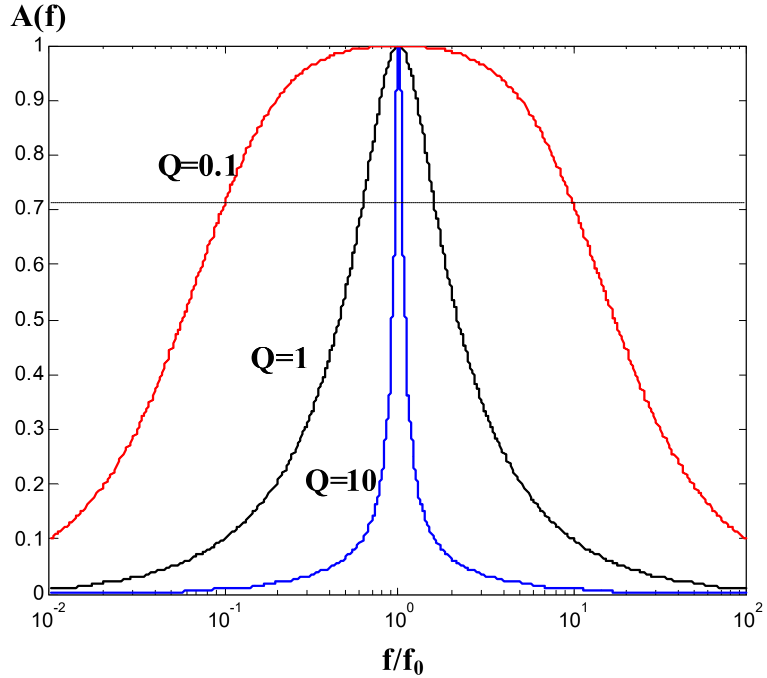
$$H(j\omega)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S}=\frac{2\sqrt{R_SR_L}}{R_S+R_L}\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$Q=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{R_S+R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$=H_0\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

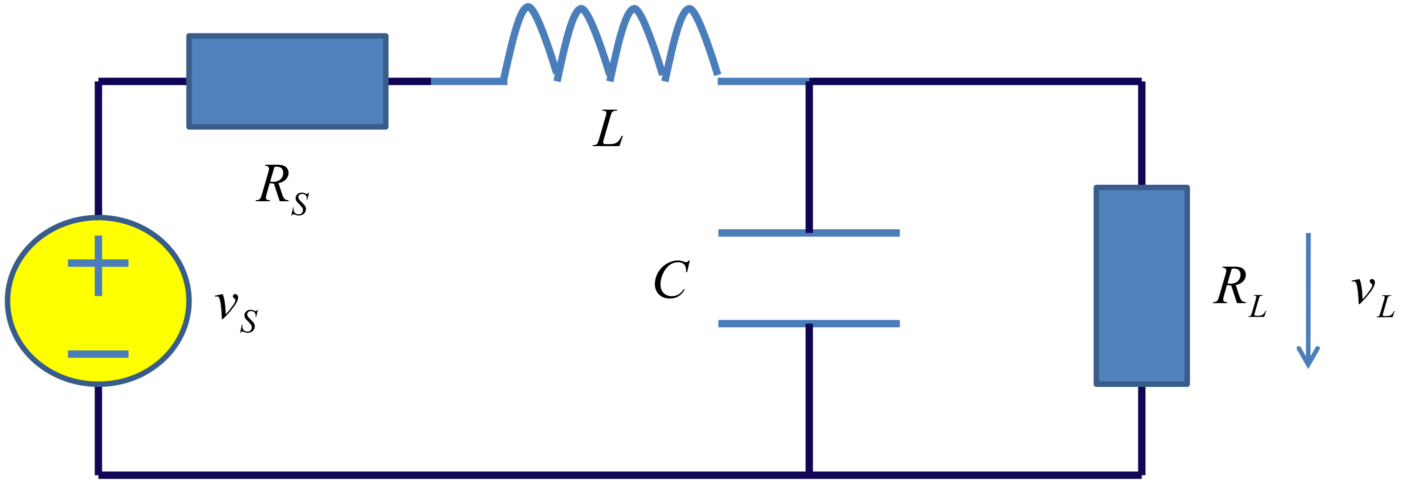
$$=H_0\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}e^{-j\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$=H_0A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\overset{\omega=\omega_0}{=}H_0\overset{R_L=R_S}{=}1$$



显然，共轭匹配发生在谐振频率点上 $P_L(\omega_0)=\left|H(j\omega_0)\right|^2 P_{S,\max}=P_{S,\max}$

低通传输



$$H(s)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{V_L(s)}{V_S(s)}=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dfrac{R_L}{1+sR_LC}}{R_S+sL+\dfrac{R_L}{1+sR_LC}}$$

$$=2\frac{\sqrt{R_SR_L}}{R_L+R_S}\frac{1}{s^2LC\dfrac{R_L}{R_L+R_S}+s\left(\dfrac{L}{R_L+R_S}+C\dfrac{R_SR_L}{R_L+R_S}\right)+1}$$

$$=H_0\frac{1}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\dfrac{s}{\omega_n}+1}=H_0\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}$$

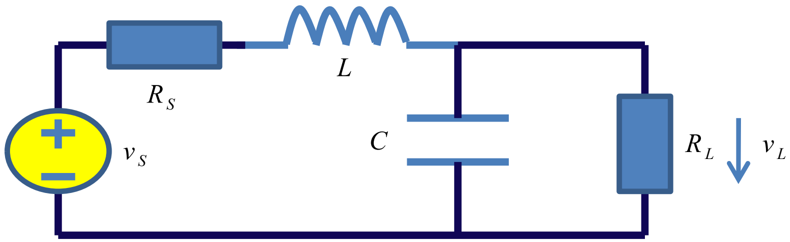
ω_n：系统的自由振荡频率

H_0：低通中心频点零频点的传递系数

二阶低通

$$H(s) = 2\frac{\sqrt{R_S R_L}}{R_L + R_S} \frac{1}{s^2 LC \frac{R_L}{R_L + R_S} + s\left(\frac{L}{R_L + R_S} + C\frac{R_S R_L}{R_L + R_S}\right) + 1}$$

$$= H_0 \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1}$$



二阶低通传函的典型形态：向典型表达式上套

$$H_0 = 2\frac{\sqrt{R_S R_L}}{R_L + R_S}$$

低通系统中心频点传递系数

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{\frac{R_S + R_L}{R_L}}$$

低通系统的自由振荡频率

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{R_L(R_S + R_L)}} + \frac{Y_0}{\sqrt{G_S(G_S + G_L)}}\right)$$

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

低通系统的阻尼系数

假设**R_L=∞**，或**R_S=0**时，**LC**谐振腔参数

情形1：$R_L=R_S=R$

$$H(s)=H_0\frac{1}{1+2\xi\frac{s}{\omega_n}+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}},BW_{3dB}=f_n$$

以零频为中心的幅度最大平坦特性

$$H_0=2\frac{\sqrt{R_SR_L}}{R_L+R_S}=1$$

$$\omega_n=\omega_0\sqrt{\frac{R_S+R_L}{R_L}}=\sqrt{2}\omega_0$$

$$\xi=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{Z_0}{R}+\frac{R}{Z_0}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

幅频特性不可能出现谐振峰

$$\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}=R$$

$$BW_{3dB}=f_n=\sqrt{2}f_0=\frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$L=\frac{\sqrt{2}R}{2\pi BW_{3dB}}$$

$$C=\frac{\sqrt{2}}{2\pi BW_{3dB}R}$$

电感、电容如此取值可获得带宽为$\mathbf{BW_{3dB}}$的幅度最大平坦低通传输特性，通带中心零频点具有最大功率传输匹配

情形2：$R_L \neq R_S$

$$H(s) = H_0 \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

$$H_0 = 2\frac{\sqrt{R_S R_L}}{R_L + R_S} < 1$$

零频点无法实现
最大功率传输

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{\frac{R_S + R_L}{R_L}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{R_L(R_S + R_L)}} + \frac{Y_0}{\sqrt{G_S(G_S + G_L)}}\right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{R_S}{R_S + R_L}}$$ 当R_S很小时可以很小

阻尼系数没有大于**0.707**的限制，可形成谐振峰

设想是否可在谐振峰频点ω_r上实现最大功率传输匹配

$$|H(j\omega_r)| = 1$$

$$\frac{d|H(j\omega_r)|}{d\omega} = 0$$

求解思路清晰，数学性过强

$$H_0 \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1$$

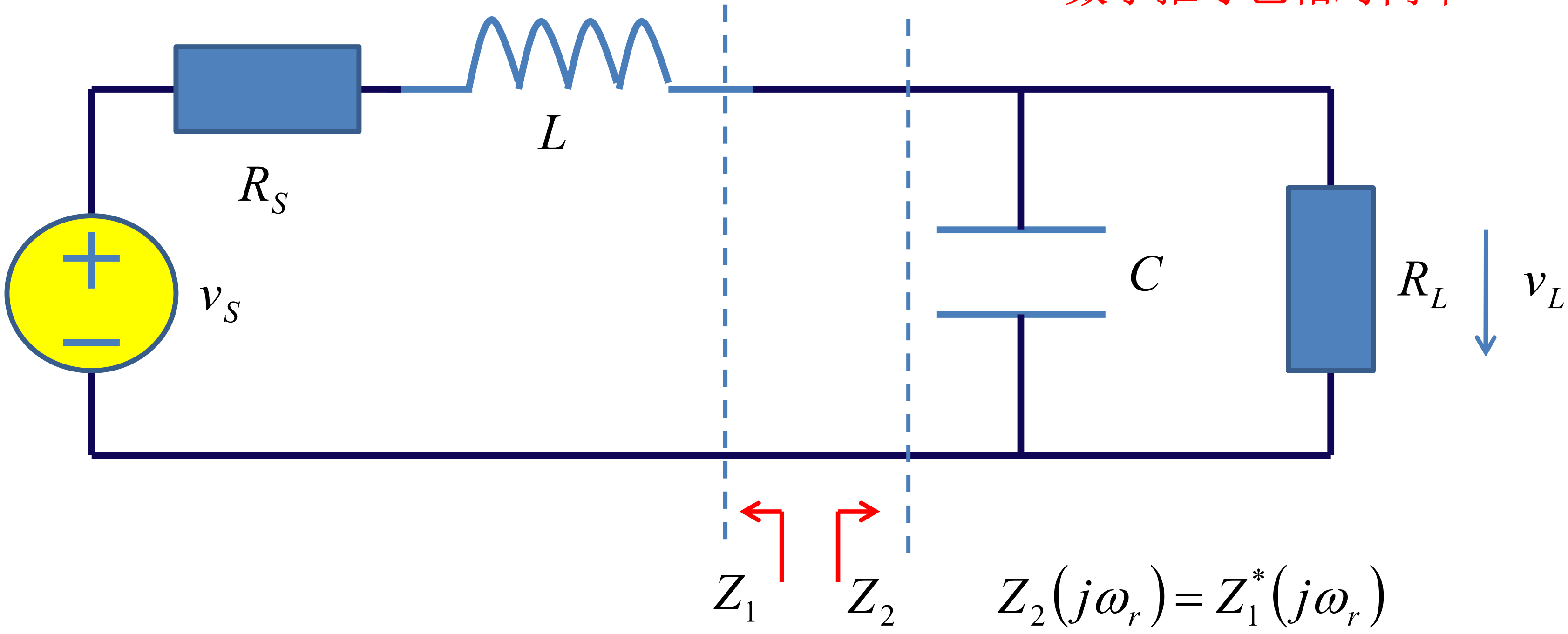
谐振峰频点的传递系数最大为**1**

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}\,\omega_n$$

谐振峰频点最高，它就是匹配频点

换一个思路：共轭匹配

明确的物理意义
数学推导也相对简单



$$Z_2(j\omega_r)=Z_1^*(j\omega_r)$$

$$Z_1(j\omega_r)=R_S+j\omega_r L \qquad Z_2(j\omega_r)=\frac{R_L}{1+j\omega_r R_L C}=\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}$$

共轭匹配

$$Z_1(j\omega_r)=R_S+j\omega_r L \qquad Z_2(j\omega_r)=\frac{R_L}{1+j\omega_r R_L C}=\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}$$

$$Z_2(j\omega_r)=Z_1^*(j\omega_r) \qquad \frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}=R_S-j\omega_r L$$

$$\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}=R_S$$

$$\frac{R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}=L$$

$$C=\frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

$$L=\frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

只要**L**和**C**如是取值，即可在ω_r频点获得最大功率传输匹配

默认$R_L>R_S$

如果$R_L<R_S$?

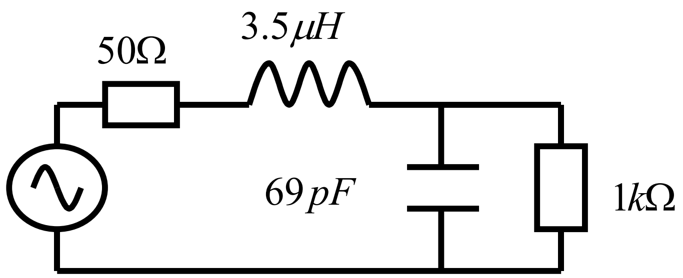
例：LC匹配网络设计

- 已知R_S=50Ω,R_L=1kΩ,请设计一个LC低通匹配网络，在f_r=10MHz频点上实现最大功率传输匹配

L型低通网络

$$L_1=\frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{50}{2\pi\times 10M}\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=3.469\mu H$$

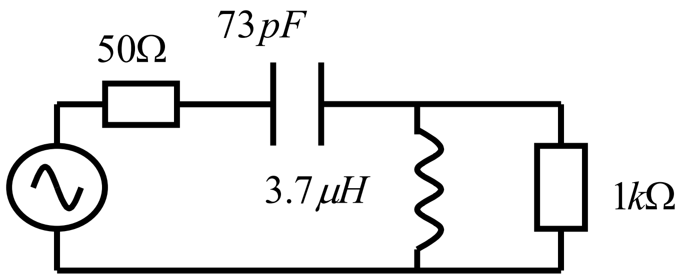
$$C_2=\frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1}{2\pi\times 10M\times 1k}\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=69.37pF$$



