电子电路与系统基础II

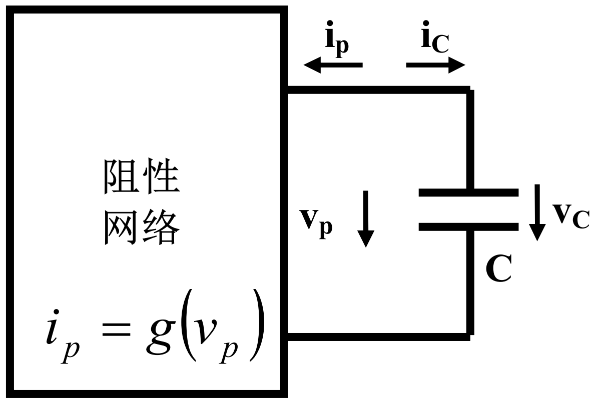
理论课第4讲　一阶线性时不变动态电路时域分析

李国林
清华大学电子工程系

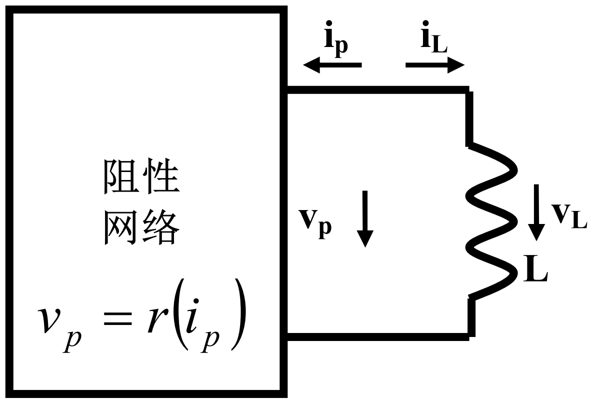
一阶RC电路时域分析　大纲

- 本节课内容以一阶RC电路为例，RL作为其对偶电路，以作业题形式出现，要求同学同样掌握
- 一阶RC电路：电容C+电阻网络
  - 线性电阻网络
    - 电阻网络为线性电阻
      - 零输入响应
    - 电阻网络为戴维南源
      - 直流源：零状态响应
      - 全响应=零输入响应+零状态响应=瞬态响应+稳态响应
    - 三要素法
  - 非线性电阻网络
- 不同激励源下的三要素法应用例
  - 直流、正弦波、方波

一、一阶电路状态方程



一阶RC电路



一阶RL电路

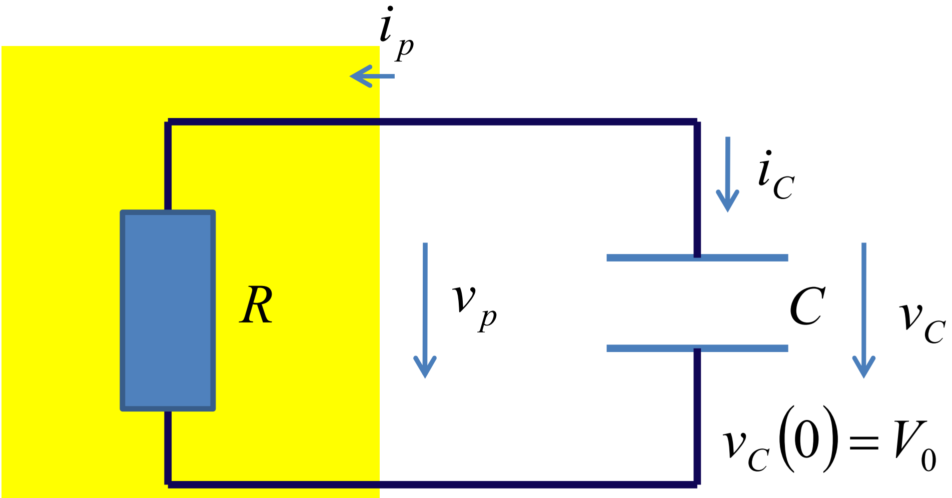
$$C\frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_p = -g(v_p) = -g(v_C)$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L = v_p = r(i_p) = r(-i_L)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C}g(v_C(t))$$

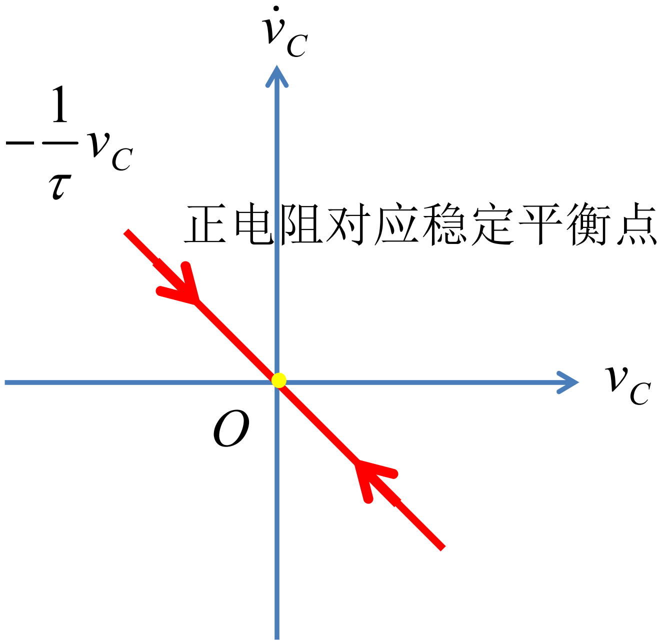
$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L}r(-i_L(t))$$

1.1 电阻网络为线性电阻



$$i_p=\frac{1}{R}v_p=g(v_p)$$

$$\dot{v}_C=-\frac{1}{\tau}v_C$$



所谓稳定平衡点

$t\rightarrow\infty$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{C}g(v_C(t))=-\frac{1}{C}\frac{v_C(t)}{R}=-\frac{1}{RC}v_C(t)=-\frac{1}{\tau}v_C(t)$$

$v_C(t)\rightarrow 0$

$\frac{dv_C(t)}{dt}\rightarrow 0$

时间常数 $\tau=RC$

状态方程的解析解：时域积分法

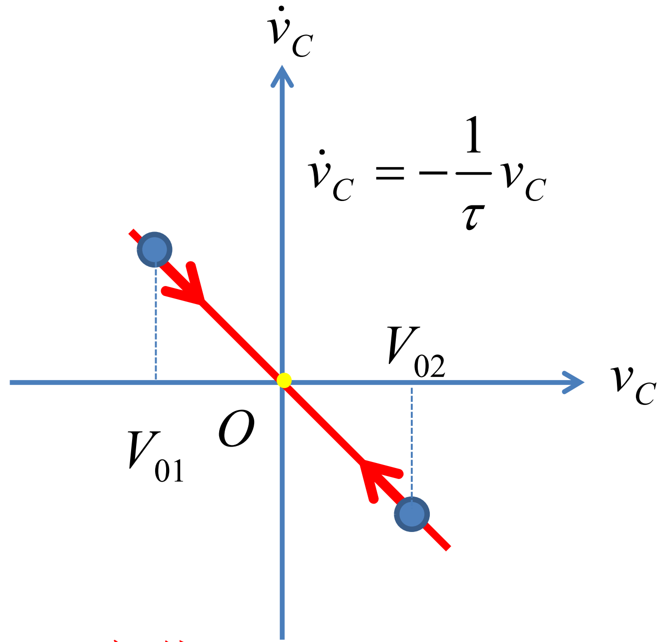
$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{\tau}v_C(t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_C(t)=0$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}\cdot e^{\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}v_C(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}=0$$

$$\frac{d\left(v_C(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}\right)}{dt}=0$$

$$v_C(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}=C_{\text{onstant}}$$

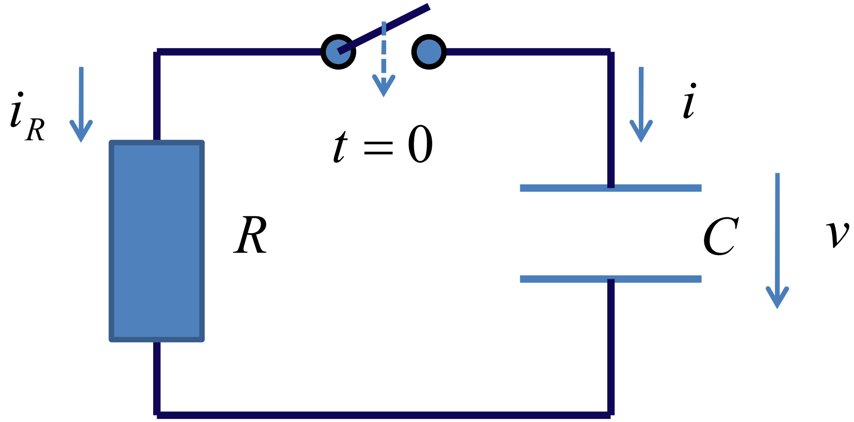


$$C_{\text{onstant}}=v_C(0)\cdot 1=V_0$$ 初值

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\ge 0)$$

电容电压（状态）从初始电压**V_0**（初始状态）转移到当前时刻**t**的状态**$v_C(t)$**，是以指数衰减规律转移的

电容放电过程



$t<0$ 开关断开

Q_0 电容上有初始电荷和初始电压

$$V_0=\frac{Q_0}{C}$$

$$v(t)=V_0$$

$t=0$ 开关闭合

$$v(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电容有放电通路，开始放电 $t\ge 0$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{C}{\tau}V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{v(t)}{R}=-i_R \qquad t\ge 0$$

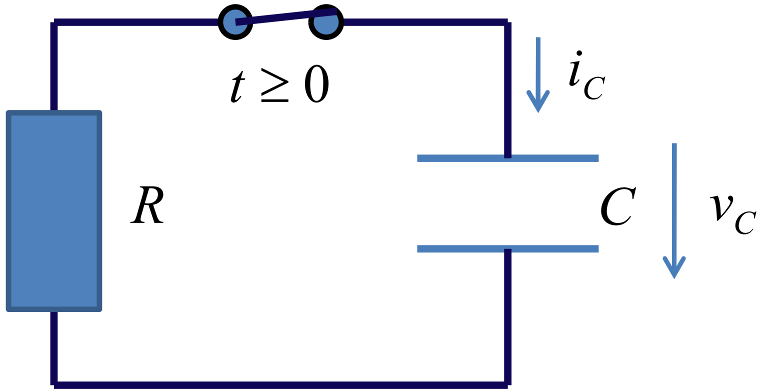
$$Q(t)=Cv(t)=CV_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}=Q_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t\ge 0$ 电荷以指数衰减规律释放

$$i_C+i_R=0$$

这个表达式验证**KCL**的同时，说明电容放电通路是电阻**R**形成的，电容通过电阻形成的闭合回路放电

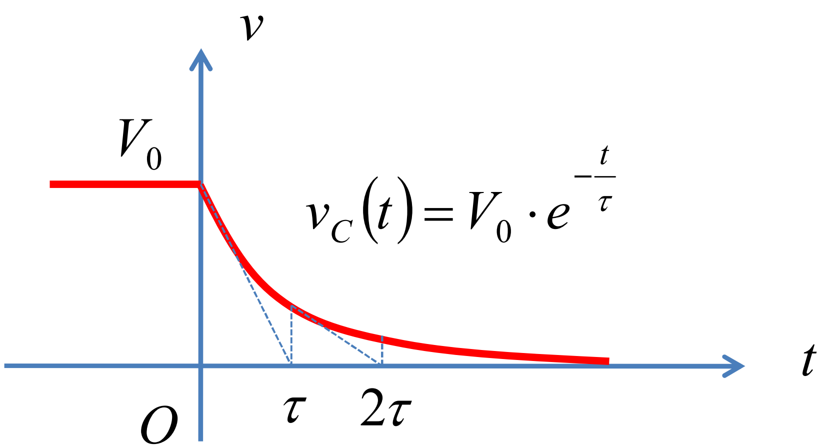
指数衰减规律的电容放电特性



$\tau = RC$

时间常数

t	v_C/V_0
0	1
τ	0.368
2τ	0.135
3τ	0.050
4τ	0.018
5τ	0.007
…	…
∞	0



$$\dot{v}_C = -\frac{1}{\tau} v_C$$

工程上一般认为5τ后，电容电压趋于稳态值

放电：电容释放能量

$$v_C(t)=\begin{cases} V_0 & t<0 \\ V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t\geq 0 \end{cases}$$

$$E_C(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}CV_0^2 & t<0 \\ \frac{1}{2}Cv_C^2(t) & t\geq 0 \end{cases}$$

$$i_C(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ -\frac{V_0}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t\geq 0 \end{cases}$$

$$P_C(t)=v_C(t)i_C(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ -\frac{V_0^2}{R}e^{-2\frac{t}{\tau}}<0 & t\geq 0 \end{cases}$$

开关闭合后，电容一直在释放功率

$$E_C(t)=E_C(0)+\int_0^t P_C(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2}CV_0^2-\frac{V_0^2}{R}\int_0^t e^{-2\frac{\lambda}{\tau}}d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}CV_0^2+\frac{V_0^2}{R}\frac{\tau}{2}e^{-2\frac{\lambda}{\tau}}\bigg|_0^t$$

$$=\frac{1}{2}CV_0^2+\frac{V_0^2}{R}\frac{RC}{2}\left(e^{-2\frac{t}{\tau}}-1\right)=\frac{1}{2}CV_0^2e^{-2\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{2}Cv_C^2(t)$$