L型高通网络：公式有各种方式可获得

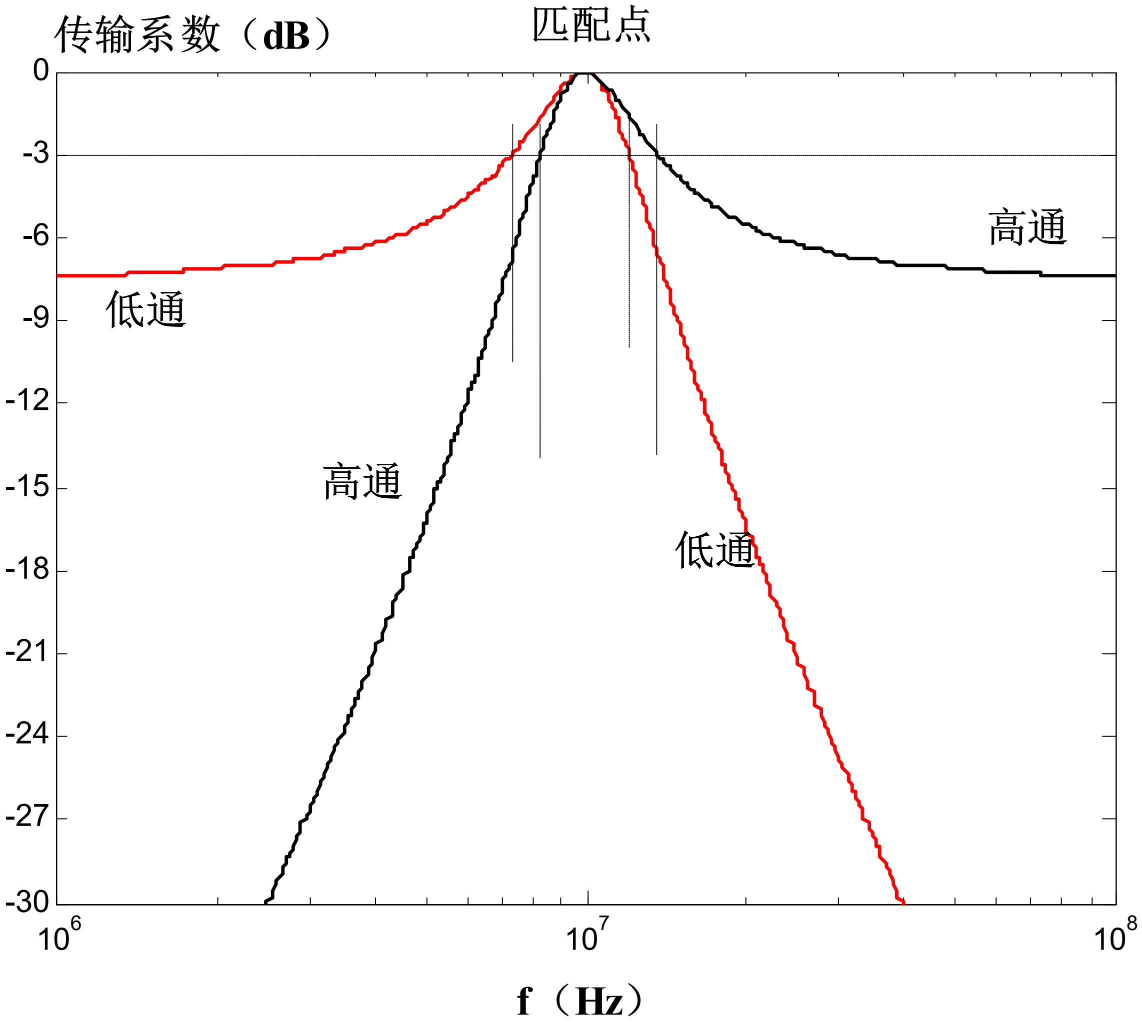
$$C_1=\frac{1}{\omega_r R_S}\Big/\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1}{2\pi\times 10M\times 50}\Big/\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=73.03pF$$

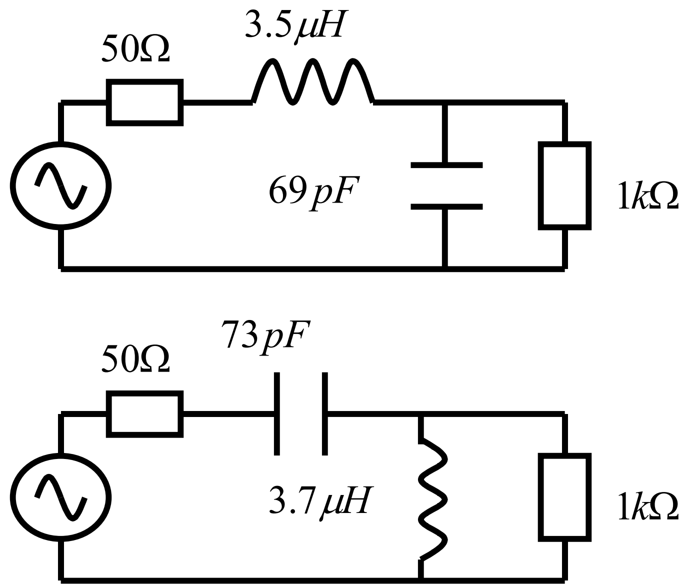
$$L_2=\frac{R_L}{\omega_r}\Big/\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1k}{2\pi\times 10M}\Big/\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=3.651\mu H$$



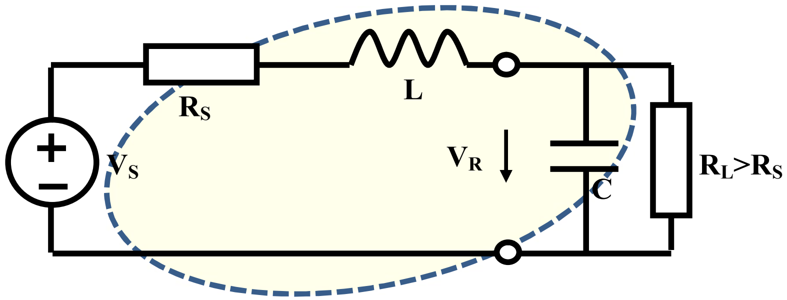
最大功率传输

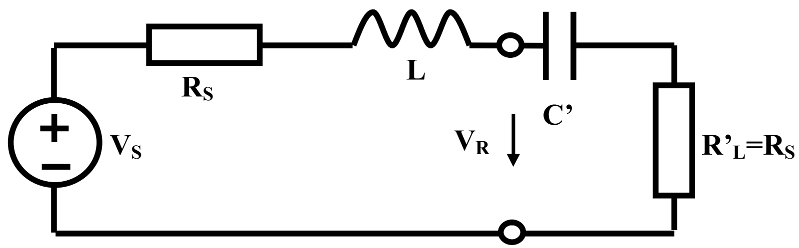
$$G_p = \frac{P_L}{P_{S,\max}} = \frac{\dfrac{V_{L,rms}^2}{R_L}}{\dfrac{1}{4}\dfrac{V_{S,rms}^2}{R_S}}$$



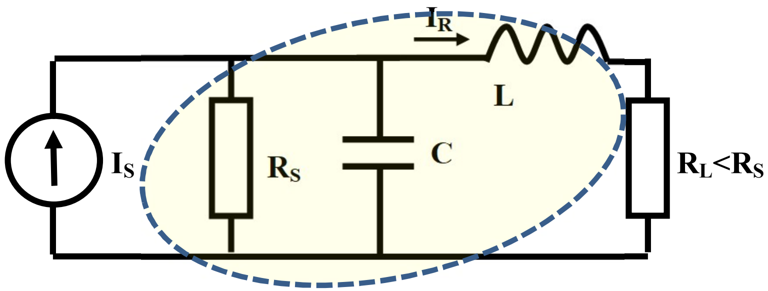


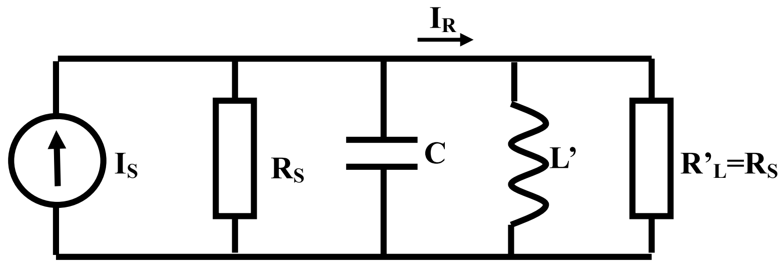
从谐振角度对匹配网络再理解





串联谐振是电压谐振

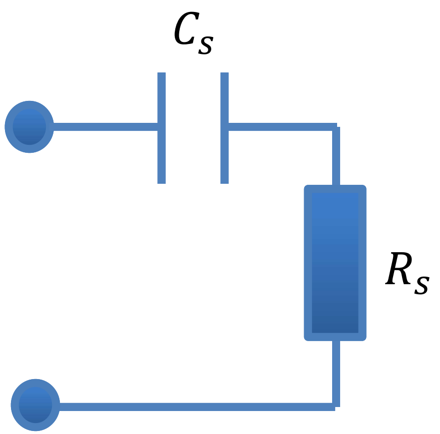




并联谐振是电流谐振

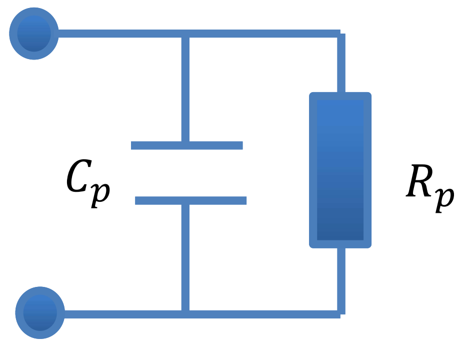
这里的Q是匹配频点（谐振峰频点）的局部Q值

变换口诀：并大串小Q相等

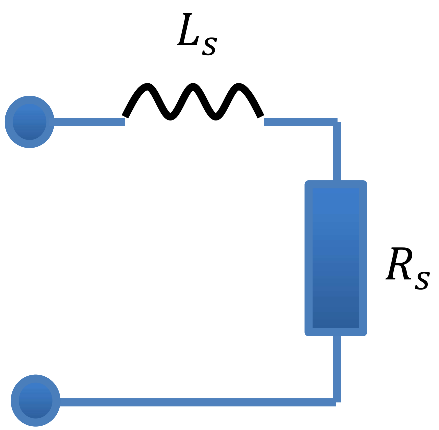


$$Q=\frac{\text{串联电抗}}{\text{串联电阻}}=\frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s}=\frac{1}{\omega R_s C_s}$$

$$Q=\frac{\text{并联电纳}}{\text{并联电导}}=\frac{\omega C_p}{G_p}=\omega R_p C_p$$

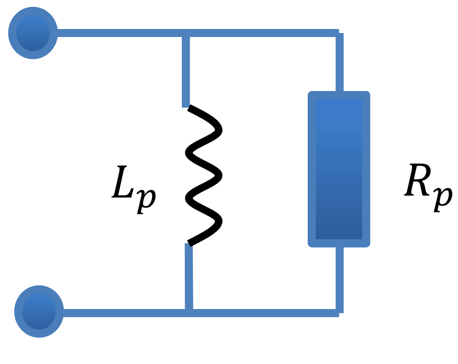


$$Q=\sqrt{\frac{R_p}{R_s}-1}$$

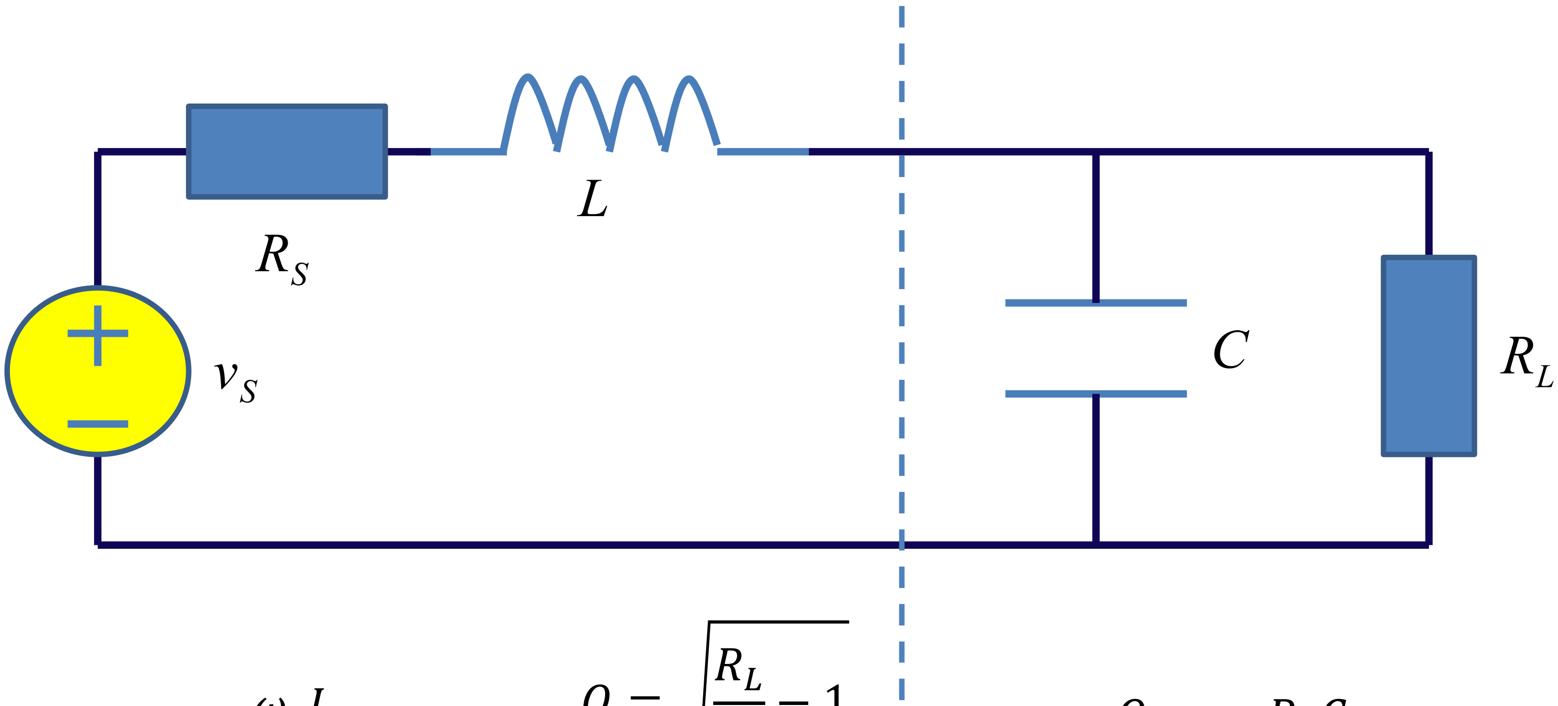


$$Q=\frac{\text{串联电抗}}{\text{串联电阻}}=\frac{\omega L_s}{R_s}$$

$$Q=\frac{\text{并联电纳}}{\text{并联电导}}=\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{G_p}=\frac{R_p}{\omega L_p}$$



按口诀进行设计例一



$$Q = \frac{\omega_r L}{R_S}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_L}{R_S} - 1}$$

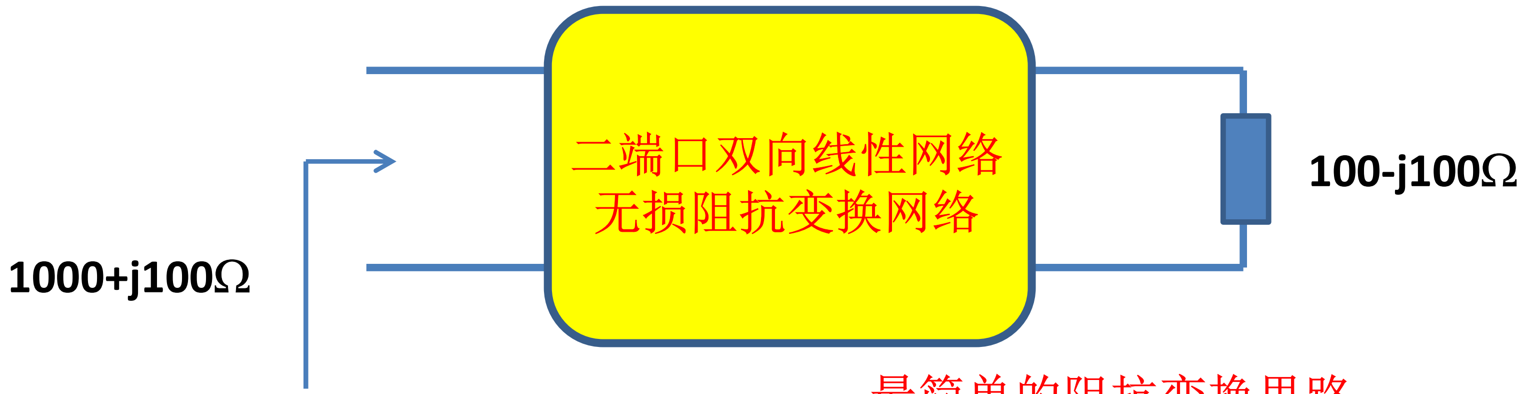
$$Q = \omega_r R_L C$$

$$L = \frac{R_S}{\omega_r} Q = \frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S} - 1}$$

$$C = \frac{1}{\omega_r R_L} Q = \frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S} - 1}$$

按口诀设计例二

请设计一个阻抗变换网络，在频点**10MHz**上，
将阻抗**100-j100Ω**变换为**1000+j100Ω**



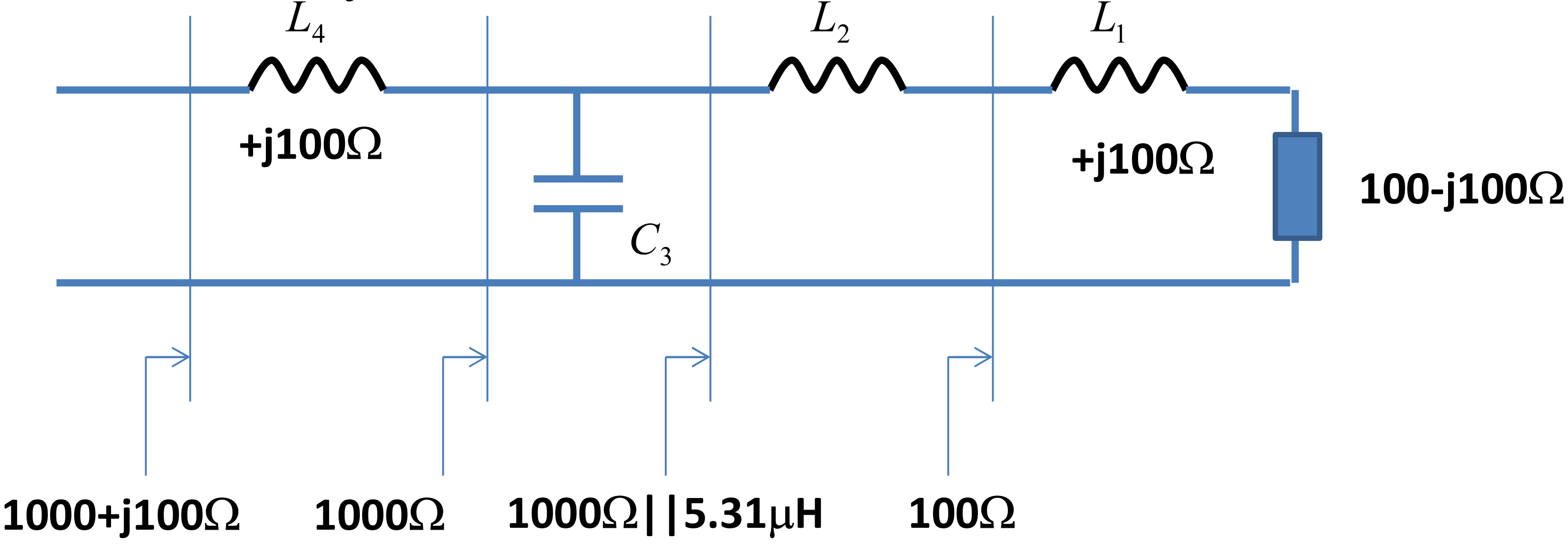
最简单的阻抗变换思路：
1、首先用正电抗（电感）抵偿负电抗
2、之后用串转并，将**100Ω**转化为**1000Ω**
3、最后通过补偿方法获得**j100Ω**正电抗

最简单的阻抗变换思路：

1、首先用正电抗（电感）抵偿负电抗

2、之后用串转并，将**100Ω**转化为**1000Ω**

3、最后通过补偿方法获得**j100Ω**正电抗



$$\omega_0 L_1 = 100\Omega$$

$$L_4 = 1.59\mu H$$

$$Q = \sqrt{\frac{R'}{R} - 1} = \sqrt{\frac{1000}{100} - 1} = 3$$

$$L_1 = \frac{100}{2\times 3.14\times 10\times 10^6} = 1.59\mu H$$

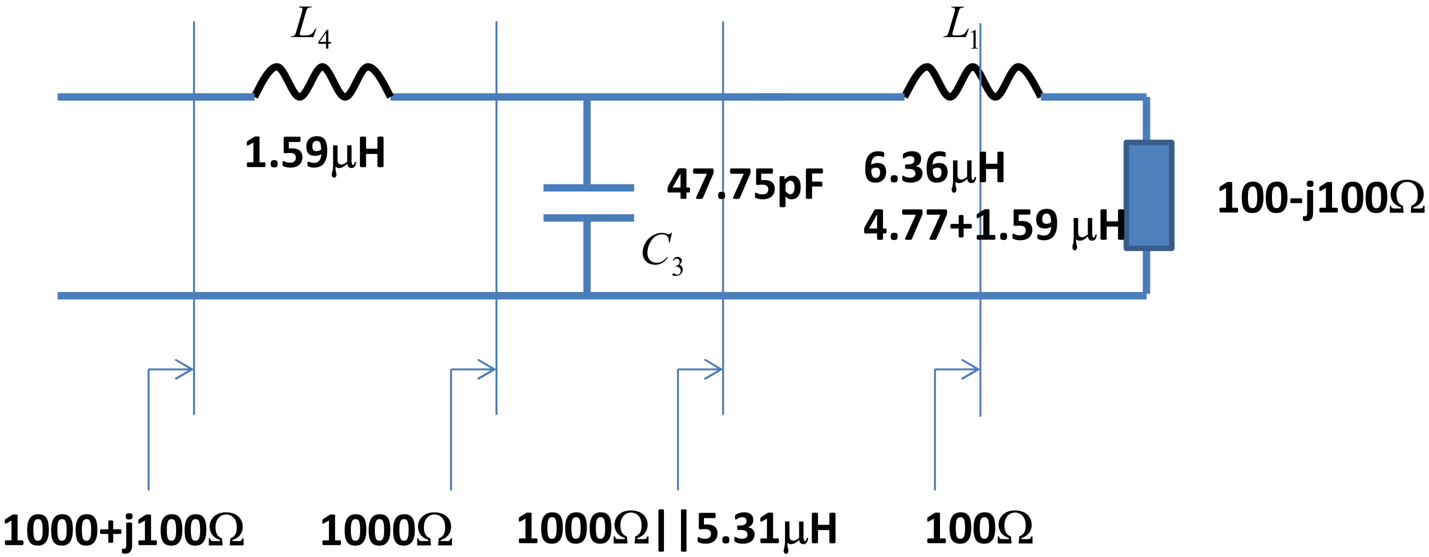
$$C_3 = \frac{1}{\omega_0^2 L'} = \frac{1}{\left(2\times 3.14\times 10\times 10^6\right)^2 \times 5.31\times 10^{-6}} = 47.75 pF$$

$$L_2 = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{3\times 100}{2\pi\times 10^7} = 4.77\mu H$$

$$L' = \frac{R'}{Q\omega_0} = \frac{1000}{3\times 2\pi\times 10^7} = 5.31\mu H$$

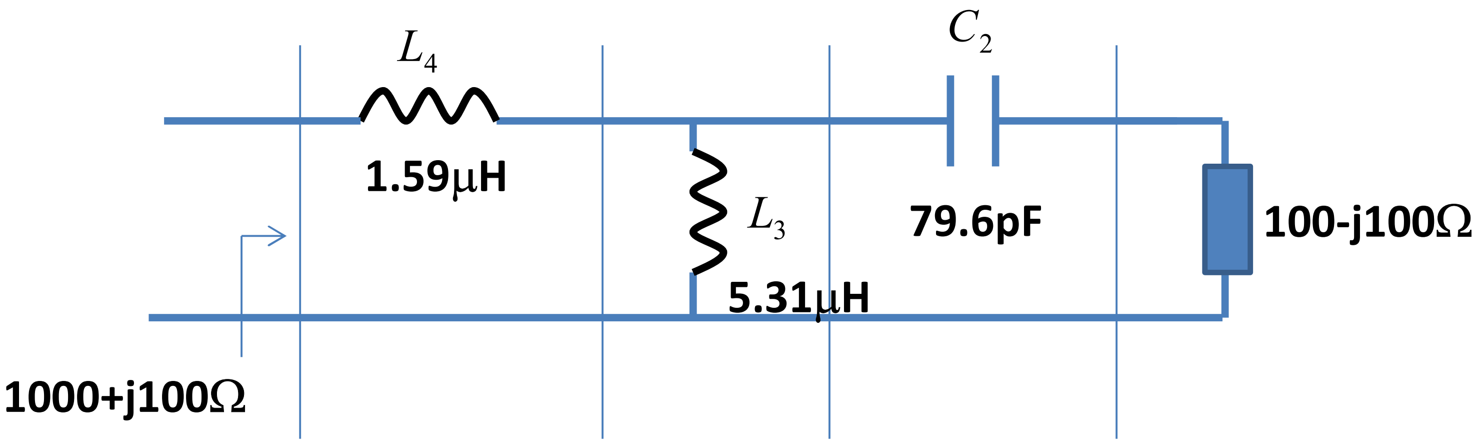
等效并联电感和等效并联电阻的**Q**值不会发生变化

阻抗变换网络



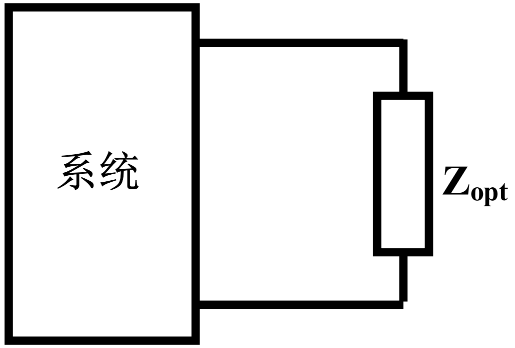
答案不唯一，具体电路和实际应用有关

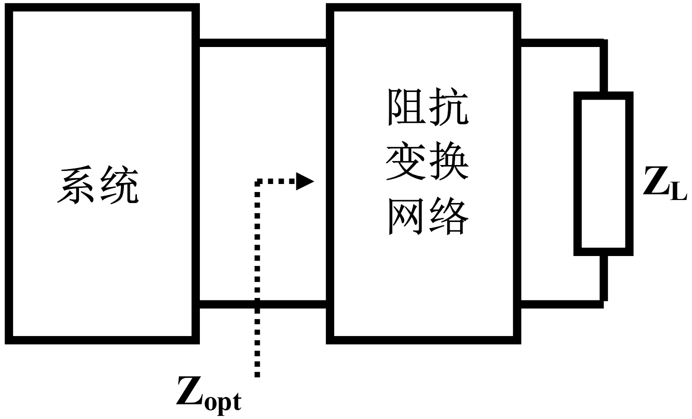
请按口诀设计，确认如下网络也可实现题设阻抗变换



二、阻抗变换原理

- 阻抗变换网络：实现某种最佳特性





系统在特定阻抗条件下具有某种最佳特性

：最大功率传输

：最小噪声系数

：最大线性功率输出

：最佳滤波特性，如最大平坦特性

：....

实际阻抗不具最佳特性，需要阻抗变换网络将实际负载变换为最佳负载

阻抗变换基本原理

- 只要是双向二端口网络，均具有某种阻抗变换能力

单向网络具有隔离作用，负载不会影响输入端：隔离器，缓冲器

$$z_{in}=z_{11}-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}+Z_L}$$

$$y_{in}=y_{11}-\frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+Y_L}$$

$$z_{in}=h_{11}-\frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}+Y_L}$$

$$y_{in}=g_{11}-\frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}+Z_L}$$

$$z_{in}=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}=\frac{B}{D}\cdot\frac{\frac{A}{B}Z_L+1}{\frac{C}{D}Z_L+1}$$

双向网络：

$$z_{12}z_{21}\neq 0$$

$$y_{12}y_{21}\neq 0$$

$$h_{12}h_{21}\neq 0$$

$$g_{12}g_{21}\neq 0$$

$$AD-BC\neq 0$$

匹配网络除了双向外，还应是无损的，最典型的两个阻性无损二端网络是理性变压器和理性回旋器

典型阻抗变换网络

理想变压器

$$\mathbf{h}=\begin{bmatrix}0 & n\\ -n & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{ABCD}=\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & \dfrac{1}{n}\end{bmatrix}$$

$$z_{in}=h_{11}-\frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}+Y_L}=0-\frac{n\cdot(-n)}{0+\dfrac{1}{Z_L}}=n^2Z_L=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}$$

同性变换：R_L→n^2R_L， L→n^2L， C→C/n^2，串联→串联，并联→并联

理想回旋器

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}0 & -r\\ r & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{ABCD}=\begin{bmatrix}0 & r\\ \dfrac{1}{r} & 0\end{bmatrix}$$

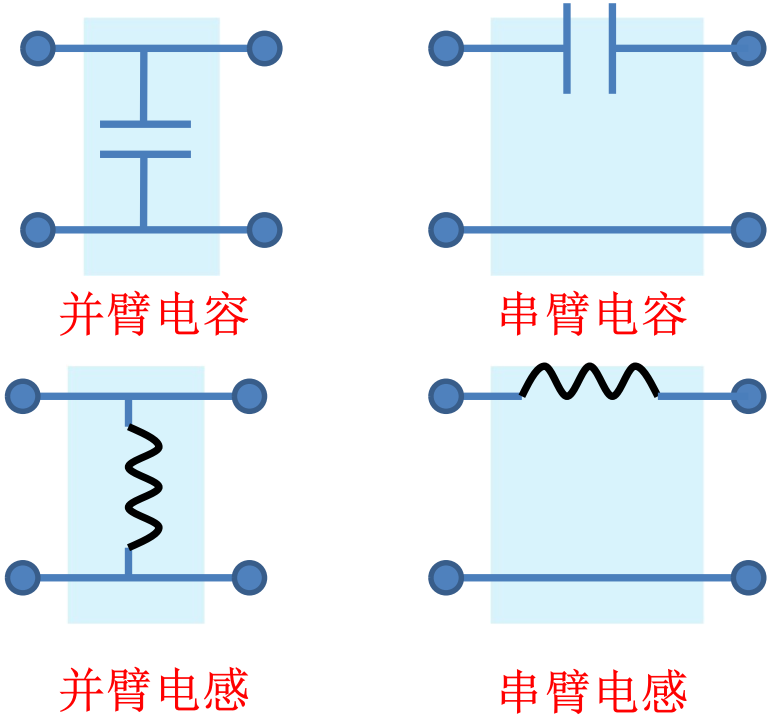
$$z_{in}=z_{11}-\frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}+Z_L}=0-\frac{(-r)\times r}{0+Z_L}=\frac{r^2}{Z_L}=r^2Y_L=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}$$

对偶变换：R_L→$G_L=R_L/r^2$， C→L=Cr^2， L→C=L/r^2，串联→并联，并联→串联

最简单的阻抗变换网络

理想变压器：全频带
（代数方程和频率无关）

电容/电感、传输线…
（微分方程和频率相关）



串臂电容

$$\mathbf{ABCD}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{j\omega C}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

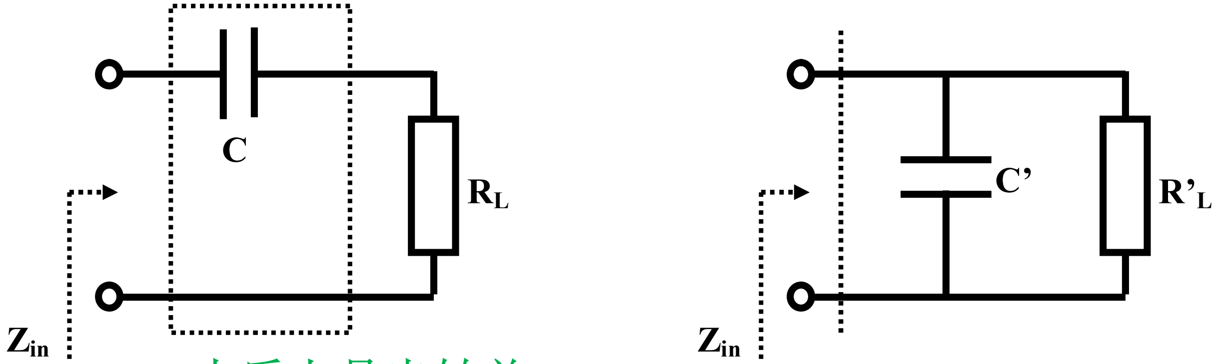
$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}j\omega C & -j\omega C\\ -j\omega C & j\omega C\end{bmatrix}$$