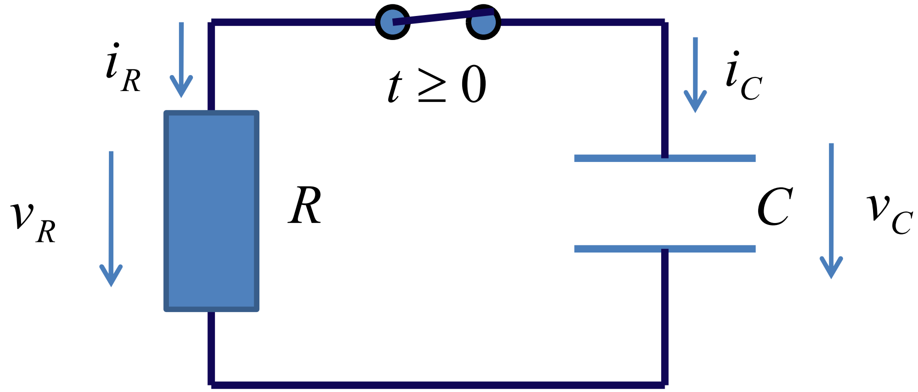
$$(t\geq 0)$$

$$E_C\xrightarrow{t\to\infty}0$$

最终电容上的电能量全部释放出来

电容放电

被电阻消耗



$$v_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t \ge 0 \end{cases}$$

$$i_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & t \ge 0 \end{cases}$$

$$E_R(t) = \int_0^t P_R(\lambda) d\lambda = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t e^{-2\frac{\lambda}{\tau}} d\lambda$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$P_R(t) = v_R(t) i_R(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2\frac{t}{\tau}} > 0$$

$$(t \ge 0)$$

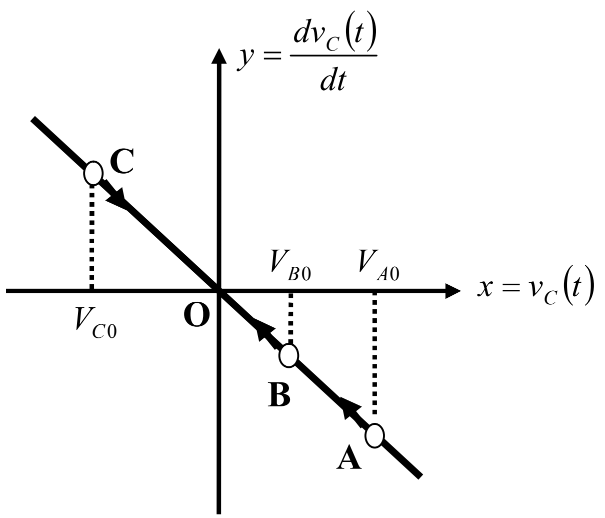
$$P_R(t) + P_C(t) \equiv 0$$

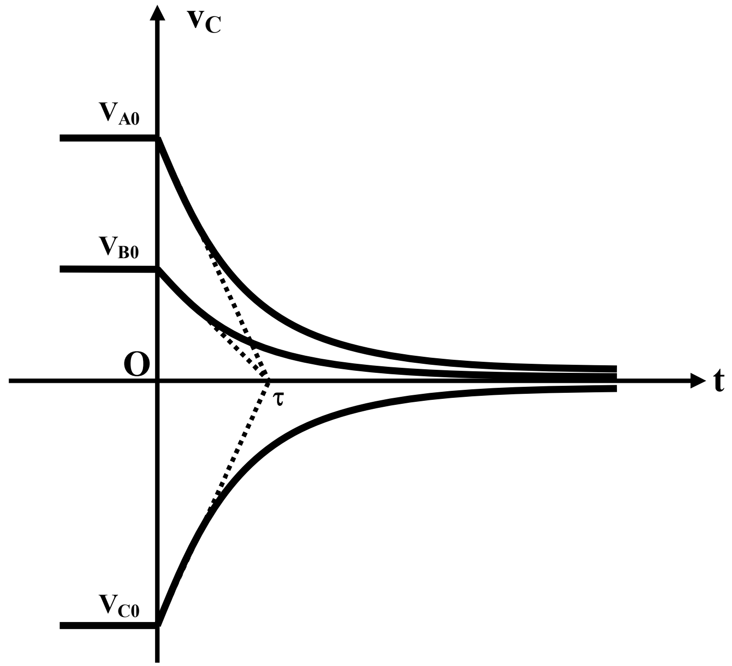
电容输出多大功率，电阻消耗多大功率
电容释放出的能量，全部被电阻消耗掉
电容自身不消耗任何能量
但电容可以存储电能：储能元件

$$E_R(t) + E_C(t) \equiv \frac{1}{2} C V_0^2$$

放电过程中，电容上存储的能量越来越少，直至全部被电阻消耗一空：但能量始终守恒

不同初值，放电曲线形态一致

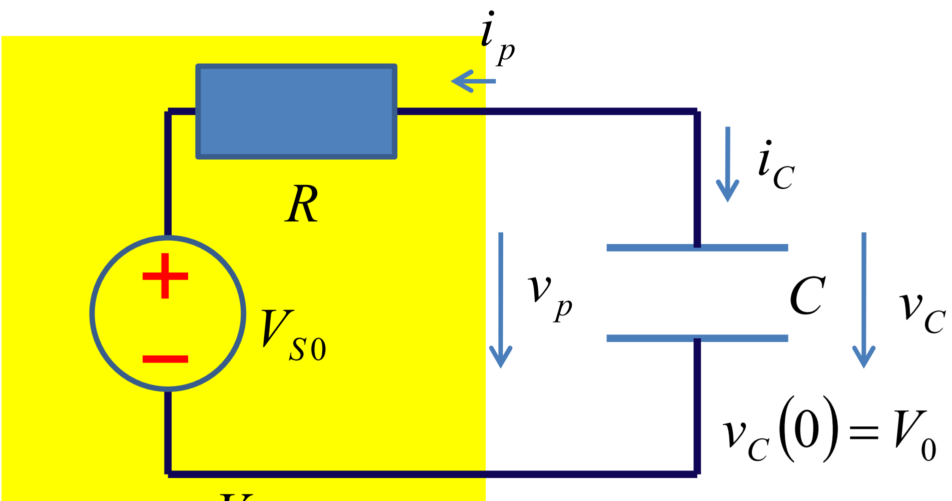




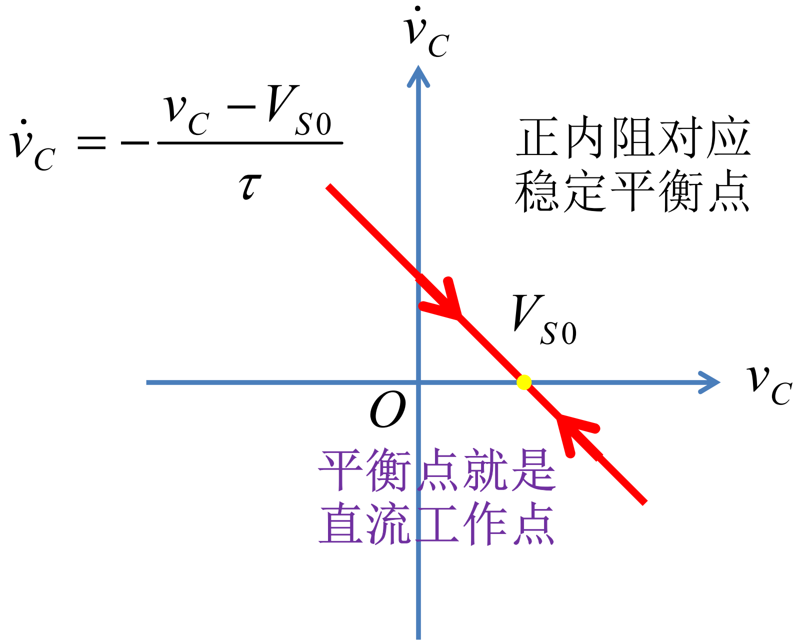
相轨迹的斜率**-1/**τ，代表了状态转移速度
时间常数越小，相轨迹越陡，状态转移速度越快，从一个状态转移到下一个状态用的时间就越短

思考：电容放电过程中，电容电压从V_0转移到$V_1(<V_0)$所需时间为多少？

1.2 电阻网络为直流戴维南源



$$i_p=\frac{v_p-V_{S0}}{R}=g(v_p)$$



稳定平衡点：直流工作点

$$t\to\infty$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{C}g(v_C(t))=-\frac{1}{C}\frac{v_C(t)-V_{S0}}{R}=-\frac{1}{\tau}v_C(t)+\frac{1}{\tau}V_{S0}$$

$$v_C(t)\to V_{S0}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}\to 0$$

时间常数 $\tau=RC$

状态方程的解析解：时域积分法

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{\tau}v_C(t)+\frac{1}{\tau}V_{S0} \qquad \frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_C(t)=\frac{1}{\tau}V_{S0}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}\cdot e^{\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}v_C(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{\tau}V_{S0}\cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{d\left(e^{\frac{t}{\tau}}\cdot v_C(t)\right)}{dt}=\frac{1}{\tau}V_{S0}\cdot e^{\frac{t}{\tau}} \qquad e^{\frac{t}{\tau}}\cdot v_C(t)=C_{\text{onstant}}+\int_0^{\text{t}}\frac{1}{\tau}V_{S0}\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\lambda$$

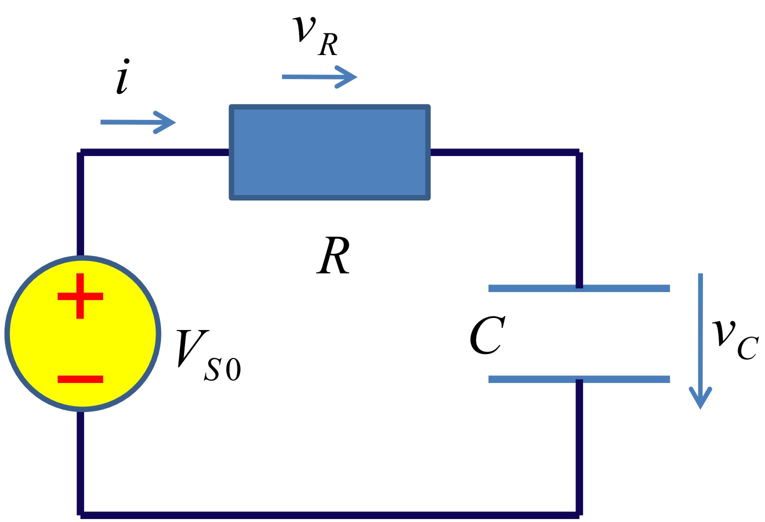
$$e^{\frac{t}{\tau}}\cdot v_C(t)=V_0+V_{S0}\cdot\int_0^{\text{t}}e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}=V_0+V_{S0}\left(e^{\frac{\lambda}{\tau}}\right)_0^t=V_0+V_{S0}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-1\right)$$

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+V_{S0}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (t\geq 0)$$

状态转移不仅和初始状态V_0有关，还和激励V_{S0}有关

对解的解析

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+V_{S0}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\qquad (t\geq 0)$$



零输入响应

$v_S(t)=V_{S0}=0$

$$v_C(t)=v_{ZIR}(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

零状态响应

$v_C(0)=V_0=0$

$$v_C(t)=v_{ZSR}(t)=V_{S0}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

（电容电压）全响应=零输入响应+零状态响应

零输入响应：当输入激励为零时的输出响应：它完全由电路中的储能元件的初始状态（电容上的初始电压、电感上的初始电流）决定

零状态响应：如果电路中的储能元件没有初始储能，输出完全由输入激励决定，则称为零状态响应。这里的零状态指储能元件初始值为零：对电容而言，其初始储能为零，其初始电压为零。

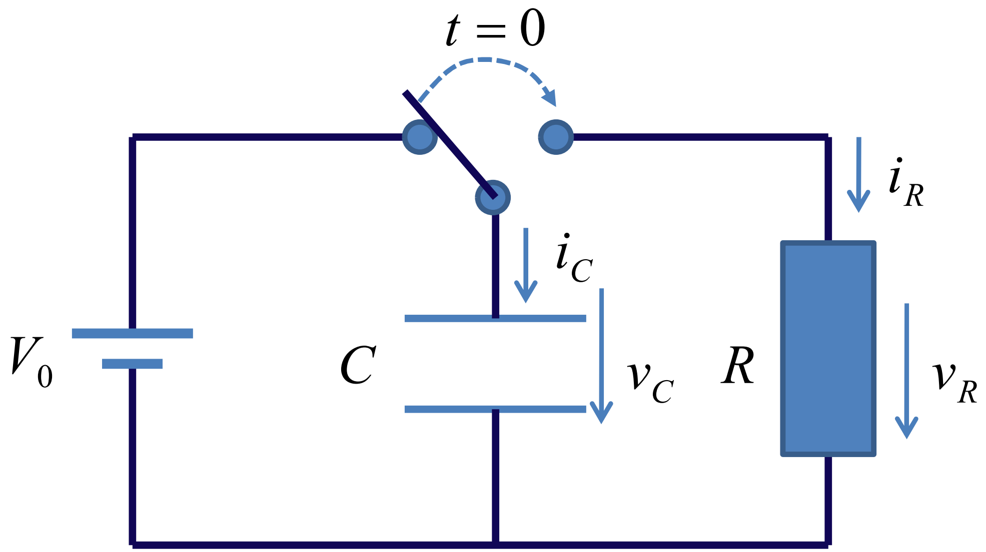
1.3 对解的进一步解析

- 零输入响应：放电曲线
- 零状态响应：充电曲线

- 全响应=零输入响应+零状态响应

- 三要素法：全响应=稳态响应+瞬态响应

1.3.1 零输入



非零状态：**t<0**，电容从电源获得初始能量，获得初始状态（初始电荷和初始电压）

$t<0$ $\left(t=0^-\right)$

$$v_C = V_0$$

$$v_R = 0$$

$$i_C = 0$$

$$i_R = 0$$

$t=0$ $\left(t=0^+\right)$

$$v_C = V_0$$

$$v_R = V_0$$

换路时，电容电压不变；电阻电压有一个跳变

$$i_R = \frac{V_0}{R}$$

$$i_C = -\frac{V_0}{R}$$

换路瞬间，电容上的电流有一个跳变

$t>0$

$$v_C = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

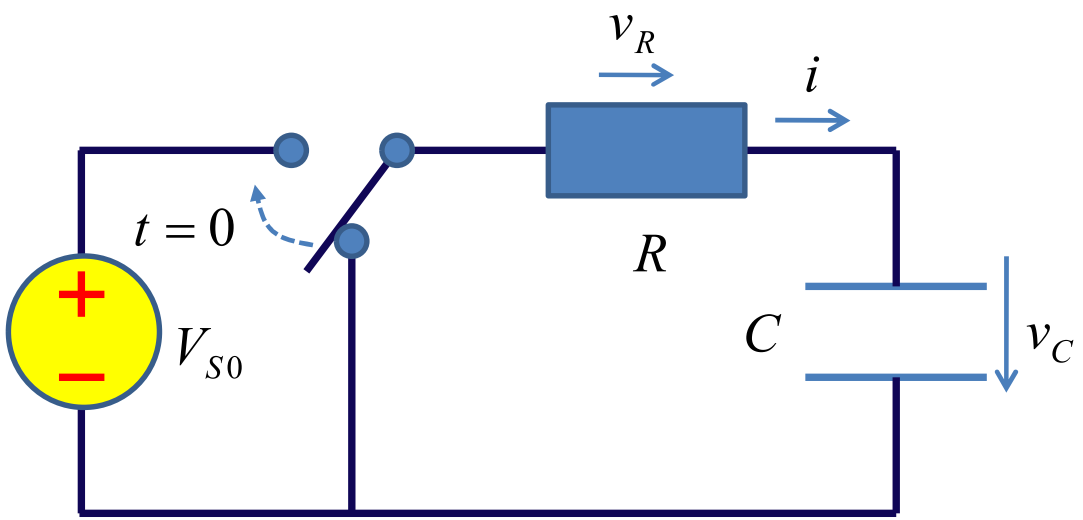
$$v_R = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_R = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1.3.2 零状态响应