单元件无损互易网络
最简单的匹配元件

双向网络
只有一个参量C

串臂电容变换：串转并，电阻变大

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C \end{bmatrix}$$



本质上是串转并

$$y_{in} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+Y_L} = j\omega C + \frac{\omega^2 C^2}{j\omega C + G_L} = \frac{1}{R_L}\frac{(\omega R_L C)^2}{1+(\omega R_L C)^2} + j\omega C\frac{1}{1+(\omega R_L C)^2}$$

$$R_L' = R_L\left(1+Q^2\right)$$

$$C' = C\frac{1}{1+Q^{-2}}$$

$$Q = \frac{\text{串联电抗}}{\text{串联电阻}} = \frac{1/\omega C}{R_L} = \frac{1}{\omega R_L C} = \frac{f_0}{f}$$

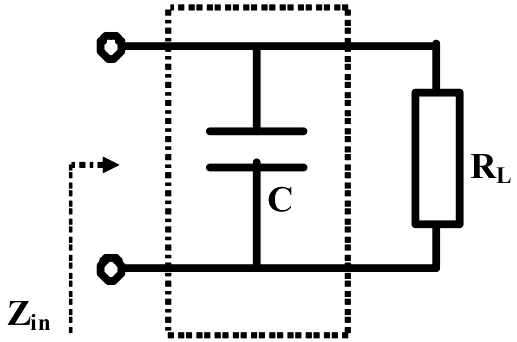
局部**Q**值

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

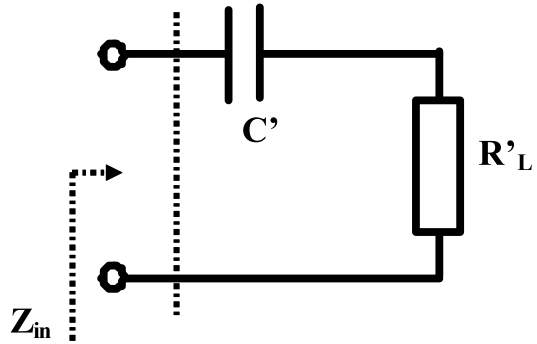
$$Q = \sqrt{\frac{R'_L}{R_L} - 1}$$

并臂电容变换：电阻变小

$$ABCD=\begin{bmatrix}1 & 0\\ j\omega C & 1\end{bmatrix}$$



本质上是并转串



$$z_{in}=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}=\frac{R_L}{j\omega CR_L+1}=\frac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}+\frac{1}{j\omega C}\frac{(\omega CR_L)^2}{1+(\omega CR_L)^2}$$

$$R'_L=\frac{R_L}{1+Q^2}$$

$$Q=\frac{\text{并联电纳}}{\text{并联电导}}=\frac{\omega C}{G_L}=\omega R_L C=\frac{f}{f_0}$$

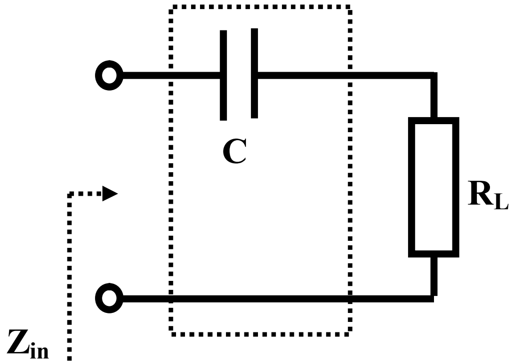
$$f_0=\frac{1}{2\pi\tau}$$

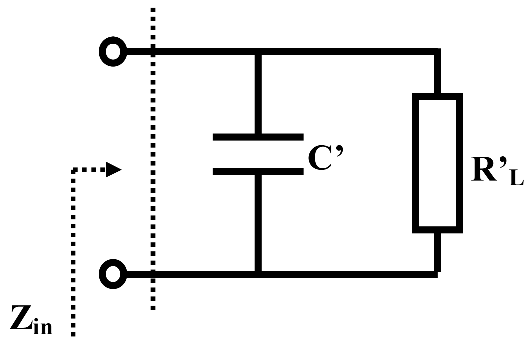
$$C'=C\left(1+Q^{-2}\right)$$

$$Q=\sqrt{\frac{R_L}{R'_L}-1}$$

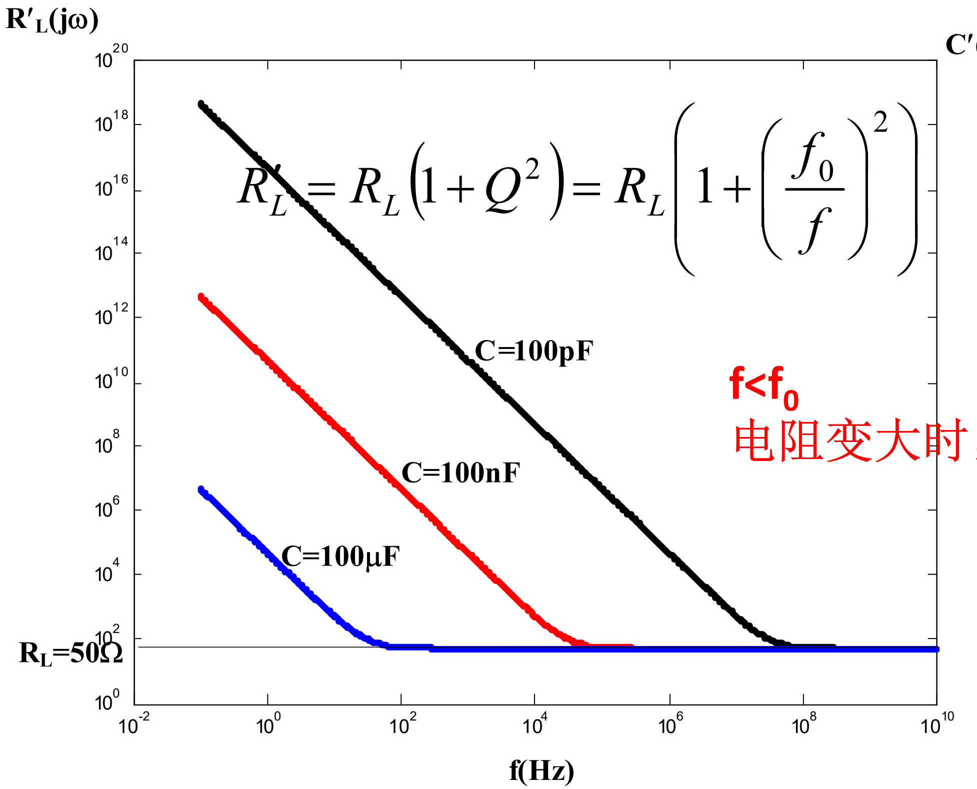
数值例

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$





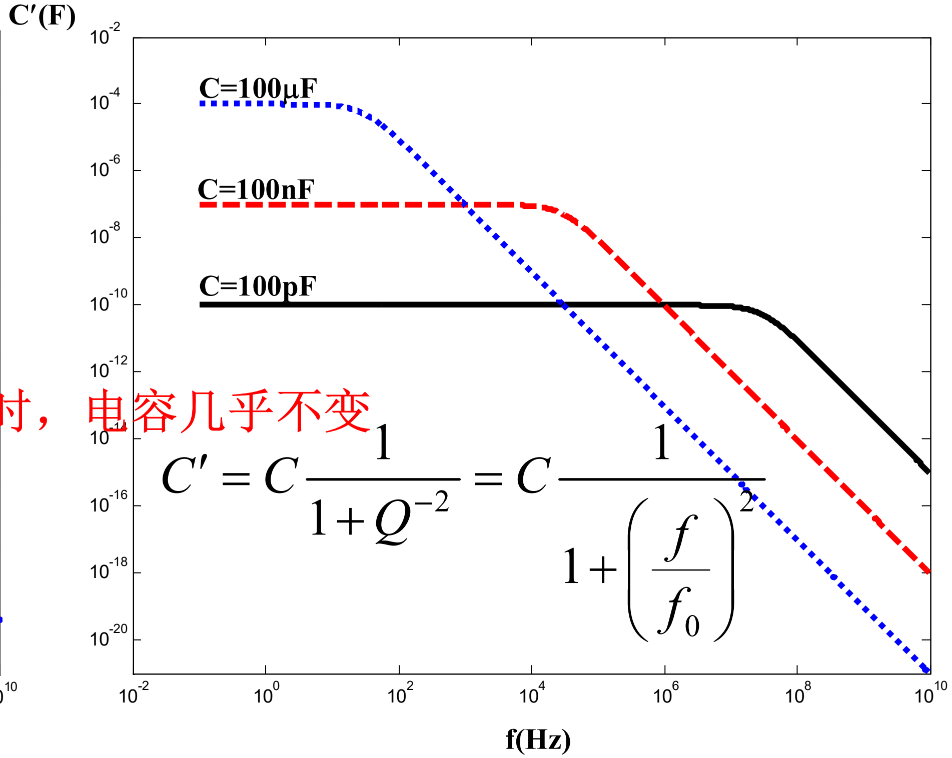
R_L=50Ω，C=100pF、100nF、100μF



$$R_L' = R_L\left(1+Q^2\right) = R_L\left(1+\left(\frac{f_0}{f}\right)^2\right)$$

$f<f_0$

电阻变大时，电容几乎不变



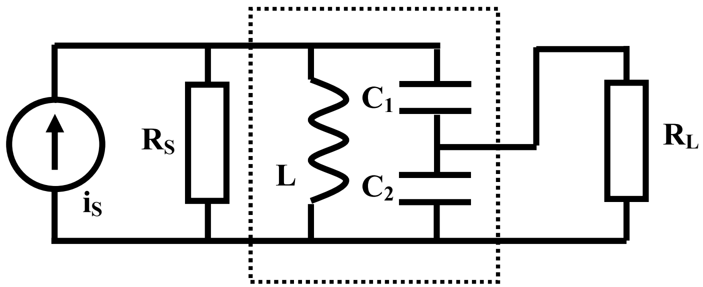
$$C' = C\frac{1}{1+Q^{-2}} = C\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

串转并，电阻变大；对偶地，并转串，电阻变小

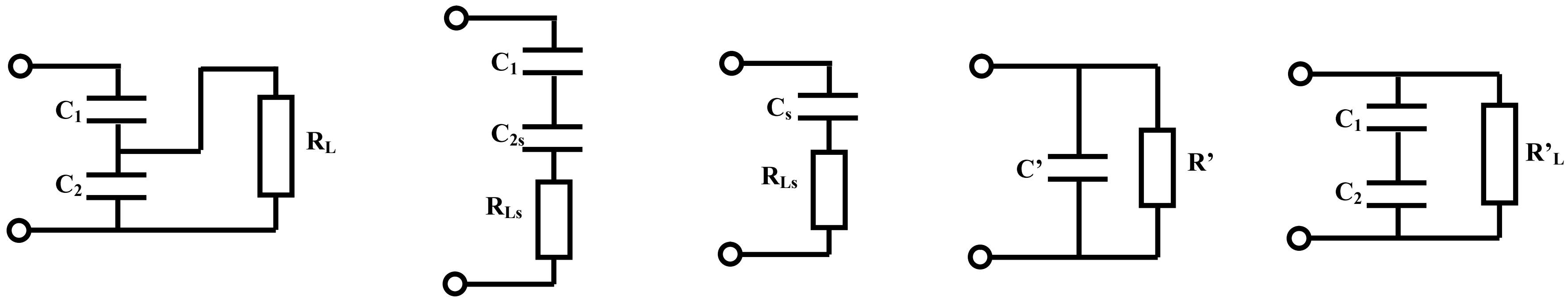
阻抗变换网络两端：串联电阻小，并联电阻大

电容部分接入

负载部分接入到谐振回路中



$$Q_p = R_p\sqrt{\frac{C_p}{L_p}}$$



（a）部分接入　（b）并转串　（c）合并　（d）串转并　（e）全接入等效

$$R_L >> \frac{1}{\omega_0 C_2}$$

$$C' \approx C_1 串 C_2$$

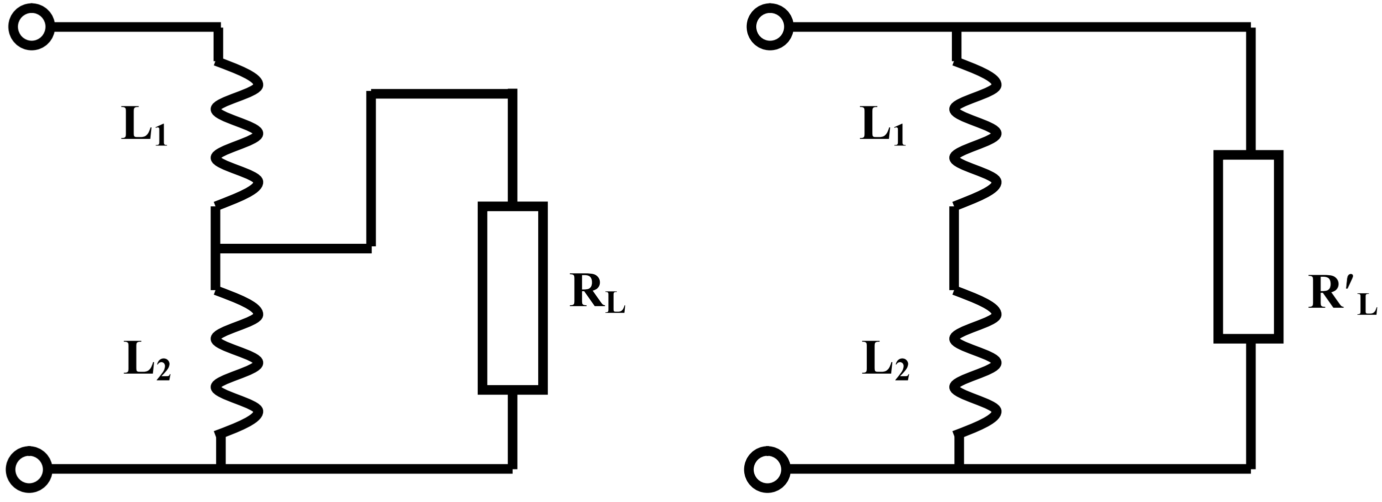
$$p = \frac{V_L}{V_L'} \approx \frac{\dfrac{1}{j\omega C_2}}{\dfrac{1}{j\omega C_1}+\dfrac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$$

$$\boldsymbol{Q = \omega_0 C_2 R_L \gg 1}$$

$$R_L' = \frac{R_L}{p^2}$$

接入系数
近似等于分压系数

电感部分接入



$$R_L >> \omega_0 L_2$$

$$Q = \frac{R_L}{\omega_0 L_2} \gg 1$$

$$\dot{V}_L \approx \frac{j\omega_0 L_2}{j\omega_0 L_1 + j\omega_0 L_2}\dot{V}_L' = \frac{L_2}{L_1 + L_2}\dot{V}_L' = p\dot{V}_L'$$