考察输入为直流恒压情况



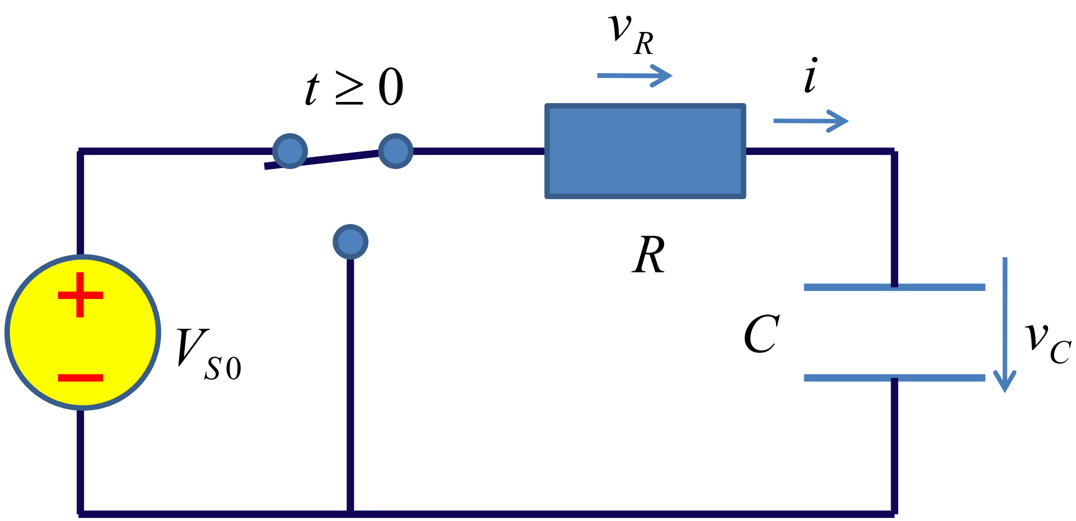
零状态：**t<0**，电容上即使有电荷，也早已通过电阻释放一空，电容上的初始状态为零

$$v_C(t)=v_{ZSR}(t)=V_{S0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\qquad (t\geq 0)$$

t=0换路，**RC**电路接恒压源，激励为恒压V_{S0}

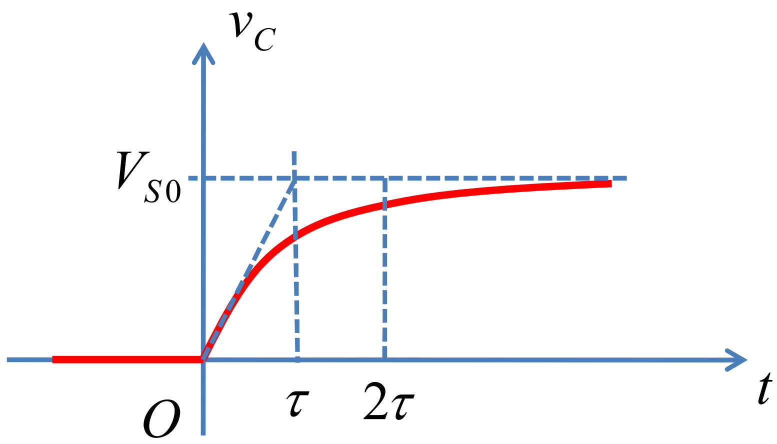
$$v_C\xrightarrow{t\to\infty}V_{S0}$$

指数衰减规律的充电特性



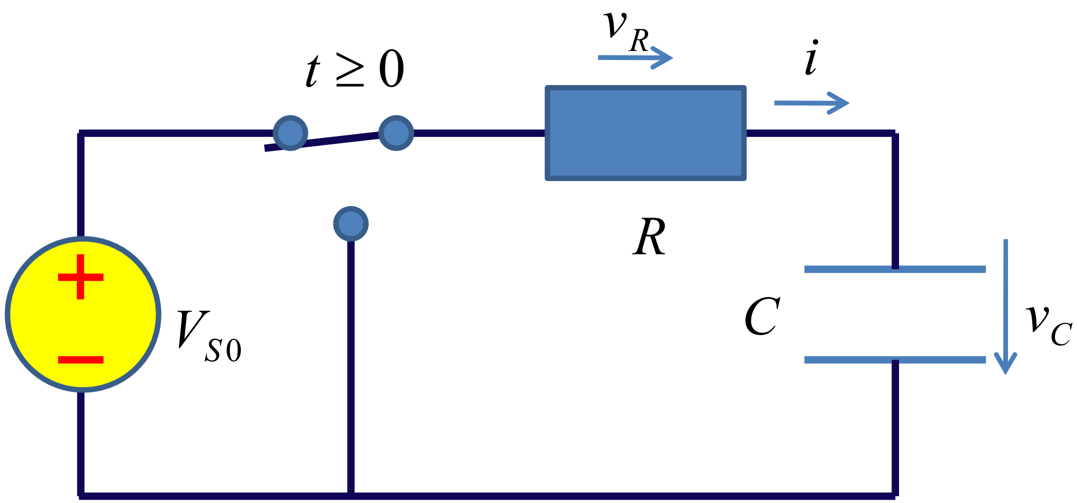
$$v_C(t) = V_{S0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$(t \geq 0)$$



t	v_C/V_{S0}
0	0
τ	0.632
2τ	0.865
3τ	0.950
4τ	0.982
5τ	0.993
…	…
∞	1

电源做功输出能量



$$v_C(t) = V_{S0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$P_S(t) = v_S(t) i_S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{V_{S0}^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} & t \ge 0 \end{cases}$$

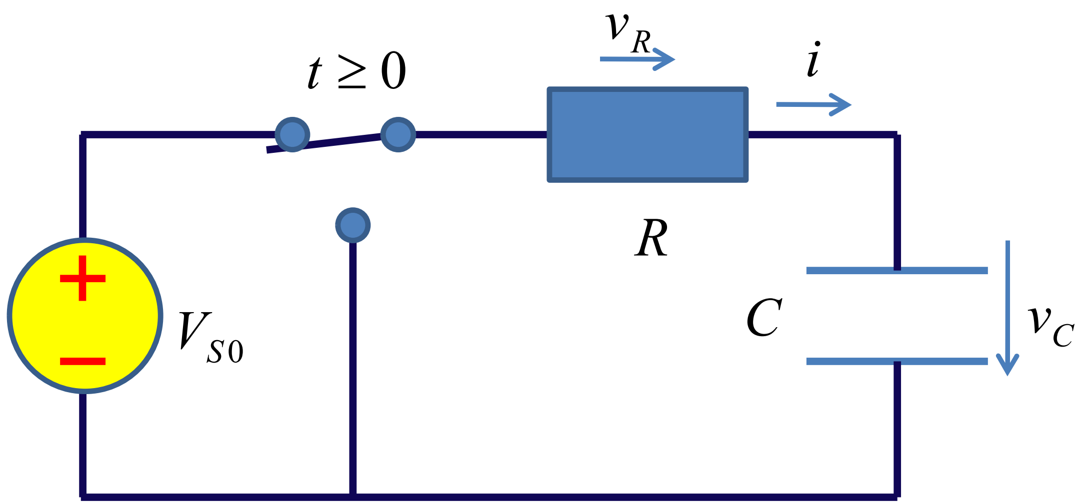
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V_{S0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E_S(t) = \int_{-\infty}^{t} P_S(\lambda) d\lambda = \int_0^t \frac{V_{S0}^2}{R} e^{-\frac{\lambda}{\tau}} d\lambda = \frac{V_{S0}^2}{R}\tau\left(-e^{-\frac{\lambda}{\tau}}\right)\Bigg|_0^t = CV_{S0}^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$E_S(\infty) = CV_{S0}^2 = QV_{S0}$$

把$Q=CV_{S0}$的电荷以恒压V_{S0}转移出去，电源做功为$QV_{S0}=CV_{S0}^2$

充电：电容储能



$$v_C(t) = V_{S0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V_{S0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$P_C(t) = v_C(t)i_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{V_{S0}^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & t \ge 0 \end{cases}$$

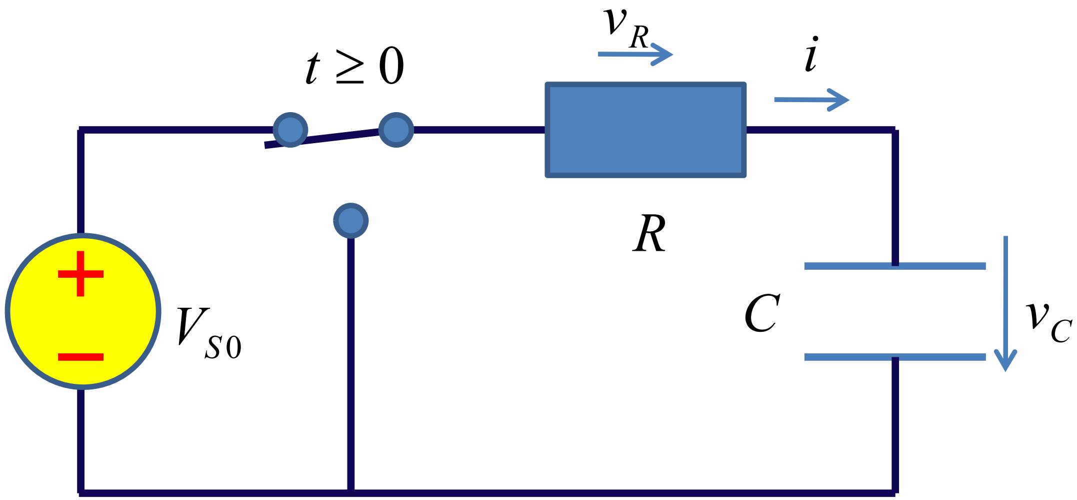
$$E_C(\infty) = \frac{1}{2}CV_{S0}^2$$

电容只储存了电源释放能量的一半，另一半能量呢？

P_C>0:吸收功率，但仅是存储，并未消耗

$$E_C(t) = \int_{-\infty}^{t} P_C(\lambda)d\lambda = \int_{0}^{t}\frac{V_{S0}^2}{R}e^{-\frac{\lambda}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\tau}}\right)d\lambda = \ldots = CV_{S0}^2\left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t)$$

充电过程：电阻耗能



$$v_C(t)=V_{S0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=\frac{V_{S0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_R(t)=V_{S0}-v_C(t)=V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$P_R(t)=v_R(t)i_R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{V_{S0}^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}} & t\ge 0\end{cases}$$

P_R>0:吸收功率，同时以热能等形式耗散

$$E_R(\infty)=\frac{1}{2}CV_{S0}^2$$

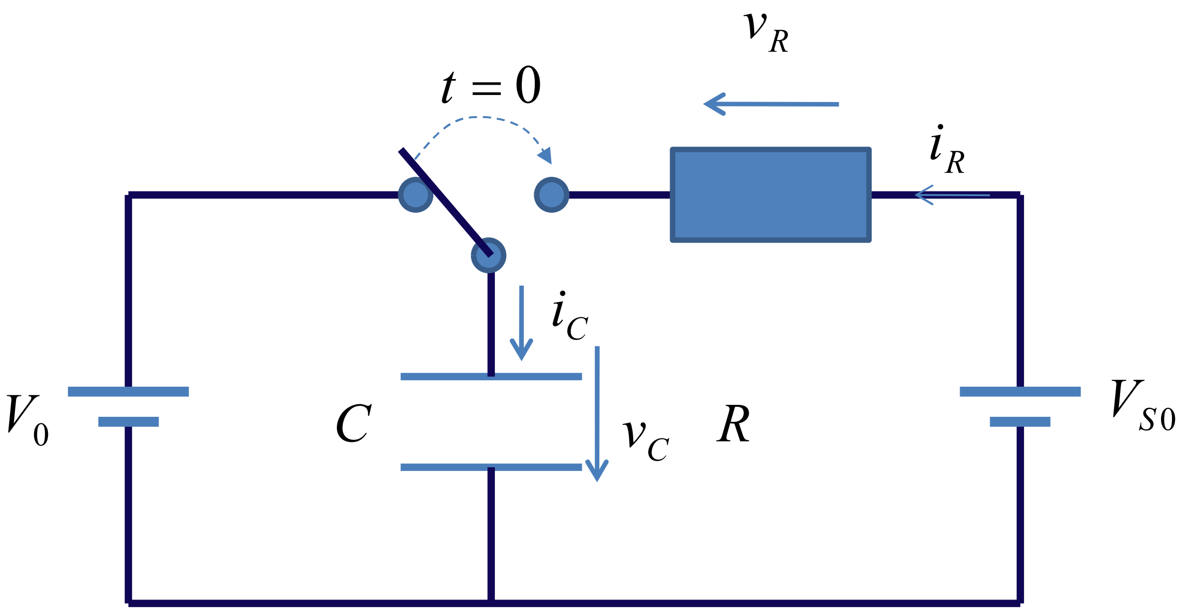
整个充电过程中，电阻消耗了电源发出的另一半能量

$$E_R(t)=\int_{-\infty}^{t}P_R(\lambda)d\lambda=\int_0^t\frac{V_S^2}{R}e^{-\frac{2\lambda}{\tau}}d\lambda=\frac{V_{S0}^2}{R}\frac{\tau}{2}\left(-e^{-\frac{2\lambda}{\tau}}\right)_0^t=\frac{1}{2}CV_{S0}^2\left(1-e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

$$P_R(t)+P_C(t)=P_S(t)\qquad E_R(t)+E_C(t)=E_S(t)$$

电源释放的能量始终等于电阻消耗能量加电容存储能量

1.3.3 非零状态、非零输入



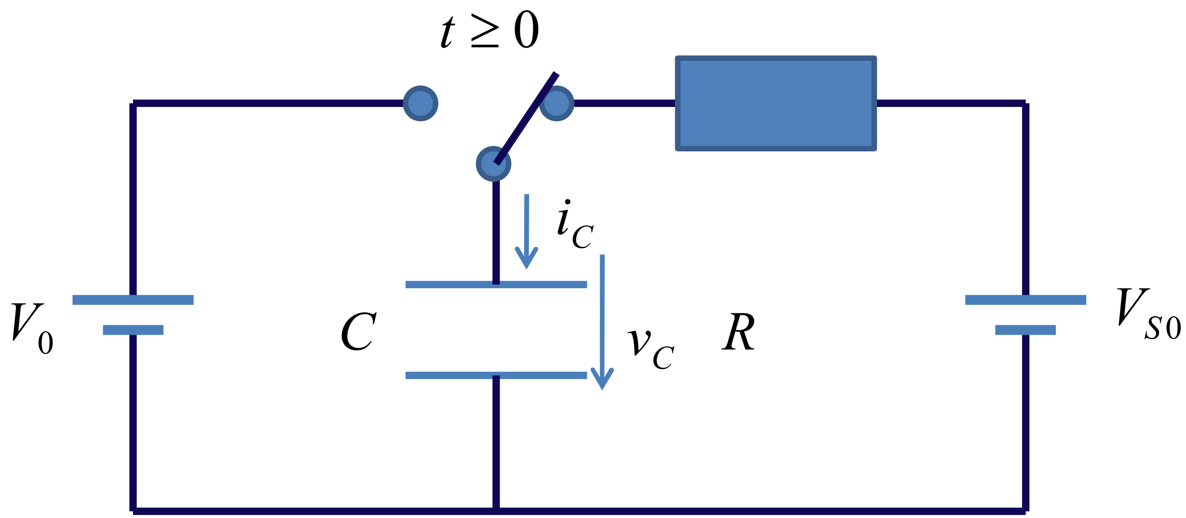
非零状态：**t<0**，电容从电源**V$_0$**获得初始能量，获得初始状态（初始电荷和初始电压）

非零输入： **t=0**时换路，此路中有源，故而非零输入，电容上的电压如何变化？

$$v_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}+V_{S0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (t\geq 0)$$

（电容电压）全响应=零输入响应+零状态响应

如何理解



$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{S0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = V_{S0} + \left(V_0 - V_{S0}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 + \left(V_{S0} - V_0\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$(t \geq 0)$$