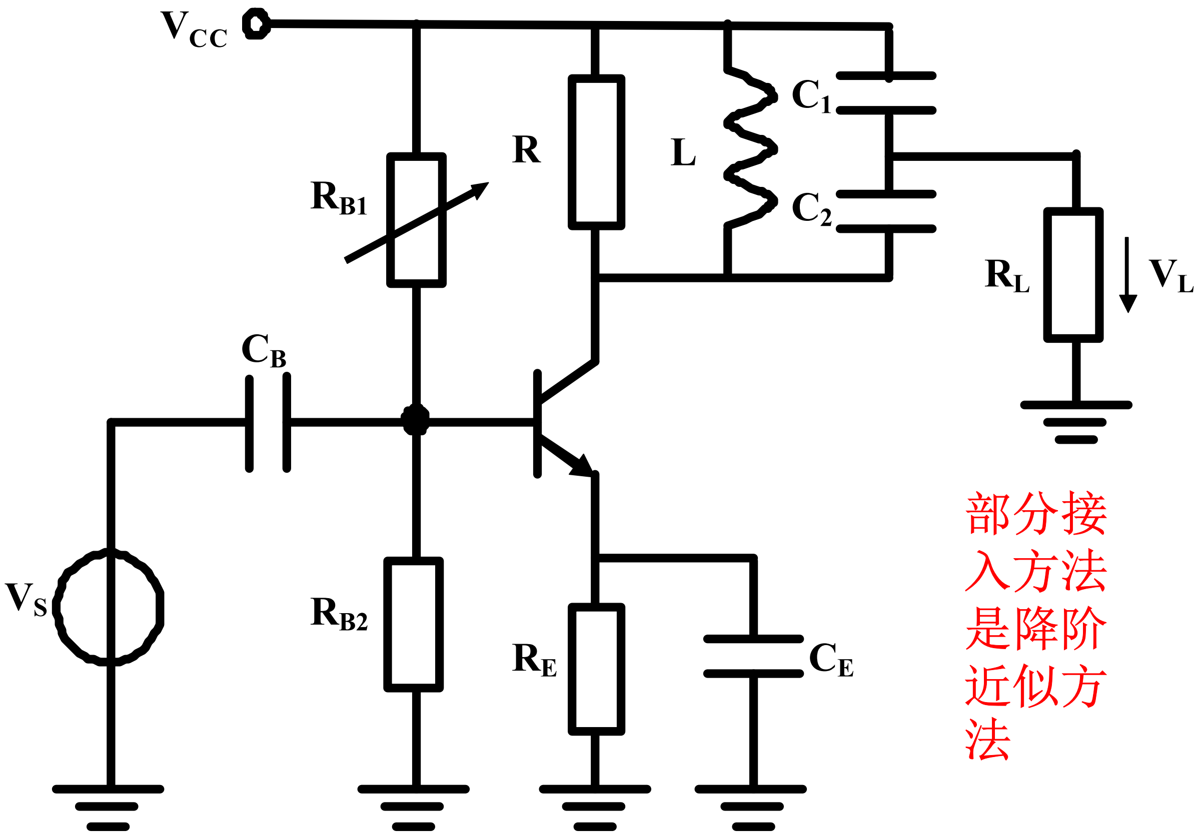
$$\frac{1}{2}\frac{\left|\dot{V}_L\right|^2}{R_L} = \frac{1}{2}\frac{\left|\dot{V}'_L\right|^2}{R'_L} \approx \frac{1}{2}\frac{\left|\dot{V}_L\right|^2}{p^2 R'_L}$$

$$R_L' = \frac{R_L}{p^2}$$

例：晶体管放大器

本周三晚上习题课讨论

偏置电阻R_{B1}可调，使得电压增益为50，R_{B2}=18kΩ，R_E=2kΩ；耦合电容C_B和旁路电容C_E是大电容，在工作频点视为短路；信源内阻很小，被抽象为0；晶体管电流增益β=300，厄利电压V_A=100V，电阻R可调，使得带通3dB带宽大约为200kHz；两个电容均为680pF电容，谐振电感可调，使得带通中心频点为2MHz。负载电阻R_L=1kΩ。



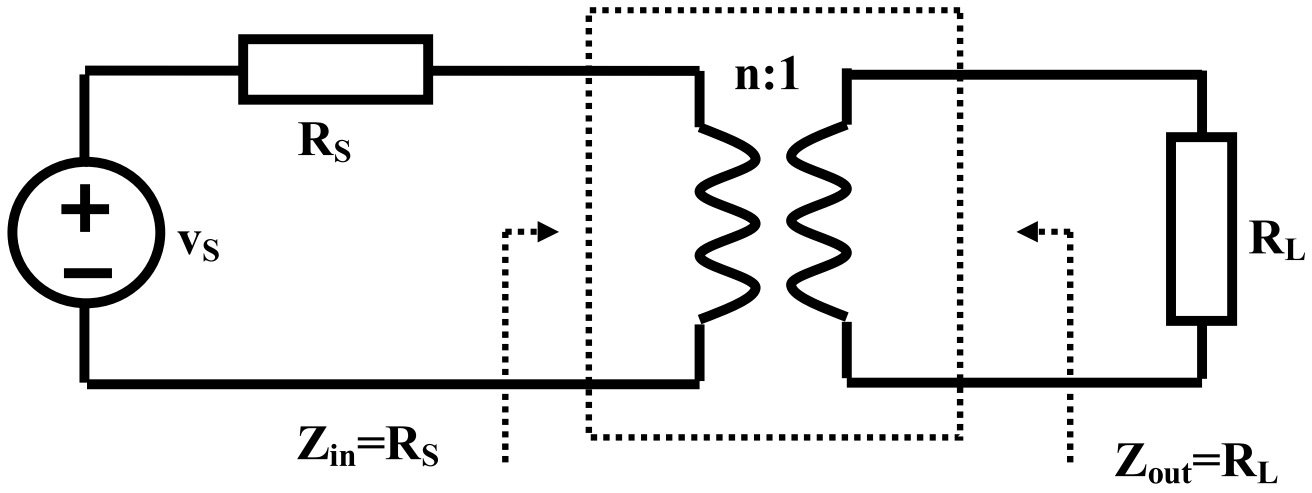
部分接入方法是降阶近似方法

三、变压器阻抗匹配电路

双向无损互易网络

- 通过考察用变压器实现的从R_S=200Ω到R_L=50Ω的阻抗匹配电路，研究变压器的阻抗匹配特性
  - 理想变压器
    - **k=1，L→∞**：视为无穷大电感和零电容的谐振：除了零频外的所有频率点上均可实现最大功率传输匹配：**η(0,+∞)=100%**
  - 全耦合互感变压器
    - **k=1**：视为单电感和零电容的谐振：高频可实现最大功率传输匹配：**η(+∞)=100%**
  - 互感变压器
    - **k<1**：等效为两个独立单端口电感连接，没有谐振，无法最大功率传输匹配：　$\eta_{max}=k^2*100\%<100\%$
  - 通过简单谐振实现匹配
    - **k<1**：由等效电路，在两个端口实现简单谐振匹配：　$\eta(\omega_r)=100\%$
  - 双谐振匹配
    - **k<1**：通过精细设计，在两个端口实现耦合在一起的双谐振，具有宽带平坦匹配特性：　$\eta(\omega_r)=100\%$

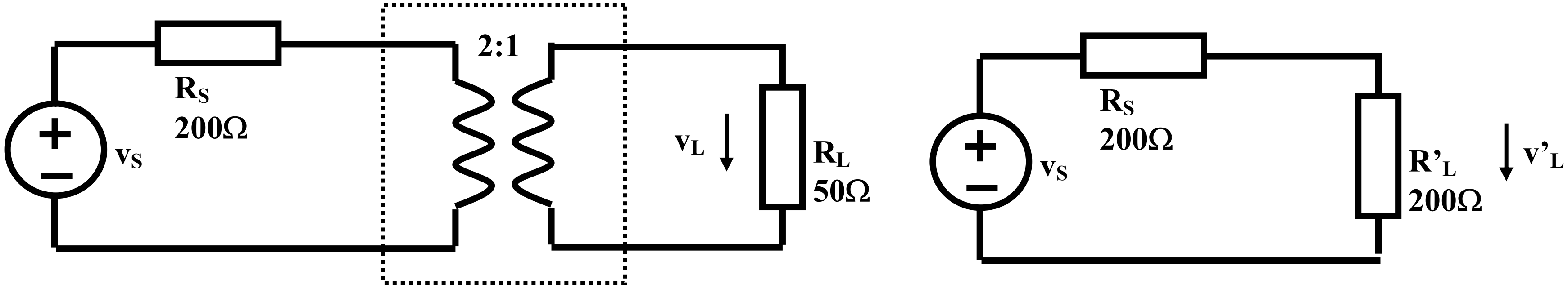
理想变压器



$$n=\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}=\sqrt{\frac{200}{50}}=2$$

除了直流频点之外，任意频点均可实现阻抗匹配：最大功率匹配传输

理想变压器传递函数



理想变压器抽象不包括零频点

$$H=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S}=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L'\cdot\frac{1}{n}}{\dot{V}_S}=2\frac{\dot{V}_L'}{\dot{V}_S}$$

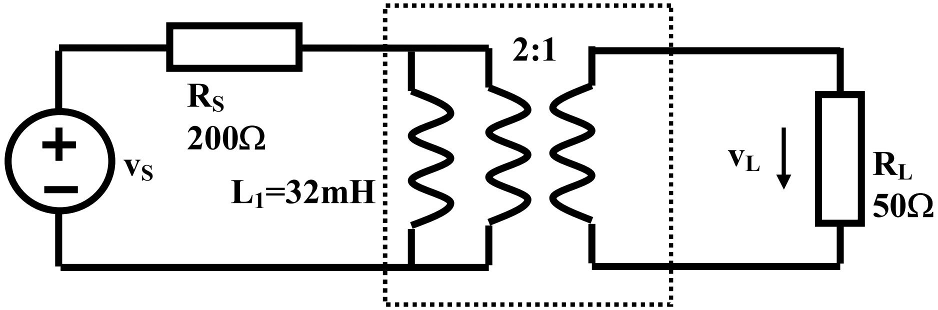
$$=2\frac{R_L'}{R_S+R_L'}=2\frac{n^2R_L}{R_S+n^2R_L}=2\frac{200}{200+200}=1$$

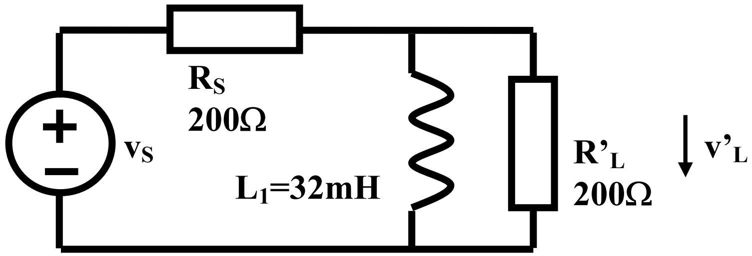
$$\eta=|H|^2=\frac{P_L}{P_{S,\max}}=1=100\%$$

全耦合变压器

$k = 1$

$$L_1 = 32mH$$
$$L_2 = 8mH$$
$$M = 16mH$$





$$\tau = L_1\left(G_S + G_L'\right) = 2L_1G_S$$
$$= 2\times 32mH \times \frac{1}{200\Omega} = 0.32ms$$

$$H = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L'\cdot\frac{1}{n}}{\dot{V}_S} = 2\frac{\dot{V}_L'}{\dot{V}_S}$$

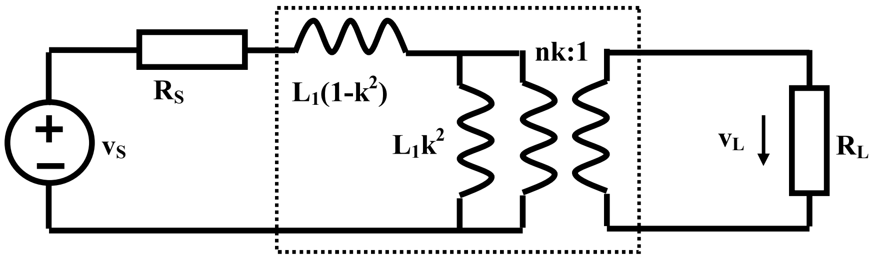
$$= 2\frac{R_L' \parallel j\omega L_1}{R_S + R_L' \parallel j\omega L_1} = 2\frac{j\omega L_1 G_S}{1 + j\omega L_1\left(G_S + G_L'\right)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{s\tau}{1 + s\tau} = \frac{s}{s + \omega_0}$$

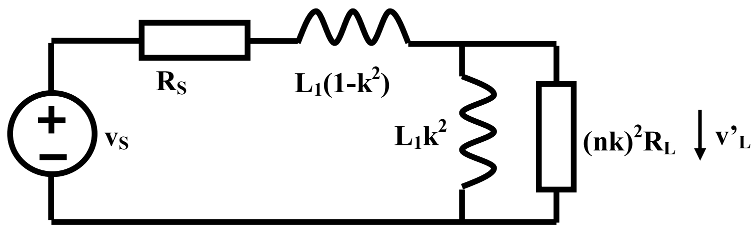
$$\tau = 2G_S L_1 \qquad f_{3dB} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} = 497Hz$$

具有一阶高通滤波特性：在高频实现了阻抗匹配

互感变压器

$$k<1 \qquad L_1 = 32mH \qquad L_2 = 8mH \qquad M = k \times 16mH$$





$$H = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}'_L \cdot \frac{1}{nk}}{\dot{V}_S} = 2\frac{1}{k}\frac{\dot{V}'_L}{\dot{V}_S}$$

$$= \frac{2}{k}\frac{(nk)^2 R_L \parallel j\omega L_1 k^2}{R_S + j\omega L_1\left(1-k^2\right) + (nk)^2 R_L \parallel j\omega L_1 k^2} = \frac{2}{k}\frac{k^2\frac{sL_1 R_S}{sL_1 + R_S}}{R_S + sL_1\left(1-k^2\right) + k^2\frac{sL_1 R_S}{sL_1 + R_S}}$$

$$= \frac{2ksL_1R_S}{\left(R_S + sL_1\left(1-k^2\right)\right)\left(sL_1 + R_S\right) + k^2 sL_1 R_S} = \frac{2ksL_1R_S}{s^2L_1^2\left(1-k^2\right) + 2sL_1R_S + R_S^2}$$

$$= k\frac{2\frac{R_S}{L_1\left(1-k^2\right)}s}{s^2 + 2\frac{R_S}{L_1\left(1-k^2\right)}s + \frac{R_S^2}{L_1^2\left(1-k^2\right)}} = k\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{R_S}{L_1\sqrt{1-k^2}}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} > 1$$

典型的二阶带通滤波特性

互感变压器：带通滤波特性

$$H = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S} = k\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \omega_0 = \frac{R_S}{L_1\sqrt{1-k^2}} \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} > 1$$

过阻尼情况下的二阶带通滤波器

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi G_S L_1\sqrt{1-k^2}} = \frac{995}{\sqrt{1-k^2}}Hz \qquad \eta = \frac{P_L}{P_{S,\max}} = \left|H(j\omega_0)\right|^2 = k^2 \times 100\%$$

$$BW_{3dB} = \frac{f_0}{Q} = 2\xi f_0 = \frac{2}{2\pi G_S L_1\left(1-k^2\right)} = \frac{1989}{1-k^2}Hz$$

k=0.95

$$f_0 = \frac{995}{\sqrt{1-k^2}}Hz = 3.19kHz \qquad BW_{3dB} = \frac{1989}{1-k^2}Hz = 20.4kHz \qquad \eta_{\max} = k^2 = 90.25\% = -0.45dB$$

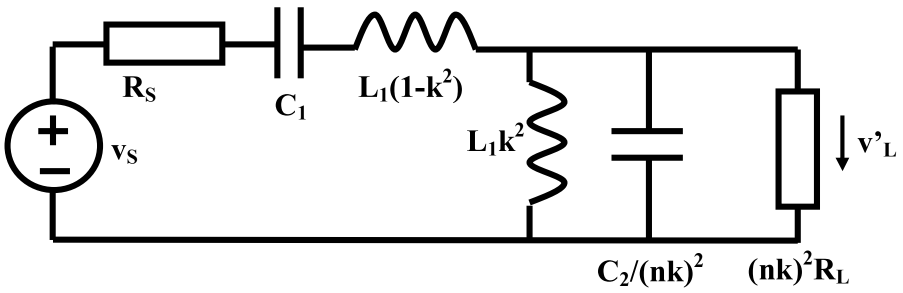
k=0.50

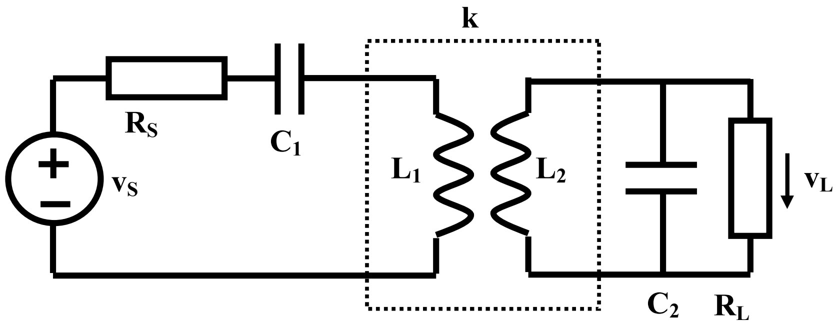
$$f_0 = \frac{995}{\sqrt{1-k^2}}Hz = 1.15kHz \qquad BW_{3dB} = \frac{1989}{1-k^2}Hz = 2.65kHz \qquad \eta_{\max} = k^2 = 25\% = -6dB$$

只有谐振才能最大功率传输

- 互感变压器
  - 有两个等效电感，没有谐振电容，无法最大功率传输匹配
- 全耦合变压器
  - 一个等效电感，可视为存在一个并联谐振零电容，故而谐振频率为无穷（高通）
- 理想变压器
  - 可视为无穷大电感和零电容的并联谐振，谐振频率无穷，带宽无穷：除了零频外，所有频点都可匹配

互感变压器，通过简单谐振实现匹配





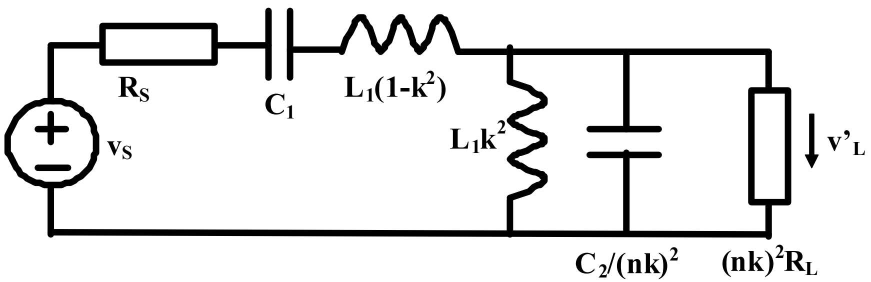
电容C_1和漏磁电感$L_1(1-k^2)$串联谐振于选定频点ω_r，该频点上串联LC相当于短路

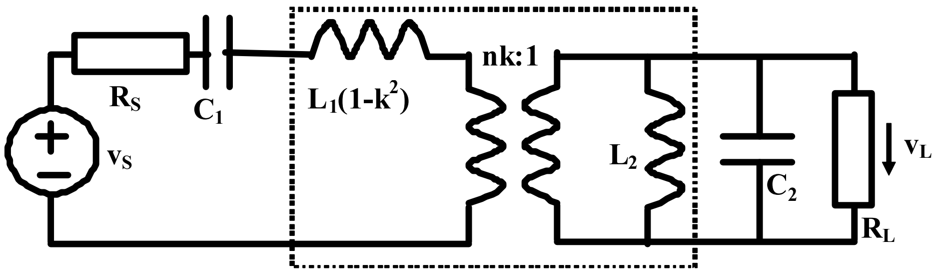
端口2并接C_2电容和励磁电感L_2并联谐振于同一个选定频点ω_r，该频点上并联LC相当于开路

在ω_r频点上，$(nk)^2R_L$的等效负载电阻和信源内阻R_S直连，只要两者相等，则可在该频点上实现最大功率传输匹配

$$R_S = (nk)^2 R_L \qquad n = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{R_S}{R_L}} \overset{k=0.5}{=} \frac{1}{0.5}\sqrt{\frac{200}{50}} = 4$$

k=0.5时的简单匹配电路





$$n=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\overset{k=0.5}{=}\frac{1}{0.5}\sqrt{\frac{200}{50}}=4$$

$$L_1=32mH, L_2=\frac{1}{n^2}L_1=2mH$$

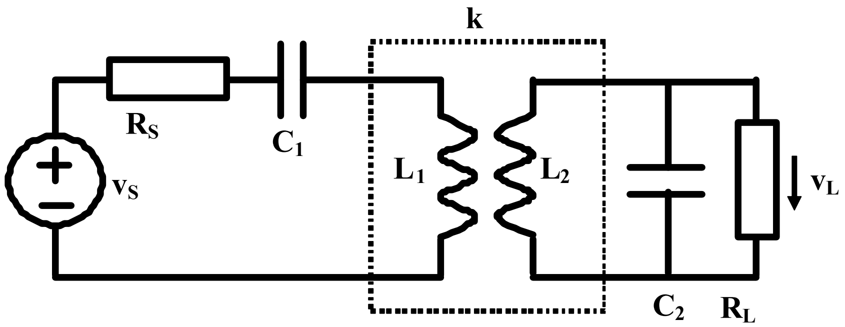
$$M=k\sqrt{L_1L_2}=4mH$$

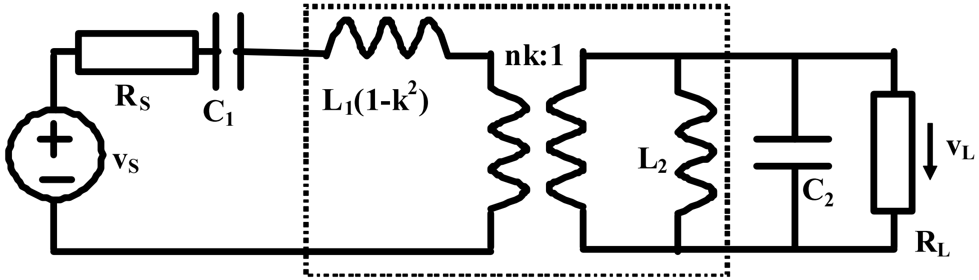
f_r=1kHz

$$C_1=\frac{1}{(2\pi f_r)^2L_1(1-k^2)}=\frac{1}{(2\pi\times 1000)^2\times 32\times 10^{-3}\times(1-0.5^2)}=1.06\mu F$$

$$C_2=\frac{1}{(2\pi f_r)^2L_2}=\frac{1}{(2\pi\times 1000)^2\times 2\times 10^{-3}}=12.7\mu F$$

传递函数





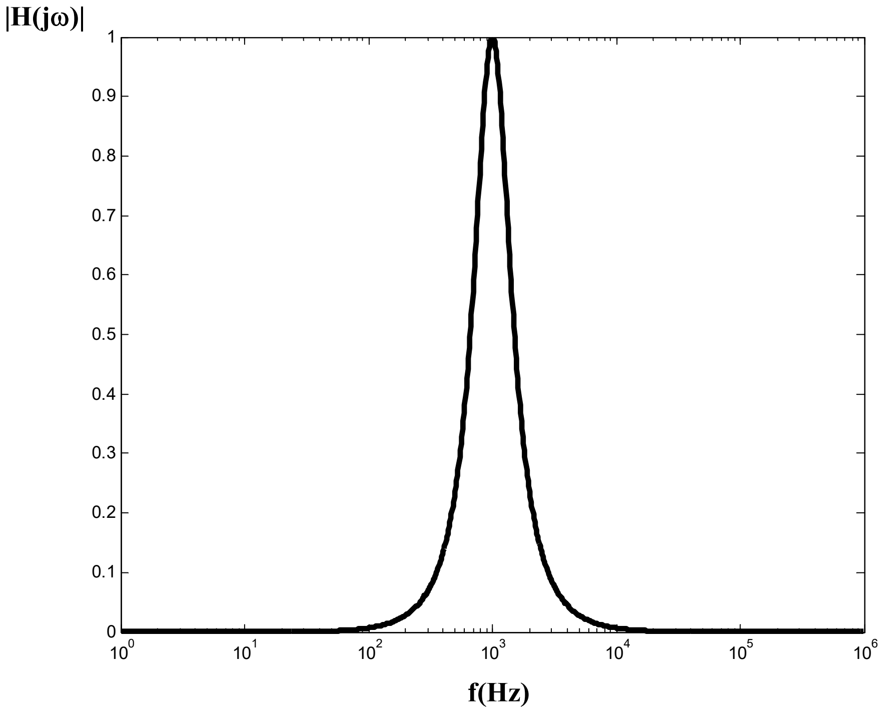
$$\mathbf{ABCD}=\begin{bmatrix}1 & R_S+\dfrac{1}{sC_1}+sL_1\left(1-k^2\right)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}nk & 0\\ 0 & \dfrac{1}{nk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{R_L}+sC_2+\dfrac{1}{sL_2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

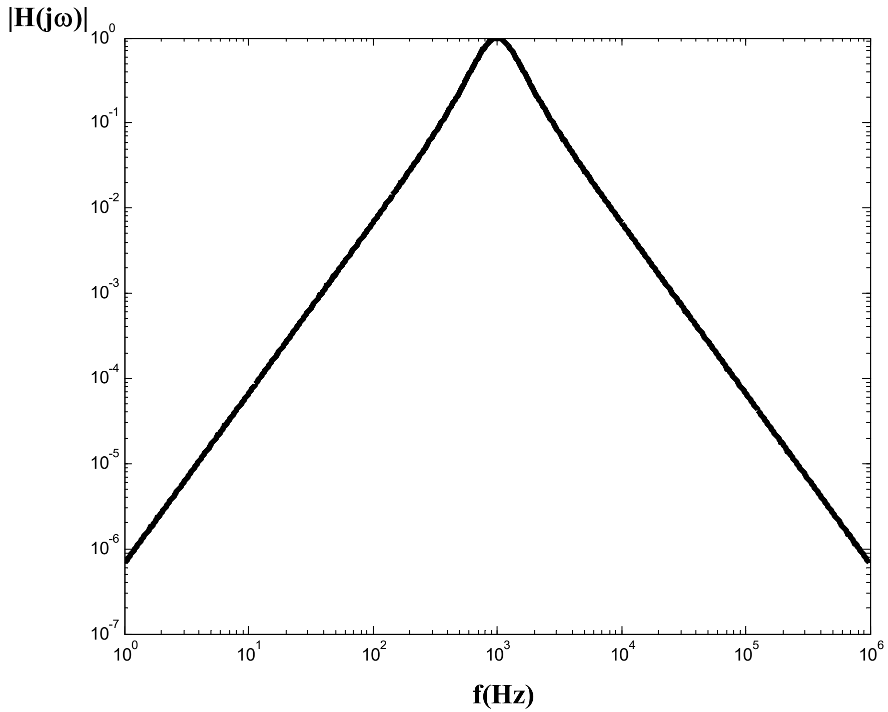
$$H=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S}=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{1}{A}$$

四阶系统，这里不讨论其传函形式

Matlab数值计算代码见讲义

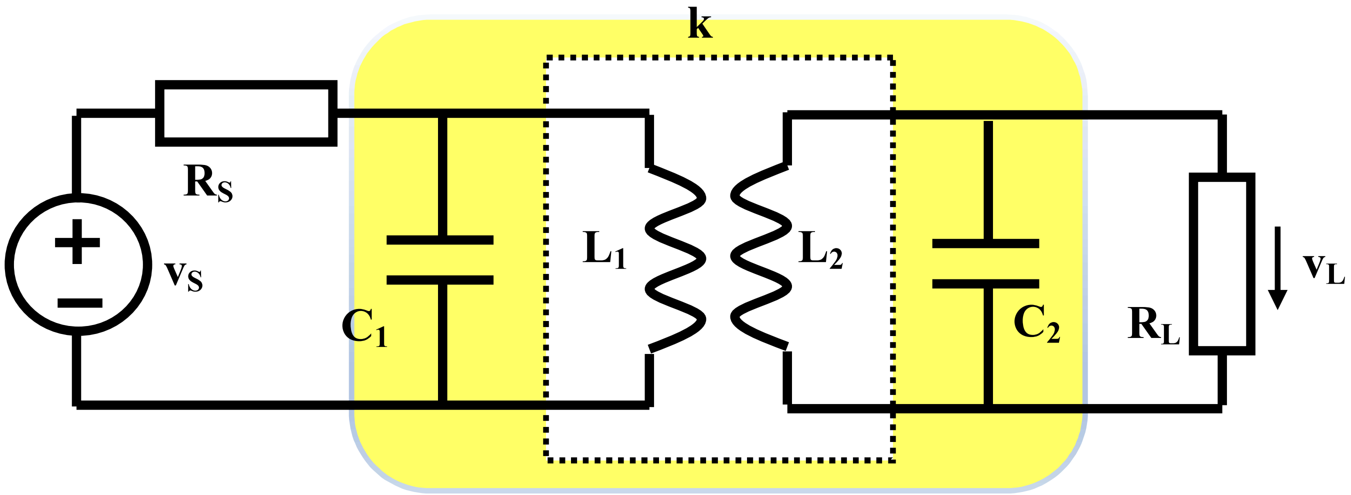
幅频特性：带通型匹配网络





双谐振精致设计

不是独立电感的简单谐振，而是耦合电感的复杂双谐振（耦合在一起的双谐振）利用对特征阻抗的研究，获得设计公式



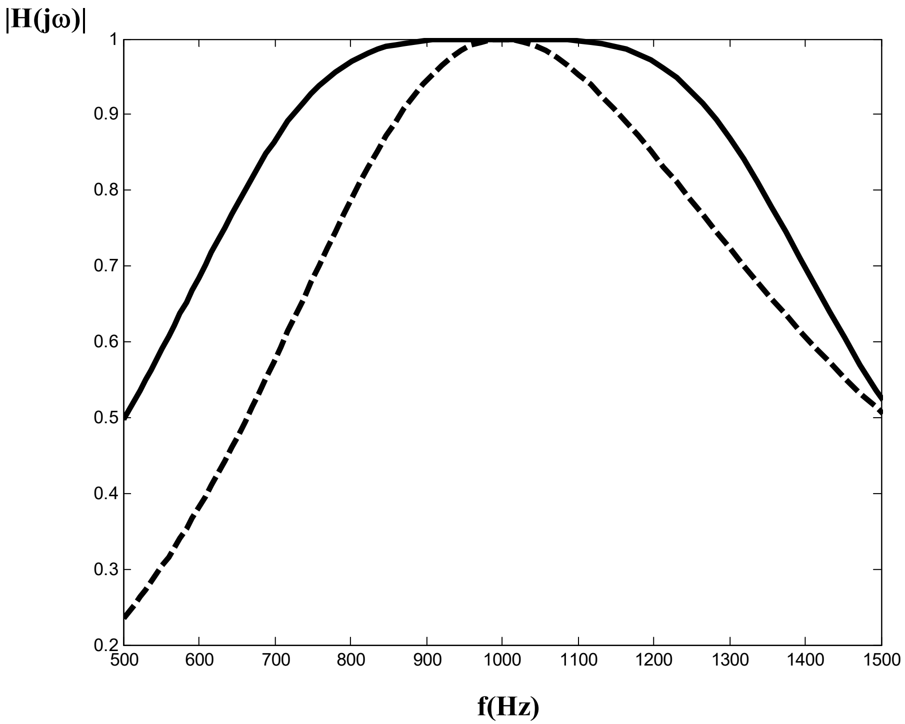
$R_S=200\Omega, R_L=50\Omega, k=0.5$, $n=2=\mathrm{sqrt}(R_S/R_L)$