零输入响应　零状态响应

终值
稳态响应

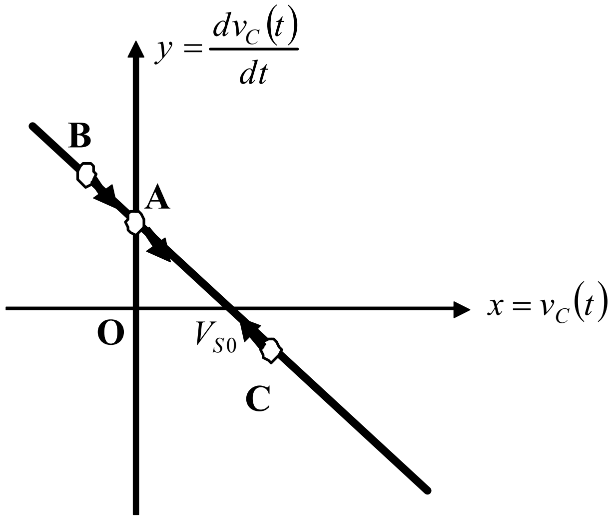
过渡过程
瞬态响应

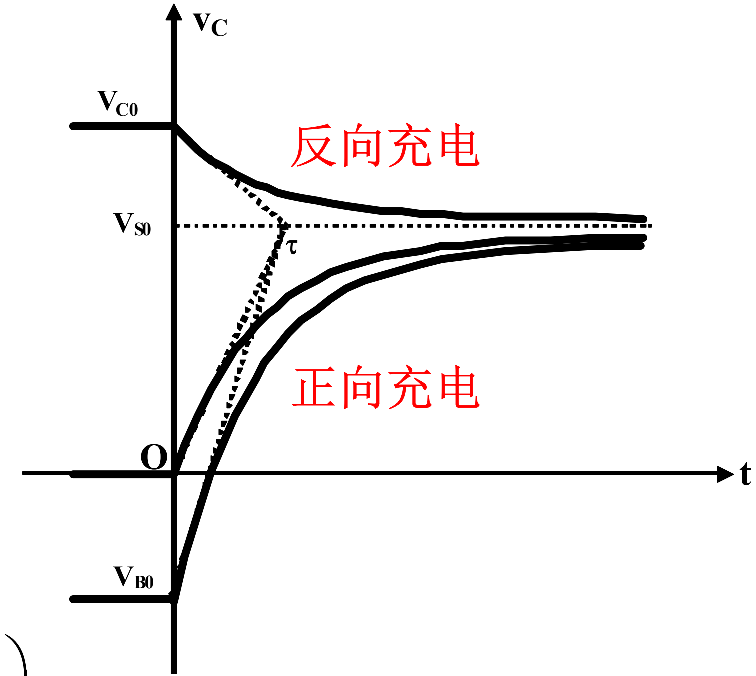
初值

从初值到终值的充电过程
从V_0充电到V_{S0}

线性系统叠加定理的体现　三要素法的基础　曲线形态上的一致性

不同初值，形态一致





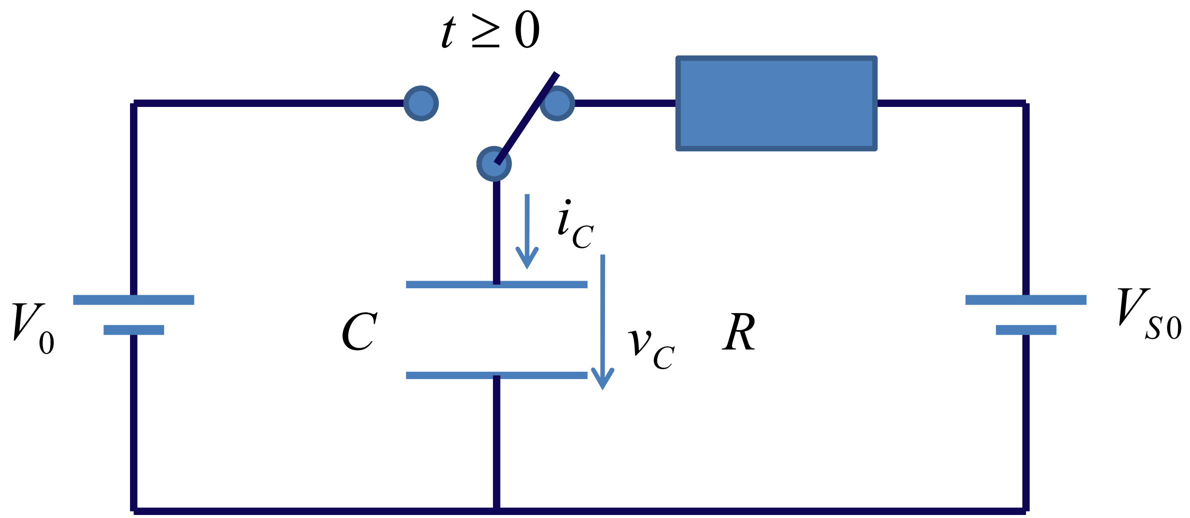
$$v_C(t)=V_0+(V_{S0}-V_0)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$(t\ge 0)$$

初值

从初值到终值的充电过程

1.3.4 三要素法



全响应=稳态响应+瞬态响应

$$v_C(t) = V_{S0} + (V_0 - V_{S0})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

输出响应 = 稳态响应 + (初值 − 稳态初值)· 指数衰减动态变化

$$v_C(t) = v_{C\infty}(t) + \left(v_C(0) - v_{C\infty}(0)\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

终值
稳态响应

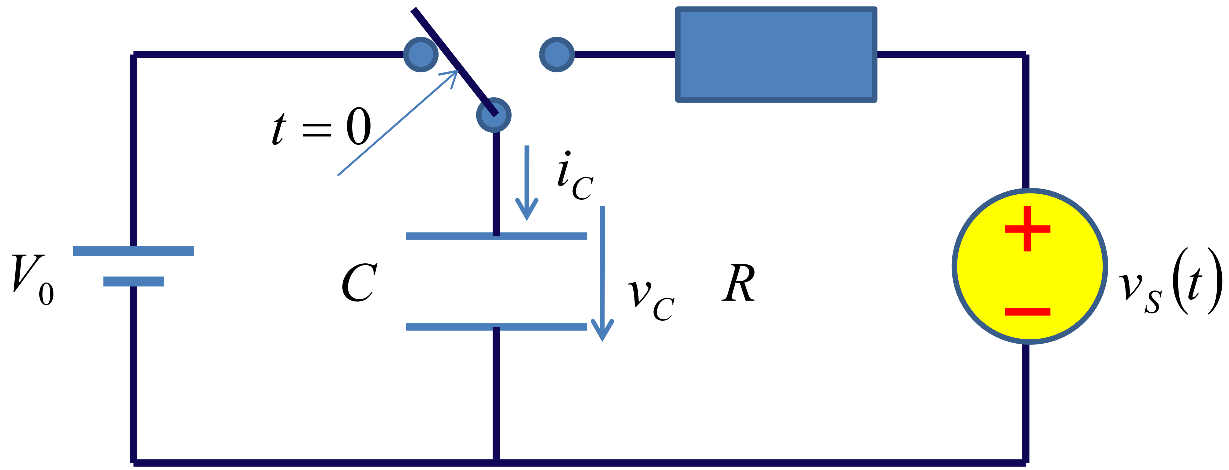
过渡过程
瞬态响应

三要素法仅对一阶线性时不变动态系统成立
（一阶**RC**电路，一阶**RL**电路）

1.4 各种激励源

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{\tau}v_C(t)+\frac{1}{\tau}v_S(t)$$

$$\frac{d\left(e^{\frac{t}{\tau}}\cdot v_C(t)\right)}{dt}=\frac{1}{\tau}v_S(t)\cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$



任何形态的源，
包括直流源

$$e^{\frac{t}{\tau}}\cdot v_C(t)=V_0+\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}\qquad (t\geq 0)$$

零输入响应　　零状态响应

直流激励源

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau} \qquad (t\ge 0)$$

$$v_S(t)=V_{S0}$$

$$v_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}+V_{S0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=V_{S0}+(V_0-V_{S0})e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\ge 0)$$

零输入响应　零状态响应　终值 稳态响应　过渡过程 瞬态响应

$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+(v_C(0)-v_{C\infty}(0))\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

稳态响应　瞬态响应

三要素法从直流激励源的结论获得，其他源是否也可以用三要素？

三要素法：需要有一个稳态响应

$$v_C(t)=V_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}=v_{C\infty}(t)+\left(V_0-v_{C\infty}(0)\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(t\geq 0)$$

周期信号（包括直流）激励，一定存在稳态
其他激励，假设存在稳态，那么何谓稳态？

$$v_{C\infty}(t)=\int_{-\infty}^{t} v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$$ 稳态响应

瞬态结束即为稳态！
如何结束瞬态？开关启动时间退至-∞!

$$v_{C\infty}(0)=\int_{-\infty}^{0} v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$v_{Ct}(t)=v_C(t)-v_{C\infty}(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}-\int_{-\infty}^{0} v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$=\left(V_0-\int_{-\infty}^{0} v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=\left(V_0-v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

瞬态响应

例：直流激励

$$v_{C\infty}(t)=\int_{-\infty}^{t} V_{S0}\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}=V_{S0}e^{\frac{-t}{\tau}}\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\lambda}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$=V_{S0}e^{\frac{-t}{\tau}}\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}\Big|_{-\infty}^{t}=V_{S0}e^{\frac{-t}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}}-0\right)=V_{S0}$$

考察三种激励下的三要素法

$$x(t)=x_\infty(t)+\left(X_0-x_\infty(0)\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

全响应=稳态响应+瞬态响应

要素1：时间常数τ　$\tau=RC$　$\tau=GL$

要素2：初值X_0　$v_C(0)=V_0$　$i_L(0)=I_0$

要素3：终值，稳态响应$x_\infty(t)$　$v_{C\infty}(t)=\int_{-\infty}^{t}v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}d\frac{\lambda}{\tau}$

（1）直流激励：电容开路，电感短路可获得直流激励下的稳态解

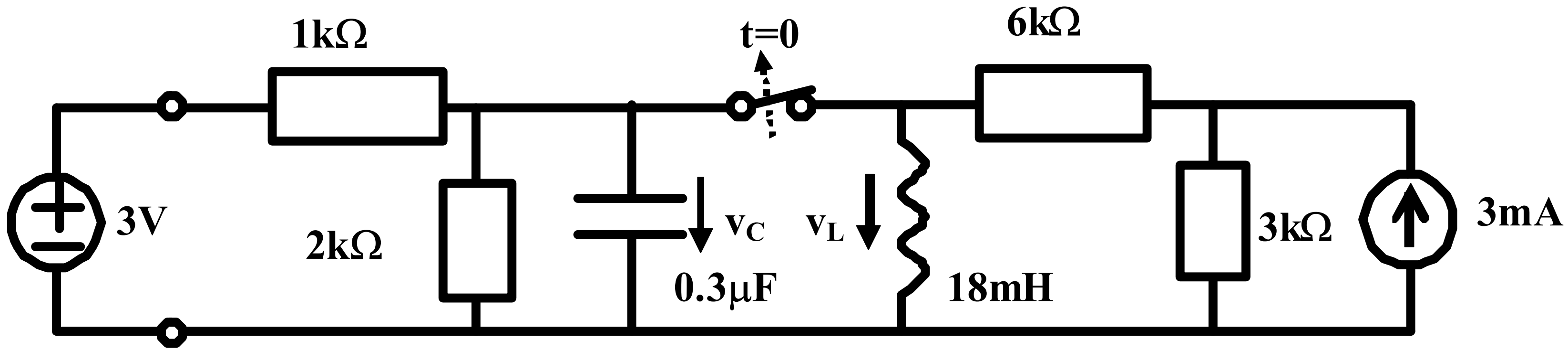
（2）正弦波激励：相量法（电容C用jωC导纳替代，电感L用jωL阻抗替代）可获得正弦激励下的稳态解

（3）方波激励：方波的两个时段将方波视为直流源，分别采用三要素法获得稳态响应

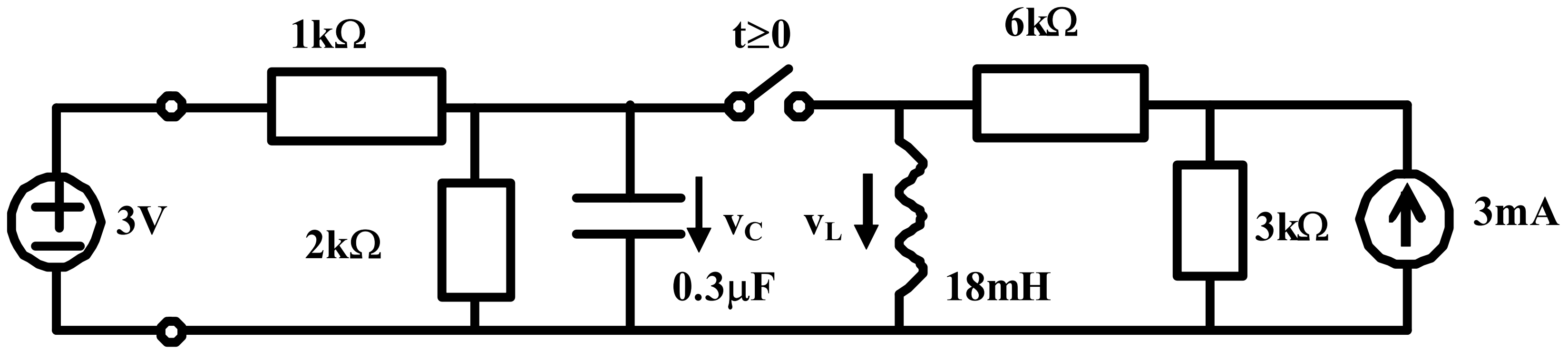
（4）其他激励：代入公式或其他方式找到特解

例1 直流激励

- 开关在**t=0**时刻断开。断开前，电路已稳定。求开关断开后，电容电压$\mathbf{v_C(t)}$和电感电压$\mathbf{v_L(t)}$的变化规律



开关断开，则为两个一阶动态



$$输出 = 稳态响应 + (状态初值 - 稳态初值) \cdot 指数衰减动态变化$$

$$v_C(t) = v_{C\infty}(t) + \left(v_C(0) - v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) + \left(i_L(0) - i_{L\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

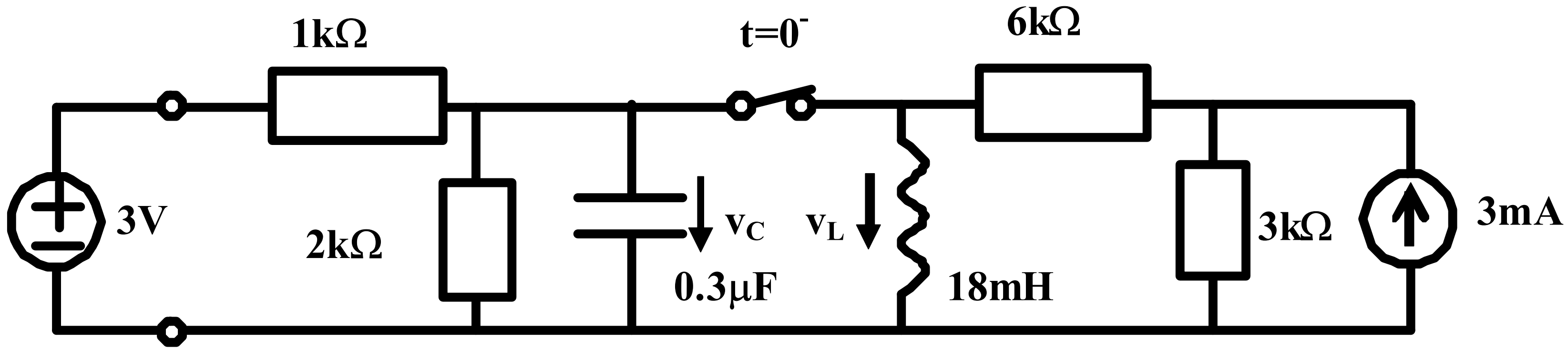
以状态变量为考察变量

$$v_L(t) = v_{L\infty}(t) + \left(v_L(0^+) - v_{L\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

电感电压不是状态变量，但仍可用三要素法

但注意电感电压可突变，因而初值为0+时刻初值

初值：系统稳定



对直流而言
电容开路
电感短路

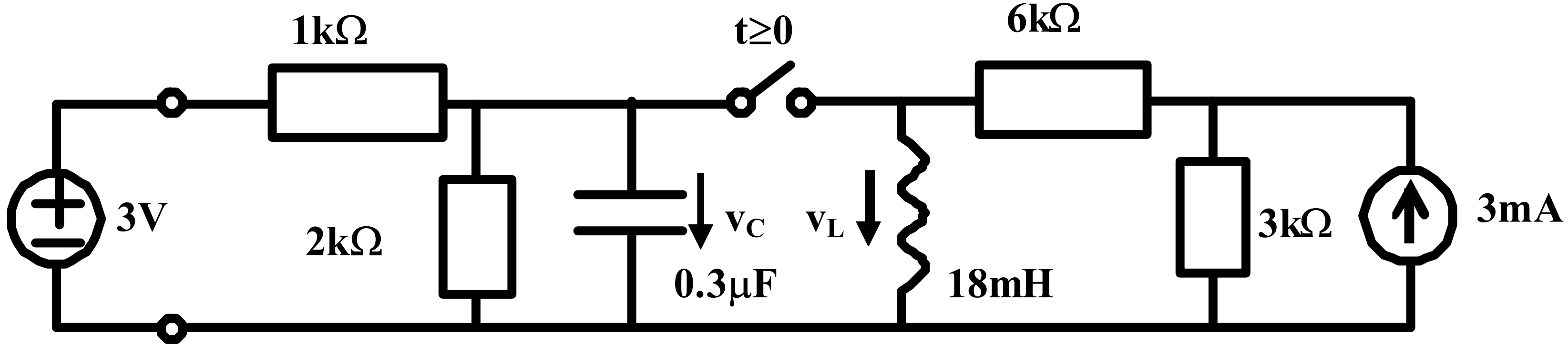
$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = C\frac{dV_0}{dt} = 0$$ 电流恒为0，开路

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{dI_0}{dt} = 0$$ 电压恒为0，短路

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{3}{1k} + 3mA\frac{3k}{3k+6k} = 4mA$$

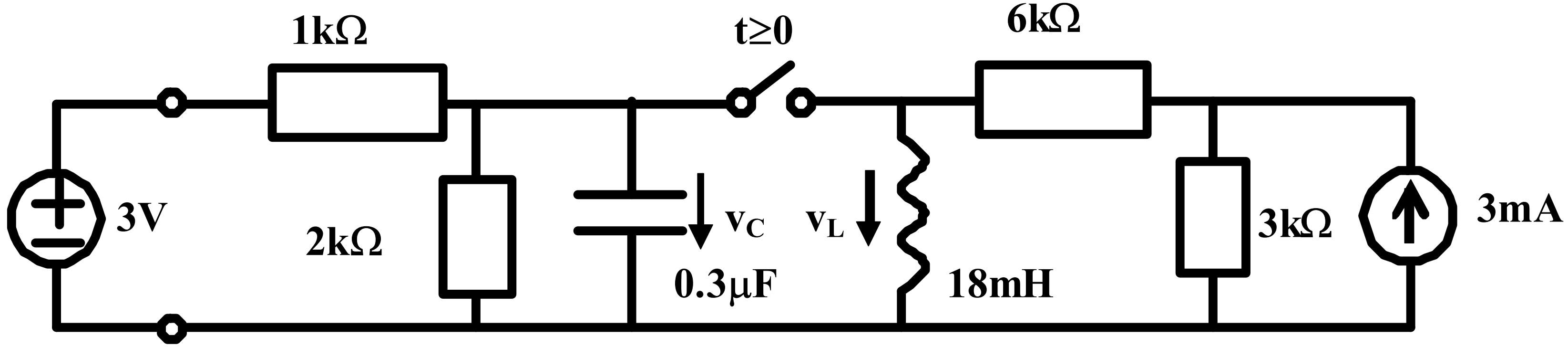
稳态终值：系统重新稳定



对直流而言：电容开路，电感短路

$$v_{C\infty}(t)=\frac{2k}{2k+1k}3=2V \qquad i_{L\infty}(t)=3mA\frac{3k}{3k+6k}=1mA$$

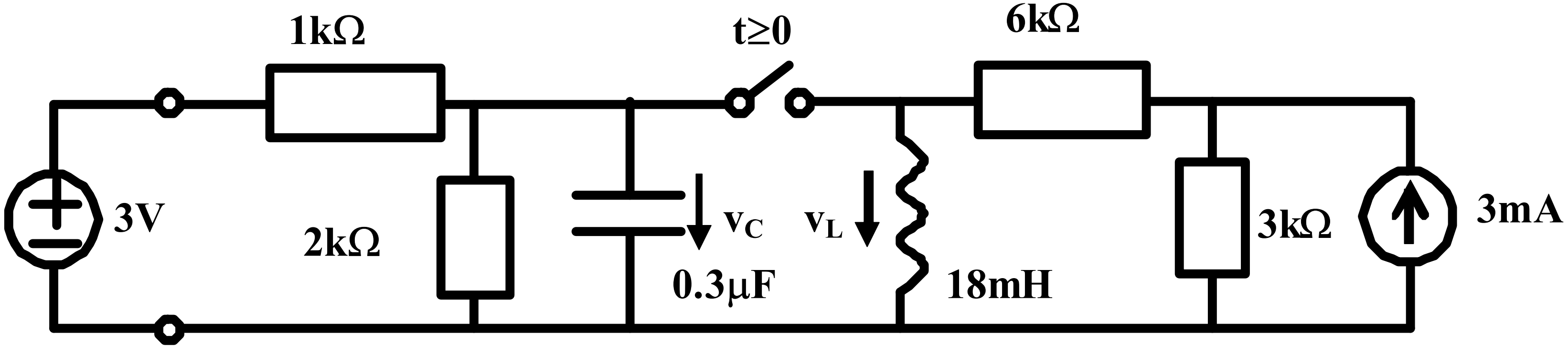
时间常数



$$\tau_C = RC = \frac{1k \cdot 2k}{1k+2k} \times 0.3\mu = 0.2ms$$

$$\tau_L = GL = \left(\frac{1}{6k+3k}\right) \times 18m = 2\mu s$$

三要素表述



$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+\left(v_C(0)-v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

$$=2+(0-2)e^{-\frac{t}{0.2m}}$$

$$=2\left(1-e^{-\frac{t}{0.2\times10^{-3}}}\right)\quad V\qquad (t\geq 0)$$

$$i_L(t)=i_{L\infty}(t)+\left(i_L(0)-i_{L\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$=1m+(4m-1m)e^{-\frac{t}{2\mu}}$$

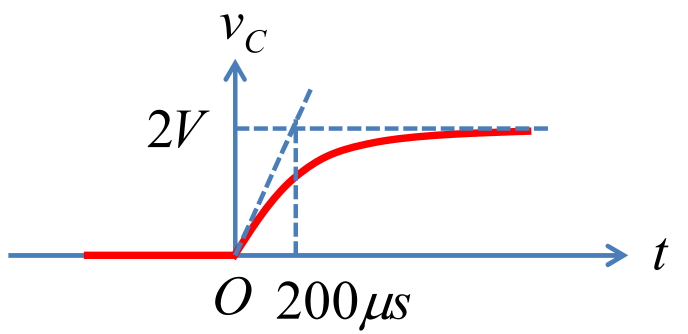
$$=\left(1+3e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\right)\quad mA\qquad (t\geq 0)$$

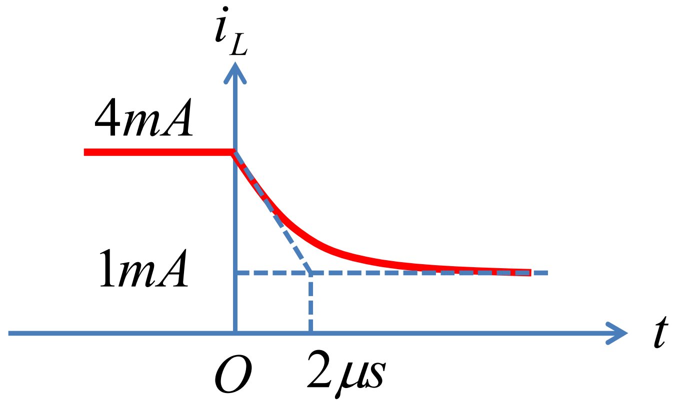
电容电压和电感电压

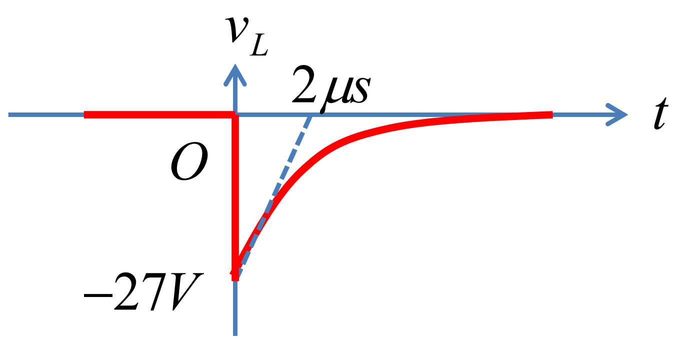
$$v_C(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2\left(1-e^{-\frac{t}{0.2\times10^{-3}}}\right)\ V & t\geq 0\end{cases}$$

$$i_L(t)=\begin{cases}4mA & t<0\\ \left(1+3e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\right)\ mA & t\geq 0\end{cases}$$

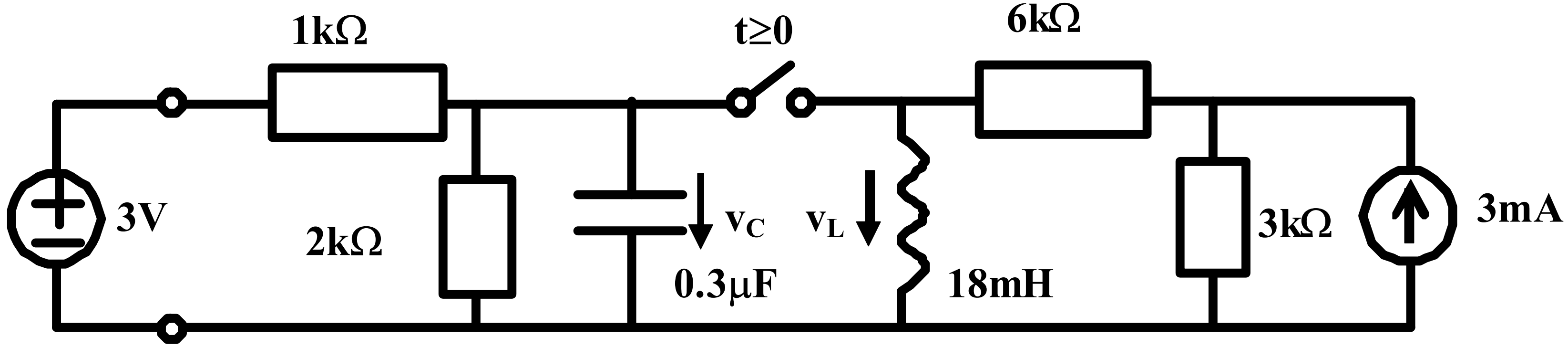
$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=\begin{cases}0 & t<0\\ -27e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\ V & t\geq 0\end{cases}$$







电感电压的三要素法



$$v_L(t)=v_{L\infty}(t)+\left(v_L(0^+)-v_{L\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$(t\ge 0)$$

$$v_L(0^-)=0$$

$$v_L(0^+)=-1m\times 3k-4m\times 6k=-27V$$

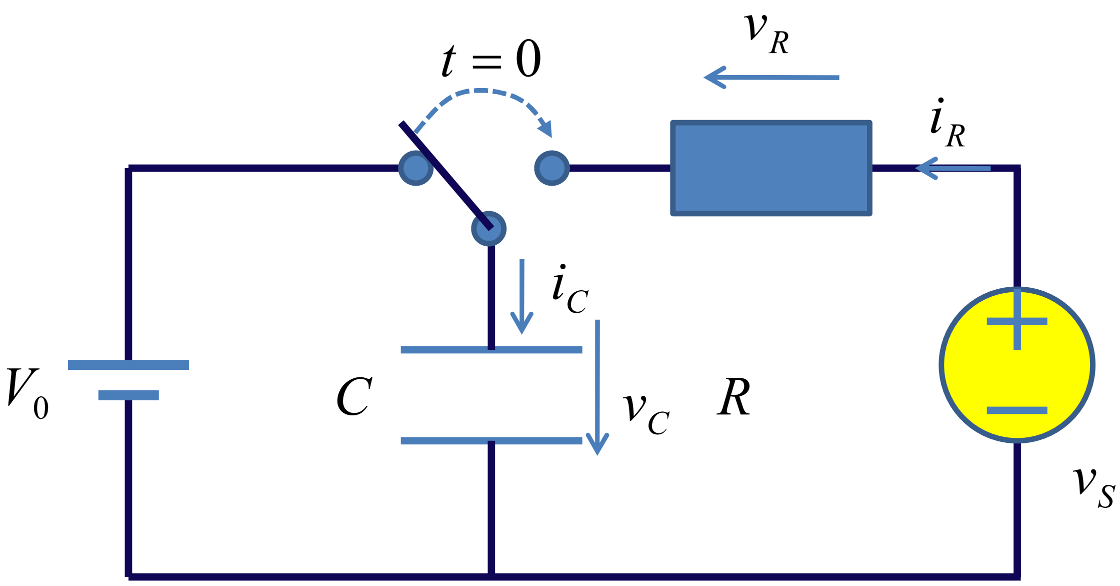
电感电压非状态变量，可以发生突变

$$v_L(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ -27e^{-\frac{t}{2\times 10^{-6}}}\quad V & t\ge 0\end{cases}$$

$$v_{L\infty}(t)=0$$

$$\tau_L=GL=2\mu s$$

例2：正弦输入激励



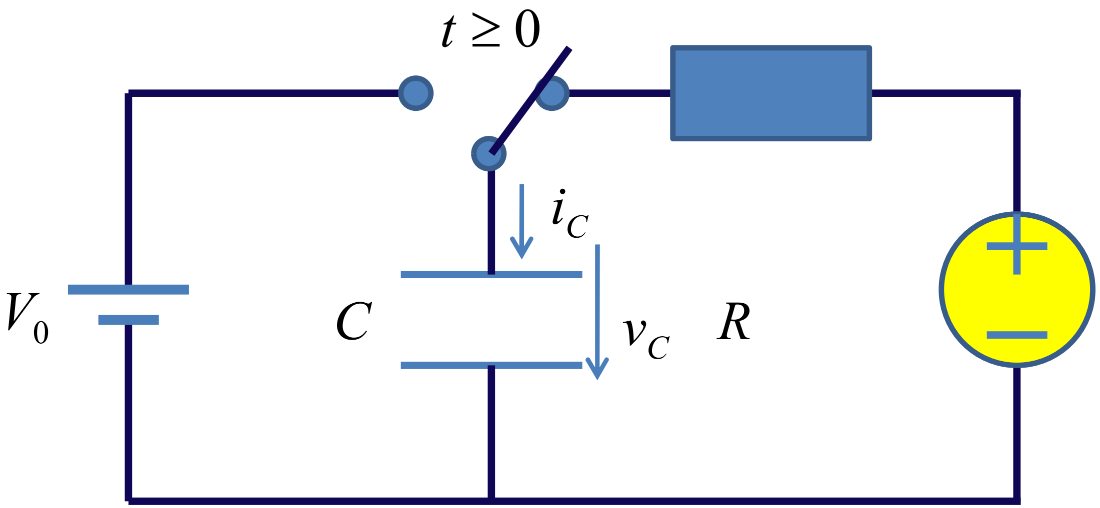
$$v_S(t)=V_p\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$v_C(t)=\underline{\underline{V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}}+\underline{\underline{\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}\,d\frac{\lambda}{\tau}}}\qquad (t\geq 0)$$

$$v_{C,ZSR}(t)=\int_0^t v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}\,d\frac{\lambda}{\tau}\qquad v_{C\infty}(t)=\int_{-\infty}^{t} v_S(\lambda)\cdot e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}\,d\frac{\lambda}{\tau}$$