$L_1=20.44mH$， $L_2=L_1/n^2=5.11mH$， $M=k*\mathrm{sqrt}(L_1*L_2)=5.11mH$

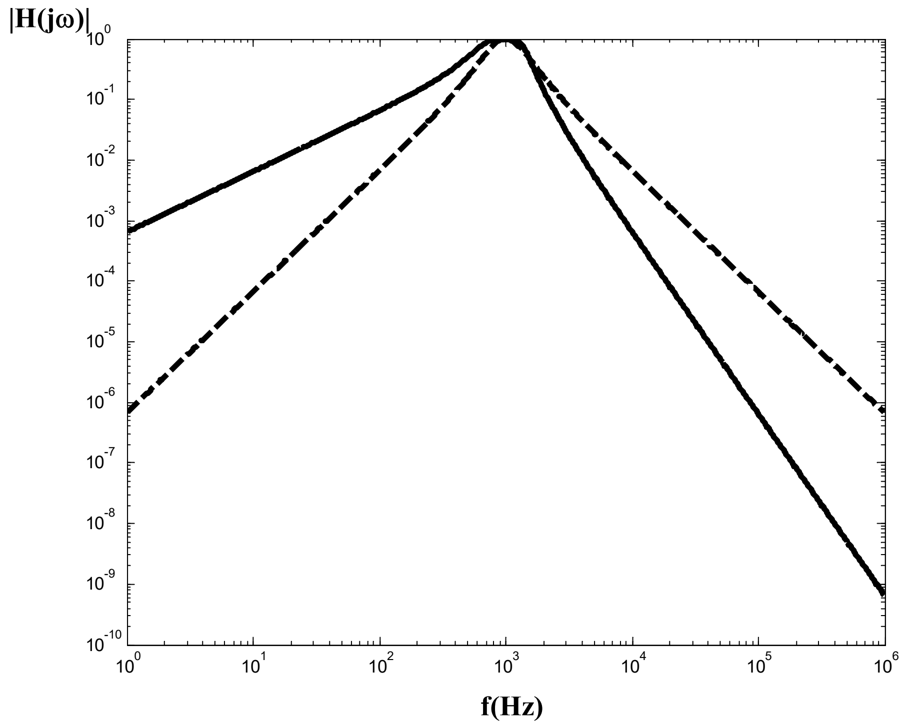
$C_1=1.43\mu F$， $C_2=5.72\mu F$

设计原理和公式自看教材，不要求
这里直接给出代入公式后给出的数值结论

通带平坦特性

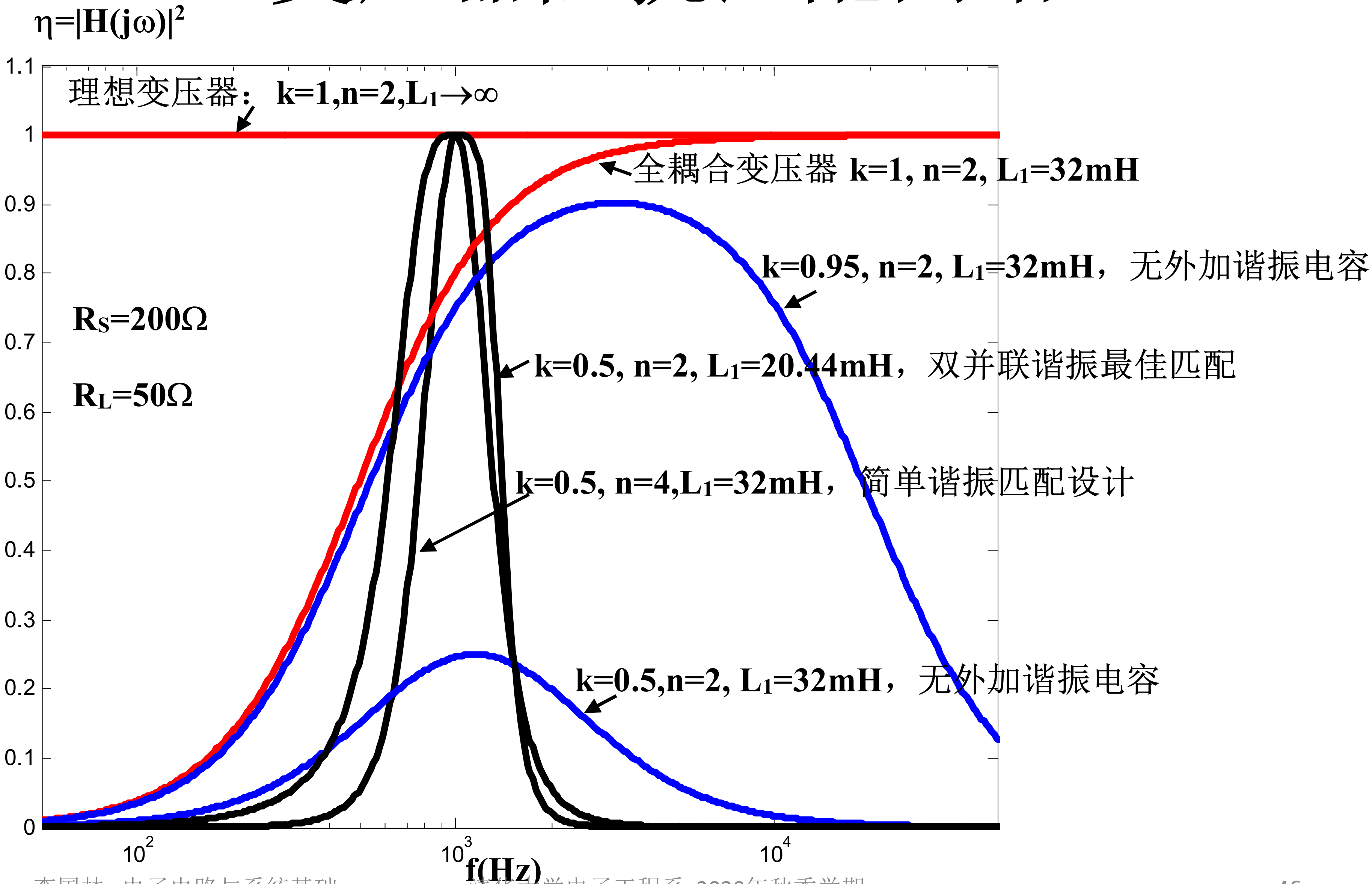


|H(jω)|
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
f(Hz)



|H(jω)|
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
f(Hz)

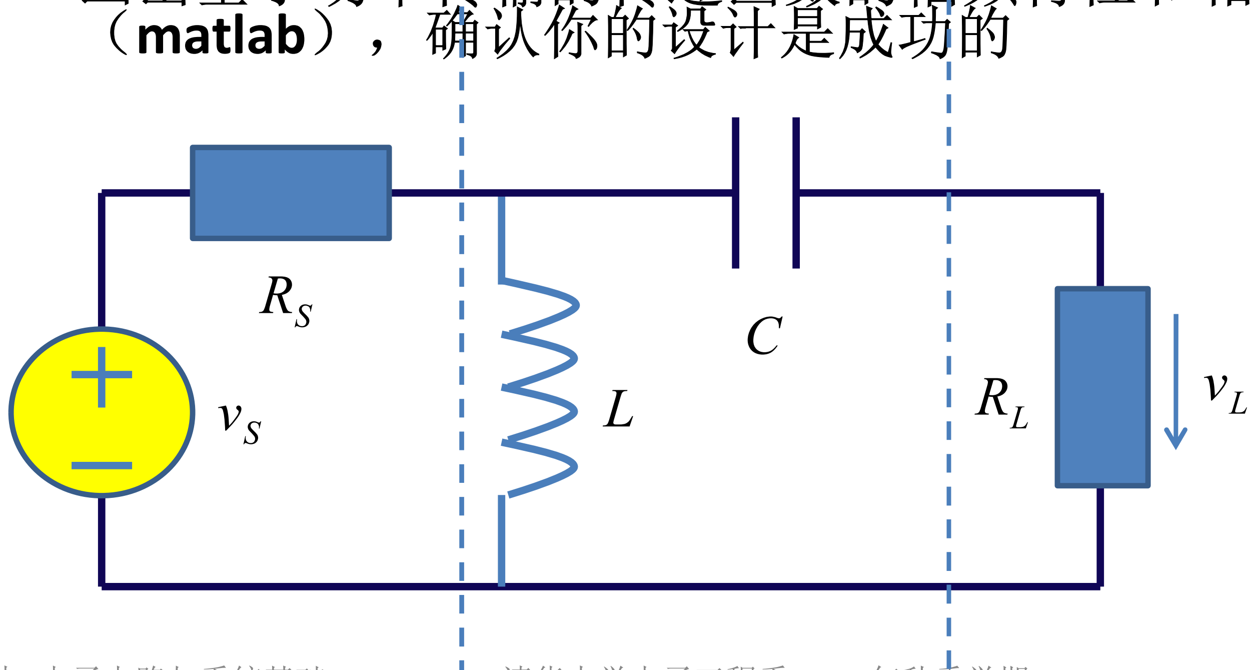
变压器阻抗匹配网络



η=|H(jω)|²
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
理想变压器：k=1,n=2,L1→∞
全耦合变压器 k=1, n=2, L1=32mH
k=0.95, n=2, L1=32mH，无外加谐振电容
RS=200Ω
RL=50Ω
k=0.5, n=2, L1=20.44mH，双并联谐振最佳匹配
k=0.5, n=4,L1=32mH，简单谐振匹配设计
k=0.5,n=2, L1=32mH，无外加谐振电容
10^2
10^3
10^4
f(Hz)

作业1 LC高通型匹配网络

- 推导传递函数，如果希望在**10MHz**频点上实现最大功率传输：负载获得信源的额定输出功率，实现**200Ω**和**50Ω**阻抗之间的匹配
  - 电感**L**、电容**C**如何取值？（共轭匹配角度/直接套用公式/其他方法）
  - 画出基于功率传输的传递函数的幅频特性和相频特性（**matlab**），确认你的设计是成功的

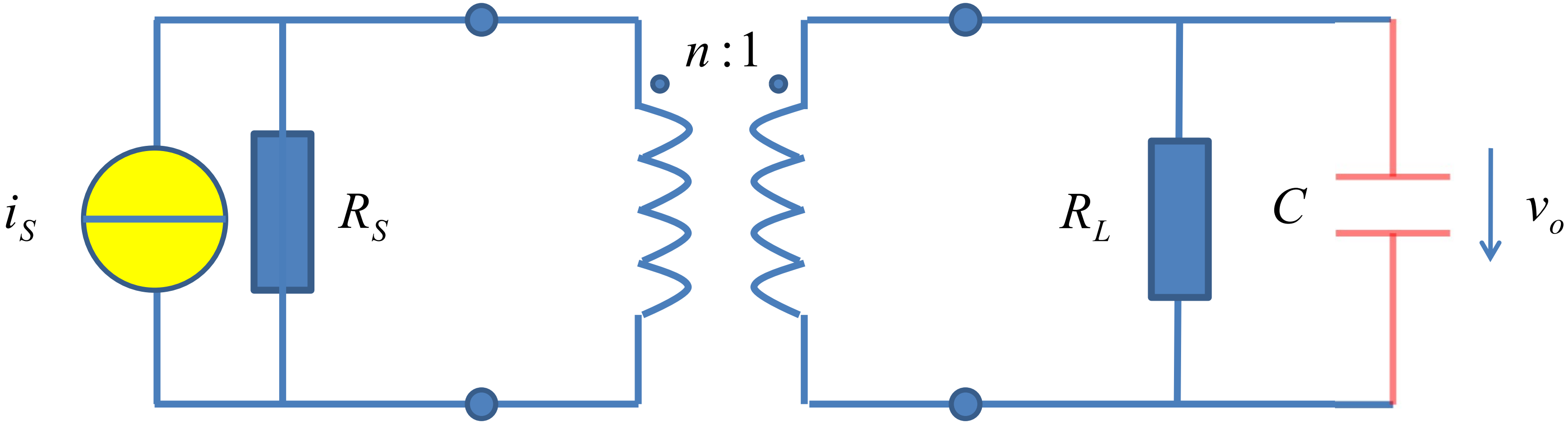


作业2、3 阻抗变换网络设计

- **2**、请设计一个阻抗变换网络，在频点**10MHz**上，将阻抗**100+j100Ω**变换为**1000-j100Ω**。

- **3**、用部分接入方法，用**0.5**的电容接入系数将负载电阻**1kΩ**变换为**4kΩ**便于和信源内阻相匹配，要求中心频点为**2MHz**，**3dB**带宽为**200kHz**，请设计该无损**LC**并联谐振匹配网络

作业4 理想变压？

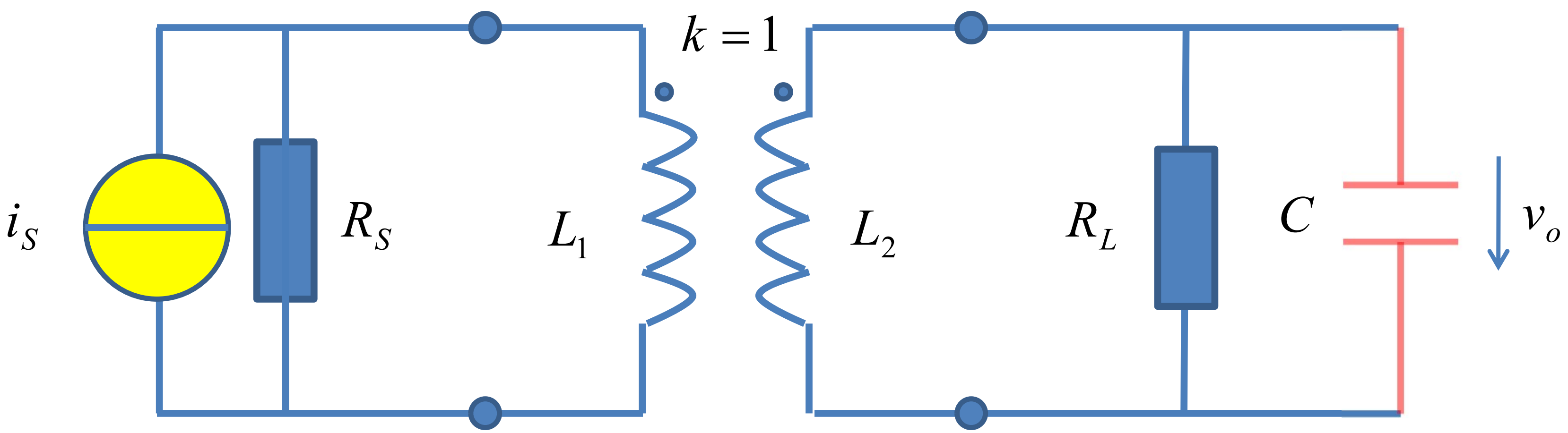


a、已知R_S=50Ω，R_L=200 Ω，若希望实现最大功率传输匹配，理想变压器变压比为多少？

b、负载端存在寄生电容效应，由于寄生电容C=200pF的影响，当输入电流为阶跃电流$I_S U(t)$时，I_S=1mA，负载电压变化情况如何？

c、（选作）如果耦合采用的全耦合互感变压器，输入是1kHz的方波信号，那么电感L_1，L_2至少取多大值时，该互感变压器可近似被视为理想变压器？

作业5 带通选频

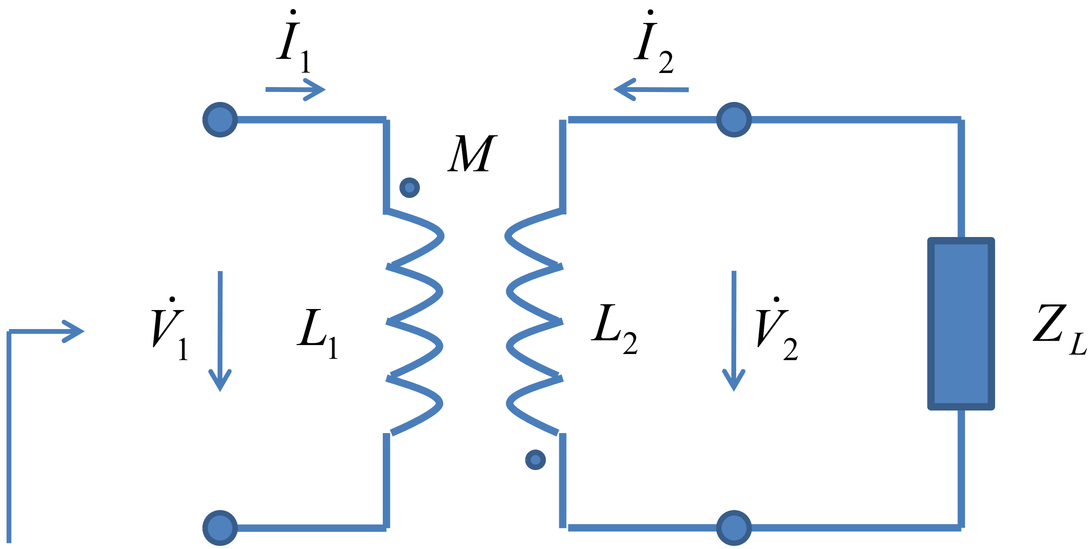


- 已知R_S=1kΩ，R_L=50Ω，现希望在1MHz频点上实现10kHz带宽的最大功率传输匹配
- 采用全耦合互感变压器，请设计全耦合变压器参数，并给出谐振电容的取值大小
  - L_1，L_2，C=?
  - 请画出有谐振电容C和无谐振电容C时的传递函数幅频特性
- （选作）如果选用的全耦合互感变压器不理想，其耦合系数只有0.90，请画出有谐振电容C和无谐振电容C时的传递函数幅频特性