分部积分法可求，比较麻烦，直接采用相量法求正弦稳态解

相量法获得正弦稳态响应

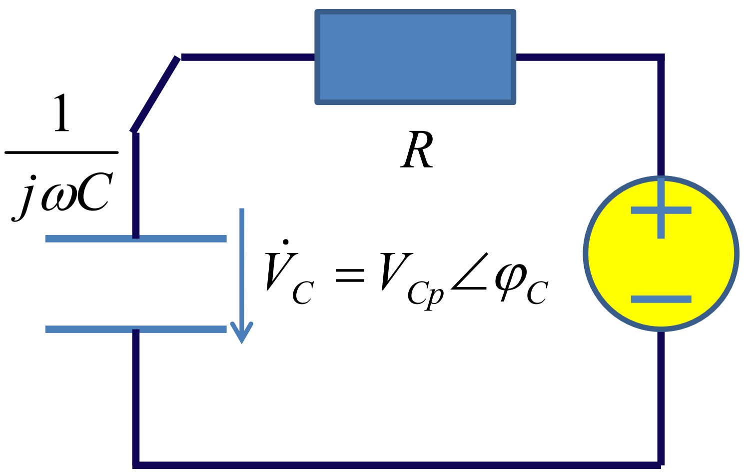


$$v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

稳态分析：时间足够长，瞬态已经结束
只剩下正弦稳态形式

$$\dot{V}_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R}\dot{V}_S = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}\dot{V}_S$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC}\dot{V}_S = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\angle -\arctan\omega\tau\right)\dot{V}_S$$



$$\dot{V}_S = V_{Sp}\angle\varphi_S$$

$$v_{C\infty}(t) = \frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t + \varphi_0 - \arctan\omega\tau)$$

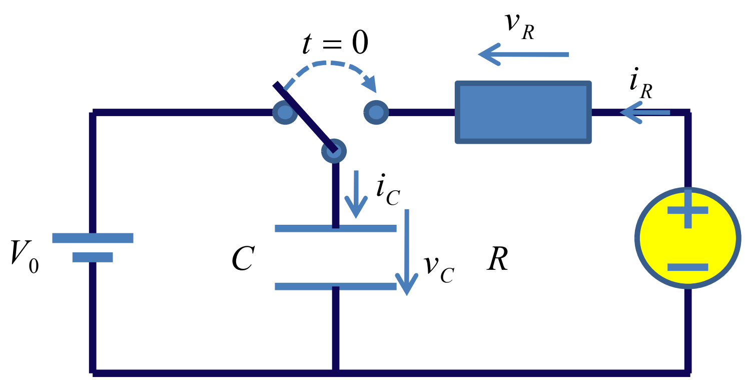
三要素表述

$$全响应(t)=稳态响应(t)+\left(初始状态(0)-稳态响应(0)\right)\cdot 指数衰减动态变化e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C(0)=V_0$$

$$v_{C,\infty}(0)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos\left(\varphi_0-\arctan(\omega\tau)\right)$$

$$v_{C,\infty}(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos\left(\omega t+\varphi_0-\arctan(\omega\tau)\right)$$



$$v_S(t)=V_{Sp}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$v_C(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos\left(\omega t+\varphi_0-\arctan(\omega\tau)\right)$$

$$+\left(V_0-\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos\left(\varphi_0-\arctan(\omega\tau)\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$(\tau=RC)$$

$$(t\ge 0)$$

$$R = 1k\Omega \qquad C = 1nF \qquad \tau = RC = 1\mu s \qquad V_{C0}(0^+) = V_{C0}(0^-) = -1.8V$$

$$v_S(t) = 2\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad \omega = 2\times 10^6\, rad/s \qquad \varphi_0 = \pi/6$$

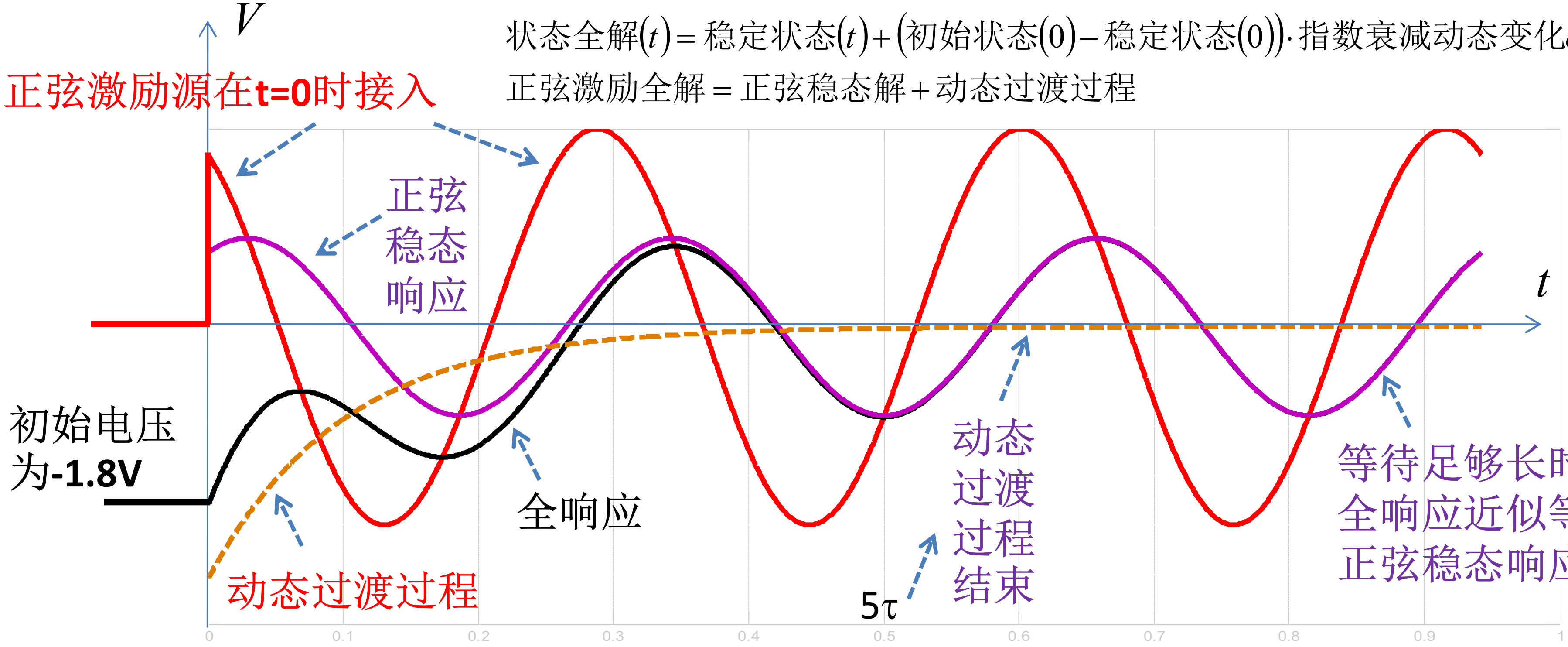
$$\omega\tau = 2$$

$$v_{C\infty}(t) = 0.8944\cos(\omega t + \varphi_0 - \psi) \qquad \psi = \arctan(\omega\tau) = 1.1071(rad)$$

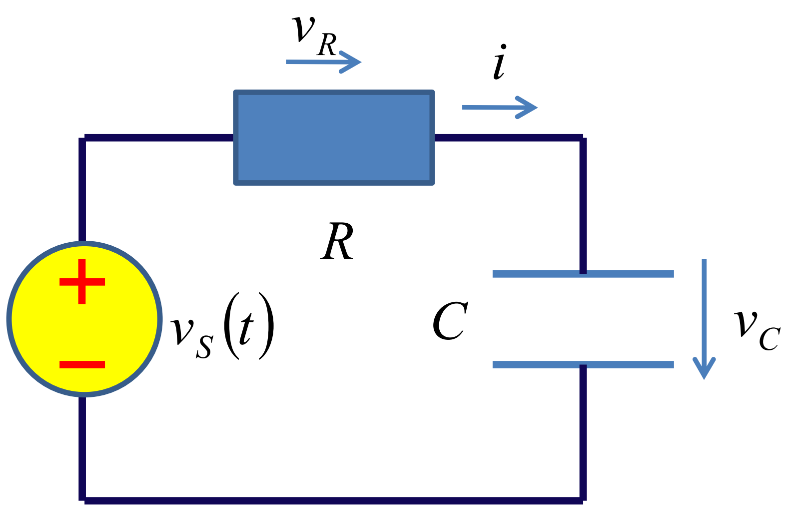
$$v_{C\infty}(0) = 0.8944\cos(\varphi_0 - \psi) = 0.7464$$

$$\text{状态全解}(t) = \text{稳定状态}(t) + (\text{初始状态}(0) - \text{稳定状态}(0))\cdot\text{指数衰减动态变化}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{正弦激励全解} = \text{正弦稳态解} + \text{动态过渡过程}$$



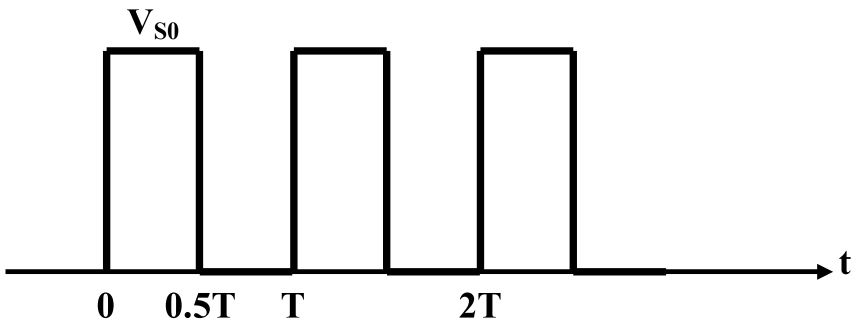
例3 方波激励



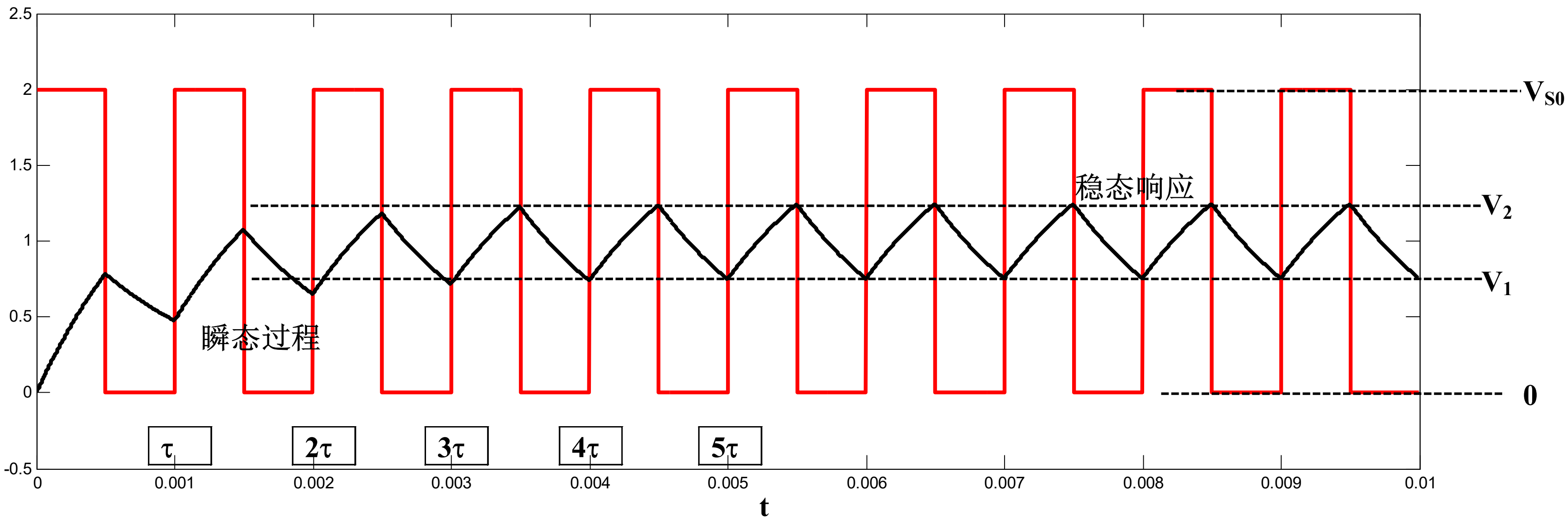
方波电压源

方波信号在t=0时刻加载，等待足够长时间后，系统进入稳态。

1、给出系统稳定后，电容电压的最大值和最小值
2、给出了电容电压的波形图



数值仿真的启示

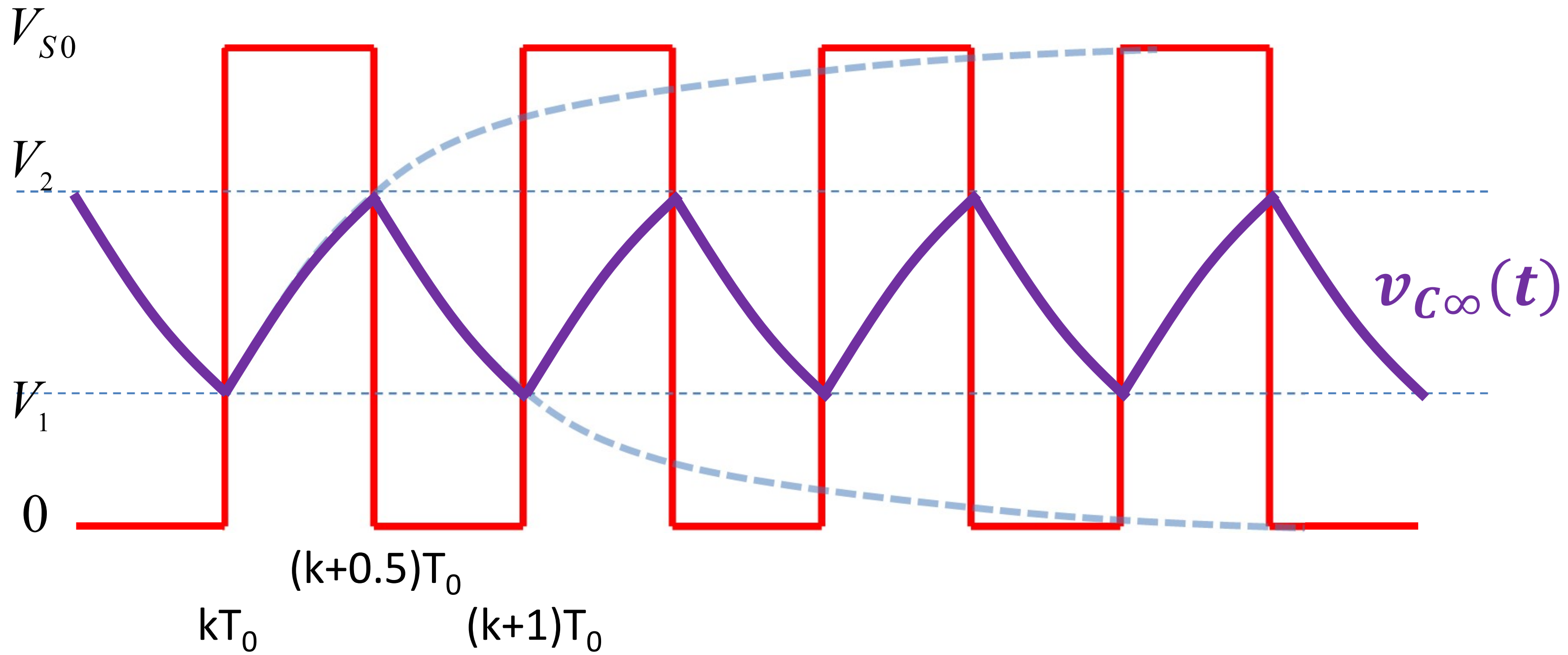


这是方波周期**T**和**RC**时间常数τ相等的仿真曲线：**T=** τ

周期信号激励下，包括方波、正弦波、直流（ω=0），存在瞬态过程和稳态过程因而可以采用三要素法

工程上可认为瞬态过程大体在**5**τ后结束

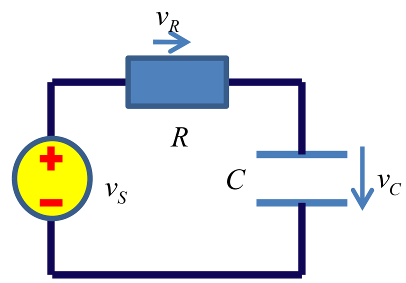
电容电压稳态响应分析

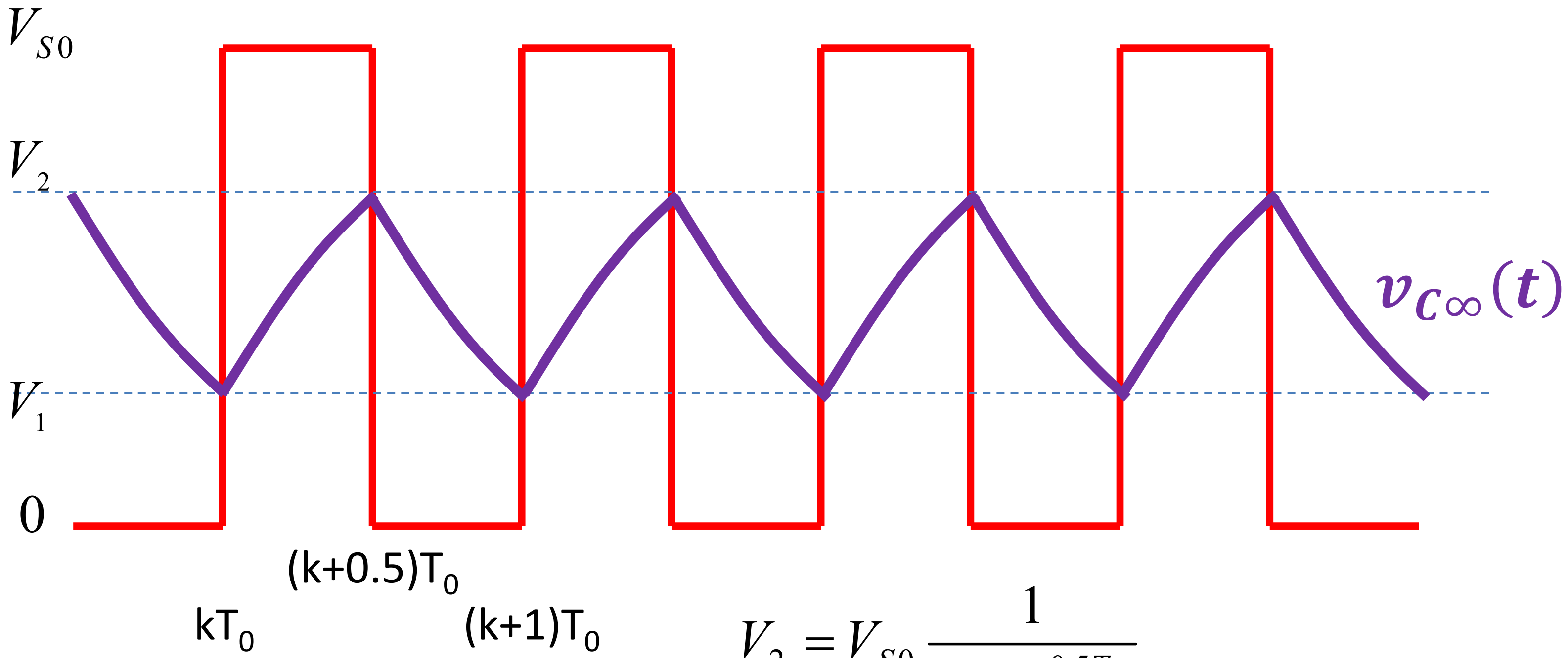


$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}} \qquad V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}} = V_2$$

$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = 0 + (V_2 - 0)e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}} \qquad V_2 e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}} = V_1$$

稳态效应上下界





$$V_{S0}+\left(V_1-V_{S0}\right)e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}=V_2$$

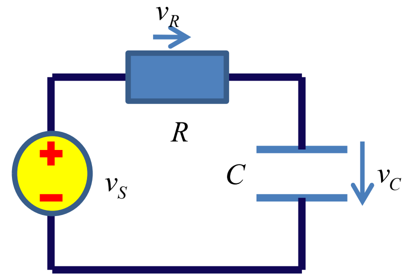
$$V_2 e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}=V_1$$

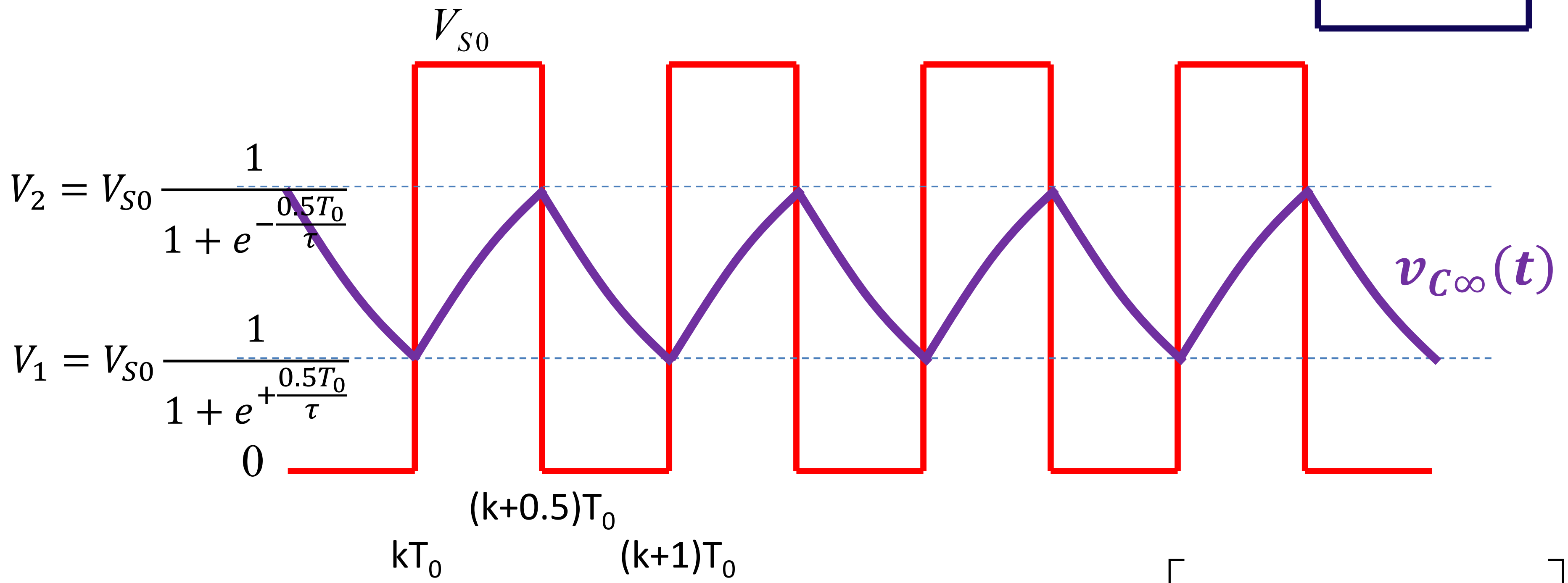
$$V_2=V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$V_1=V_{S0}\frac{e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$\frac{V_1+V_2}{2}=0.5V_{S0}$$

电容电压稳态响应



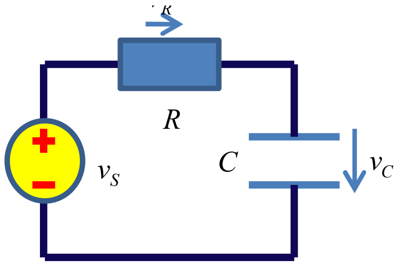


$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}} = V_{S0}\left[1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}\right]$$

时间分区表述

$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = 0 + (V_2 - 0)e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}} = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

电阻电压稳态响应



$kT_0 \sim (k+0.5)T_0:$

$$v_{C\infty}(t)=V_{S0}\left[1-\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}\right]$$

$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0:$

$$v_{C\infty}(t)=V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

$$v_{R\infty}(t)=v_{S\infty}(t)-v_{C\infty}(t)$$

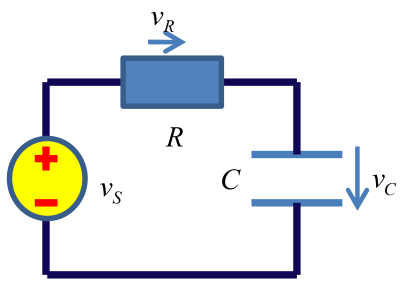
$kT_0 \sim (k+0.5)T_0:$

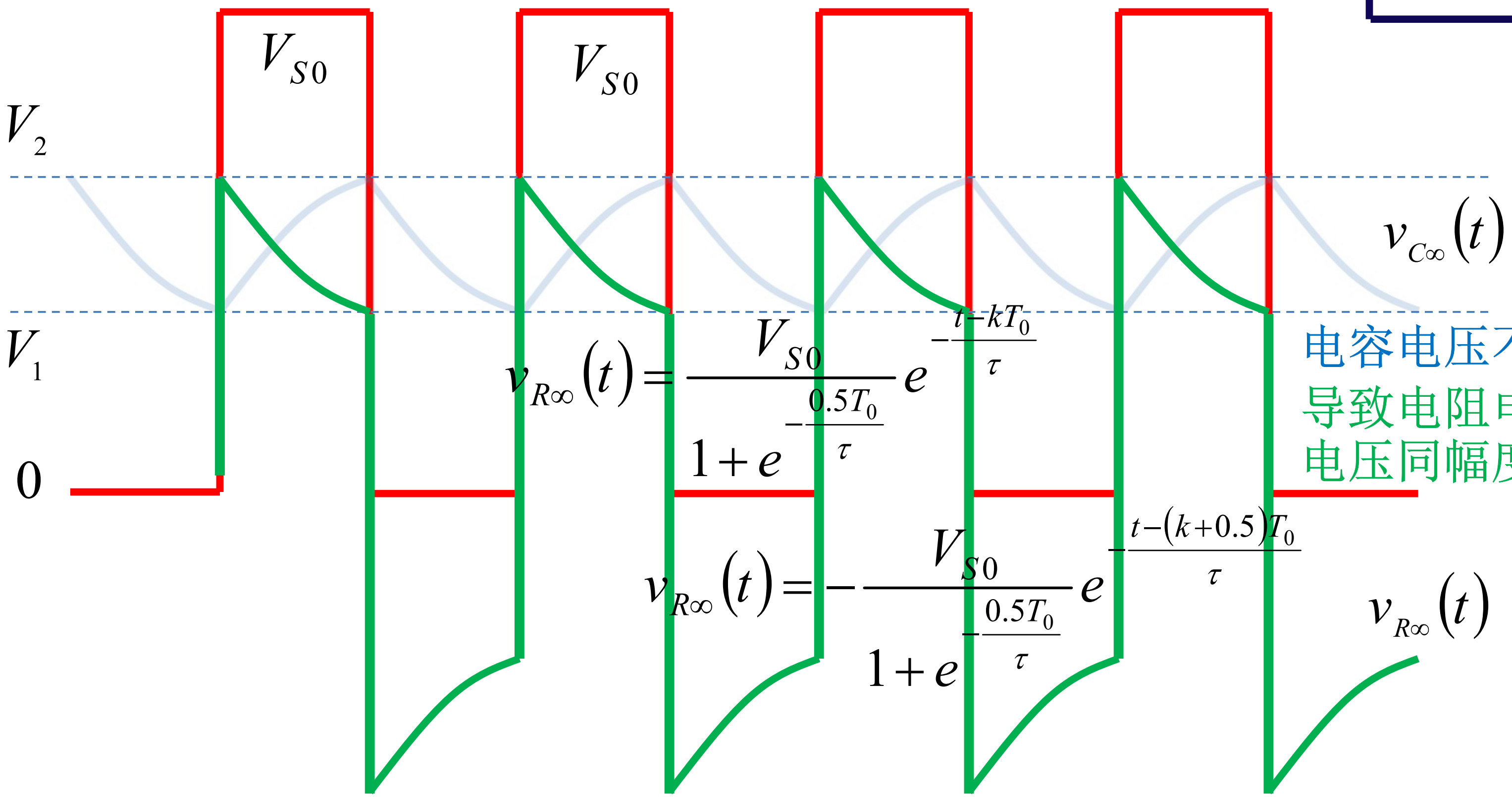
$$v_{R\infty}(t)=\frac{V_{S0}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}$$

$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0:$

$$v_{R\infty}(t)=-\frac{V_{S0}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