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_o}{\dot{I}_S}$$

作业6 阻抗变换

- 在相量域（频域）分析互感变压器的阻抗变换关系

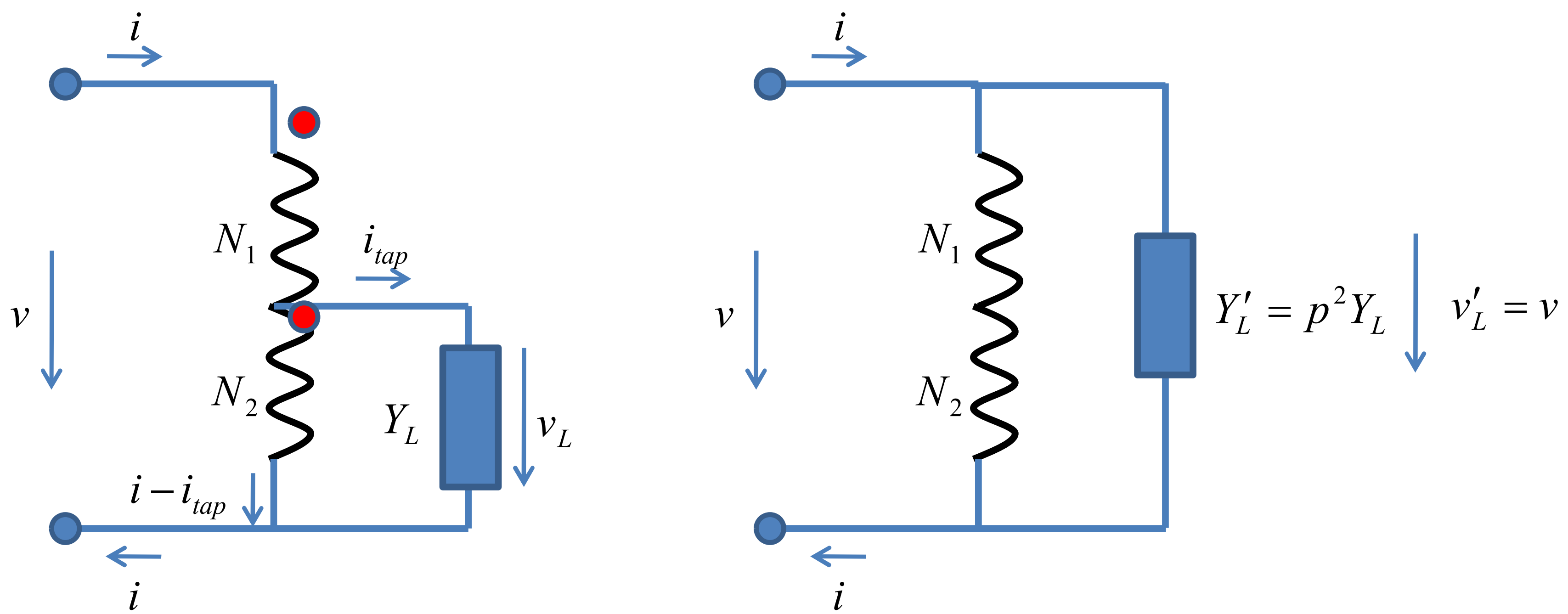


$$Z_{in}=\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}=j\omega L_1+\ldots.$$

阻抗变换能力和同名端有无关系？

作业7 全耦合变压器的部分接入

证明：全耦合变压器部分接入公式无需近似，给出部分接入系数



部分接入方法是降阶近似方法

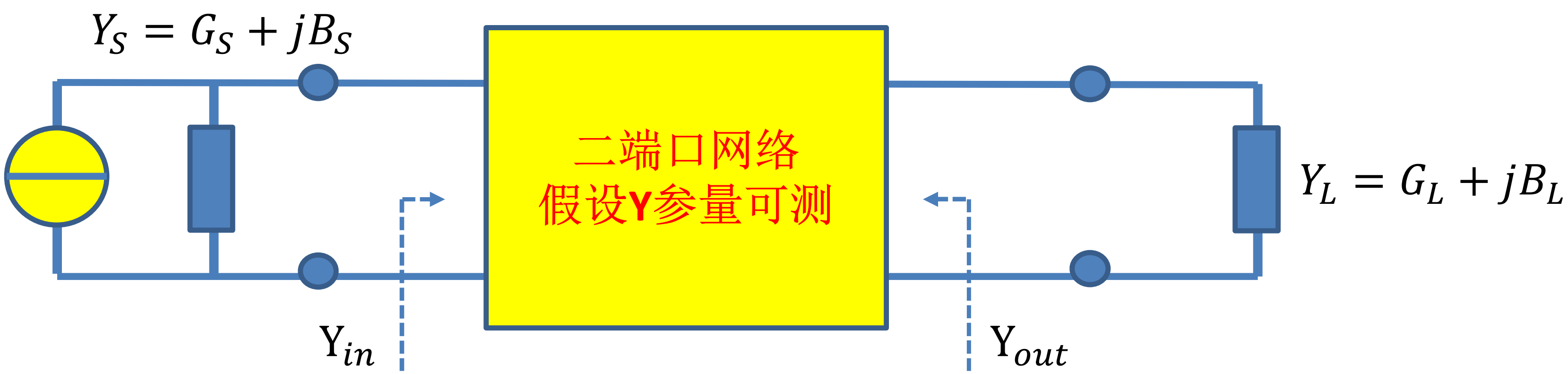
但全耦合变压器情况则未降阶，不是近似方法，是完全的等效电路

作业8 匹配带宽（选作）

- 设计一个在**10MHz**频点上最大功率传输的**50Ω**到**200Ω**的匹配网络。
  - （**1**）设计一个低通型的**L**型匹配网络，通过数值计算获得幅频特性曲线，在曲线上确认**1dB**匹配带宽；
  - （**2**）先设计一个可将**50Ω**变换为**100Ω**的低通型**L**型匹配网络，再设计一个可将**100Ω**变换为**200Ω**的高通型**L**型匹配网络，将这两个匹配网络级联，用数值方法考察总网络传递函数确认匹配网络设计成功。通过幅频特性曲线，确认**1dB**匹配带宽，和低通**L**型匹配网络比，带宽是变宽了还是变窄了？
  - （**3**）设计一个可将**50Ω**变换为**1kΩ**的低通型**L**型匹配网络，再设计一个可将**1kΩ**变换为**200Ω**的高通型**L**型匹配网络，将这两个匹配网络级联，用数值方法考察总网络传递函数确认匹配网络设计成功。通过幅频特性曲线确认**1dB**匹配带宽，和低通**L**型匹配网络比，带宽是变宽了还是变窄了？
  - （**4**）通过上述问题的解决，分析是什么因素决定了匹配网络的带宽？

CAD仿真（选作）
二端口网络最大功率传输匹配

双端同时共轭匹配，则可获得最大功率增益



$$Y_S^* = Y_{in}(Y, Y_L)$$

$$Y_L^* = Y_{out}(Y, Y_S)$$

$$k = \frac{2ReY_{11}ReY_{22} - Re(Y_{12}Y_{21})}{|Y_{12}Y_{21}|} > 1$$

罗莱特稳定性系数

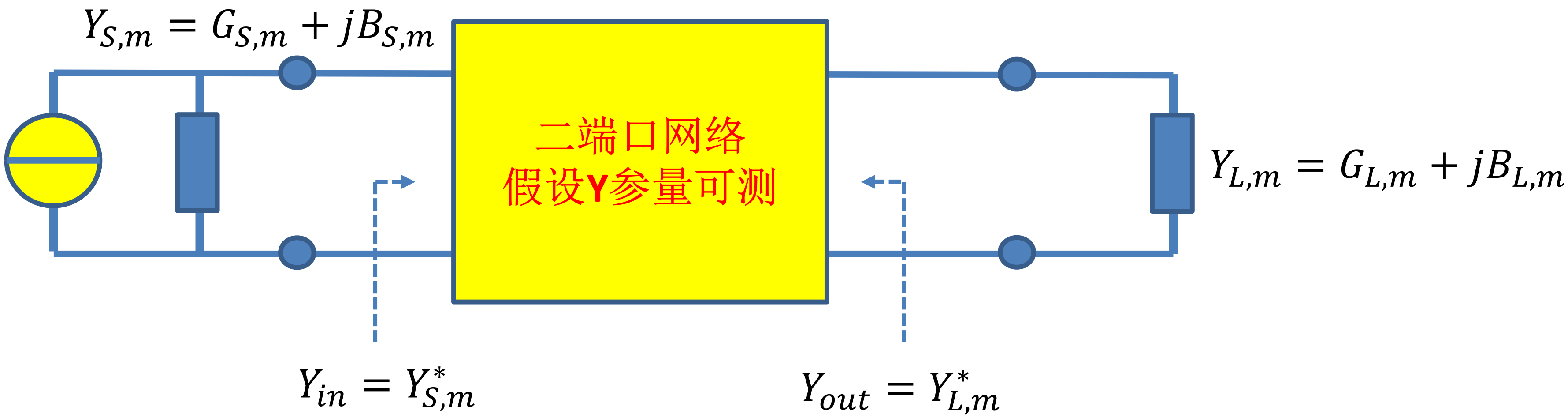
$$Y_{S,m} = \frac{|Y_{12}Y_{21}|}{2ReY_{22}}\sqrt{k^2-1} + j\left(\frac{Im(Y_{12}Y_{21})}{2ReY_{22}} - ImY_{11}\right)$$

$$Y_{L,m} = \frac{|Y_{12}Y_{21}|}{2ReY_{11}}\sqrt{k^2-1} + j\left(\frac{Im(Y_{12}Y_{21})}{2ReY_{11}} - ImY_{22}\right)$$

双端共轭匹配阻抗

最大功率增益

假设罗莱特稳定性系数大于**1**，则存在双共轭匹配阻抗，则可获得最大功率增益



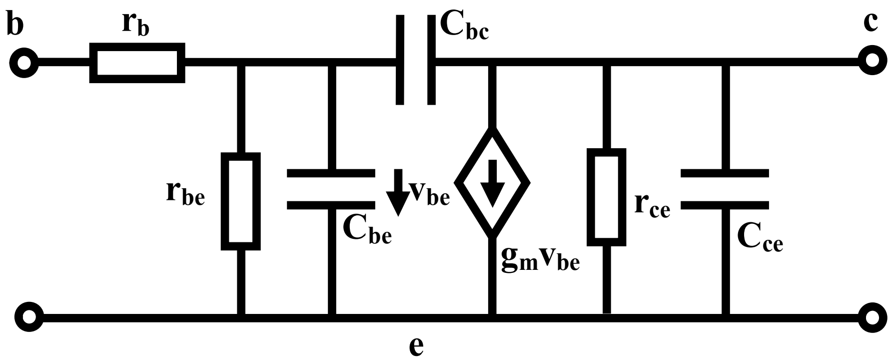
$$G_{p,max}=MAG=\left|\frac{Y_{21}}{Y_{12}}\right|\left(k-\sqrt{k^2-1}\right)$$

$$G_T=\frac{P_L}{P_{S,max}}=\frac{\frac{1}{2}\left|\dot{V}_L\right|^2 G_L}{\frac{1}{8}\frac{\left|\dot{I}_S\right|^2}{G_S}}$$

上述结论凭兴趣可自行推导，但不做任何要求

某BJT晶体管高频电路模型

$r_b = 300\Omega$ $C_{bc} = 5.6fF$



$C_{be} = 0.4pF$ $C_{ce} = 10.5fF$

$r_{be} = 2.6k\Omega$ $g_m = 38mS$ $r_{ce} = 20k\Omega$

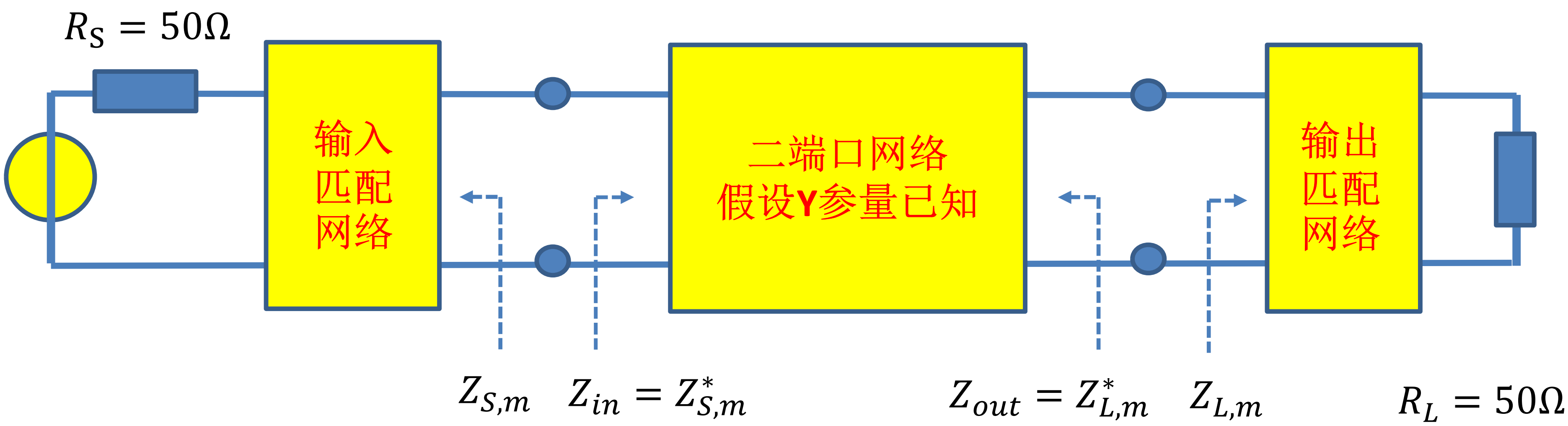
选作：

1/分析（仿真获取）该电路在**10MHz**频点上的**Y**参量

2/进而（**matlab**编程）获得双共轭匹配导纳/阻抗

$$Z_{S,m} = 1/Y_{S,m} \qquad Z_{L,m} = 1/Y_{L,m}$$

设计两个匹配网络



3/设计两个匹配网络
4/仿真确认**10MHz**频点上的功率增益确实是**MAG**（符合理论计算）

$$G_{p,max} = MAG = \left|\frac{Y_{21}}{Y_{12}}\right|\left(k - \sqrt{k^2 - 1}\right)$$

有兴趣可以从单频点拓展到全频带，考察最大功率增益情况（考察非绝对稳定区是否形成正弦振荡），见附录**16**和**10.4**节
或者从库中找一个晶体管，测量其**Y**参量，设计其最大功率增益匹配网络