电阻电压稳态响应波形





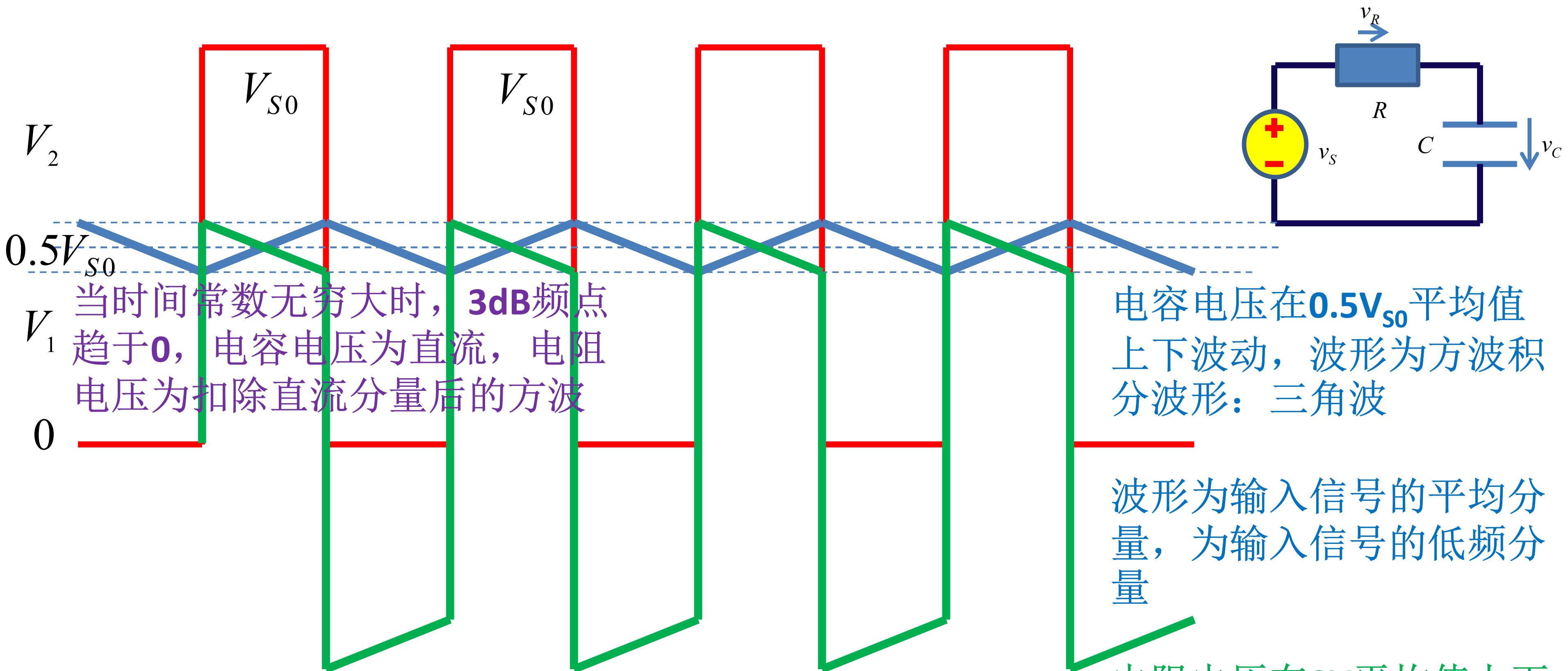
电容电压不能跳变：

导致电阻电压随输入电压同幅度跳变

电容电压是输入电压中的低频分量，电容电压平均值为**0.5V$_{S0}$**，取的是直流附近的分量

电阻电压是输入电压中的高频分量，电容隔断直流，电阻上没有直流电压，平均值为**0**

极致情况1：时间常数很大



当时间常数无穷大时，**3dB**频点趋于**0**，电容电压为直流，电阻电压为扣除直流分量后的方波

电容电压在**0.5V_{S0}**平均值上下波动，波形为方波积分波形：三角波

波形为输入信号的平均分量，为输入信号的低频分量

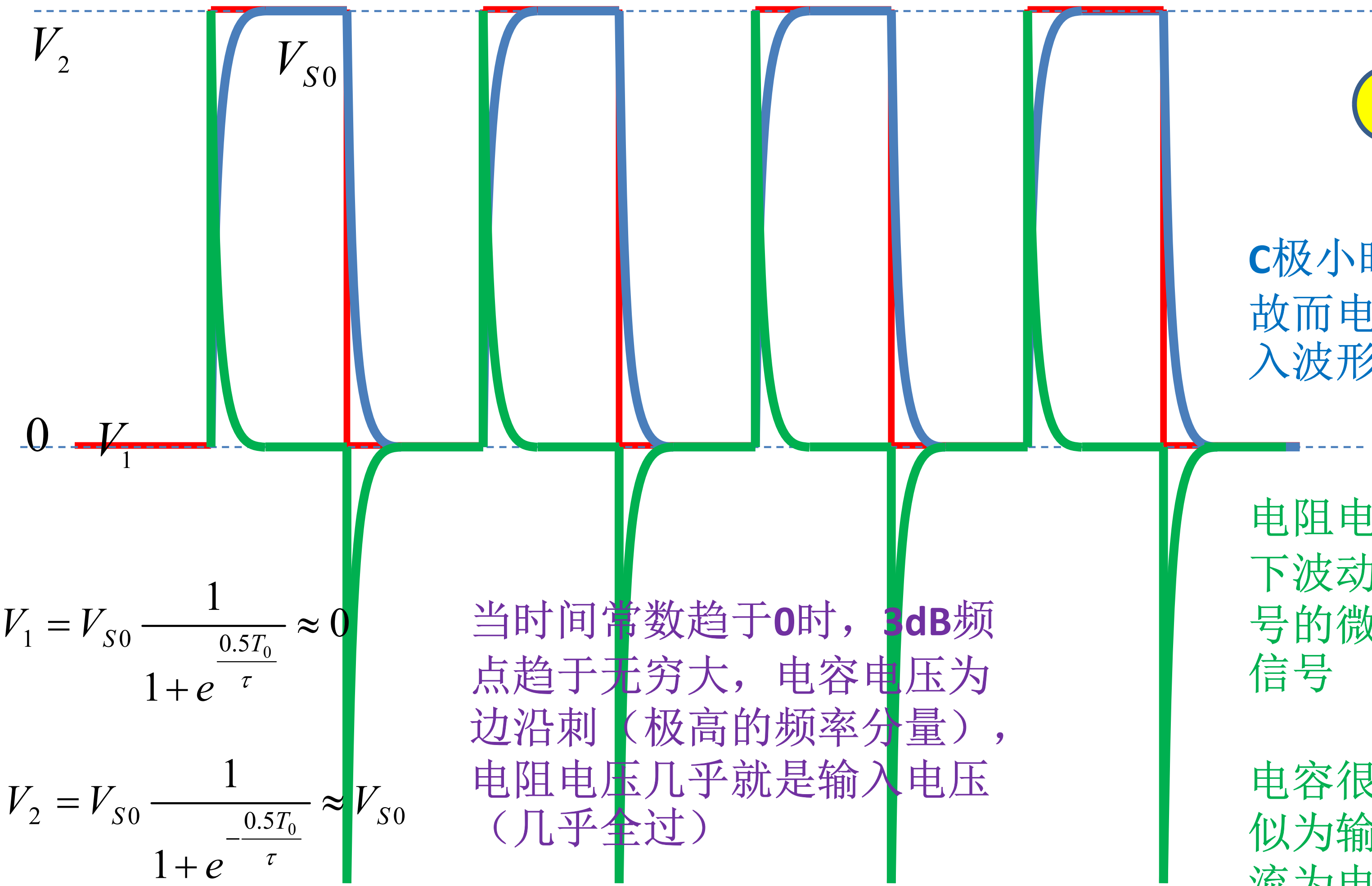
电阻电压在**0V**平均值上下波动，波形为输入信号去除了平均值后的高频分量

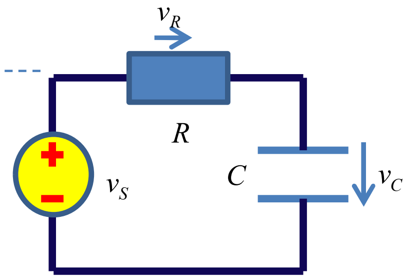
$$V_1 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx V_{S0}\frac{1}{1+1+\frac{0.5T_0}{\tau}} = \frac{V_{S0}}{2}\frac{1}{1+\frac{0.5T_0}{2\tau}} \approx \frac{V_{S0}}{2}\left(1-\frac{0.5T_0}{2\tau}\right)$$

$$V_2 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx V_{S0}\frac{1}{1+1-\frac{0.5T_0}{\tau}} = \frac{V_{S0}}{2}\frac{1}{1-\frac{0.5T_0}{2\tau}} \approx \frac{V_{S0}}{2}\left(1+\frac{0.5T_0}{2\tau}\right)$$

C极大时，**C**为耦合电容，隔直通交

极致情况2：时间常数很小





C极小时，近似开路，故而电容电压近似和输入波形一致

$$V_1 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx 0$$

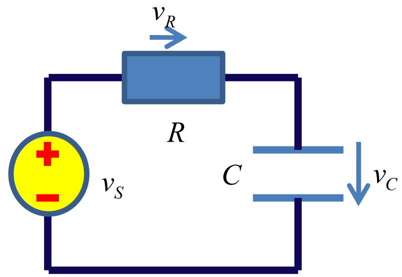
$$V_2 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx V_{S0}$$

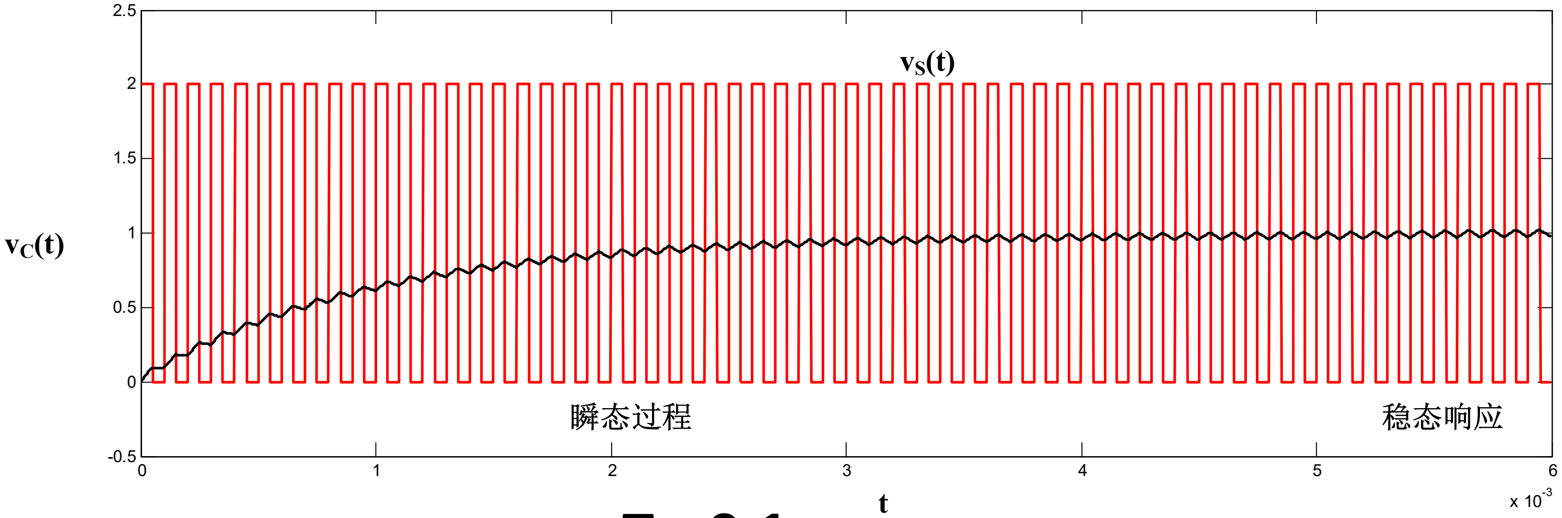
当时间常数趋于0时，3dB频点趋于无穷大，电容电压为边沿刺（极高的频率分量），电阻电压几乎就是输入电压（几乎全过）

电阻电压在0V平均值上下波动，波形为输入信号的微分波形：尖脉冲信号

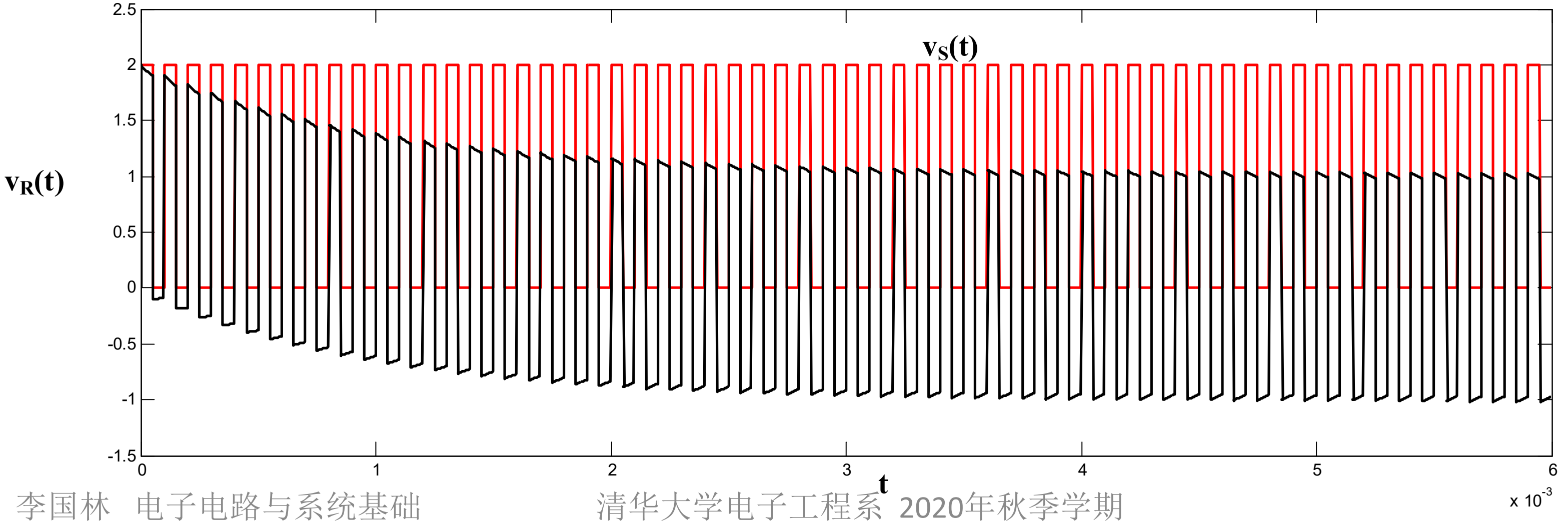
电容很小，电容电压近似为输入电压，电容电流为电容电压的微分，电容电流流过电阻形成脉冲电压波形

大电容求平均，通交隔直

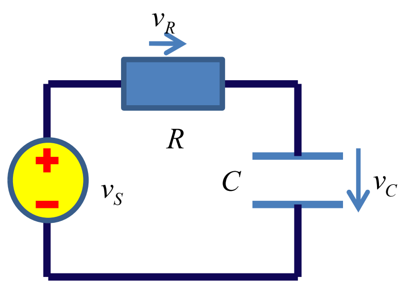


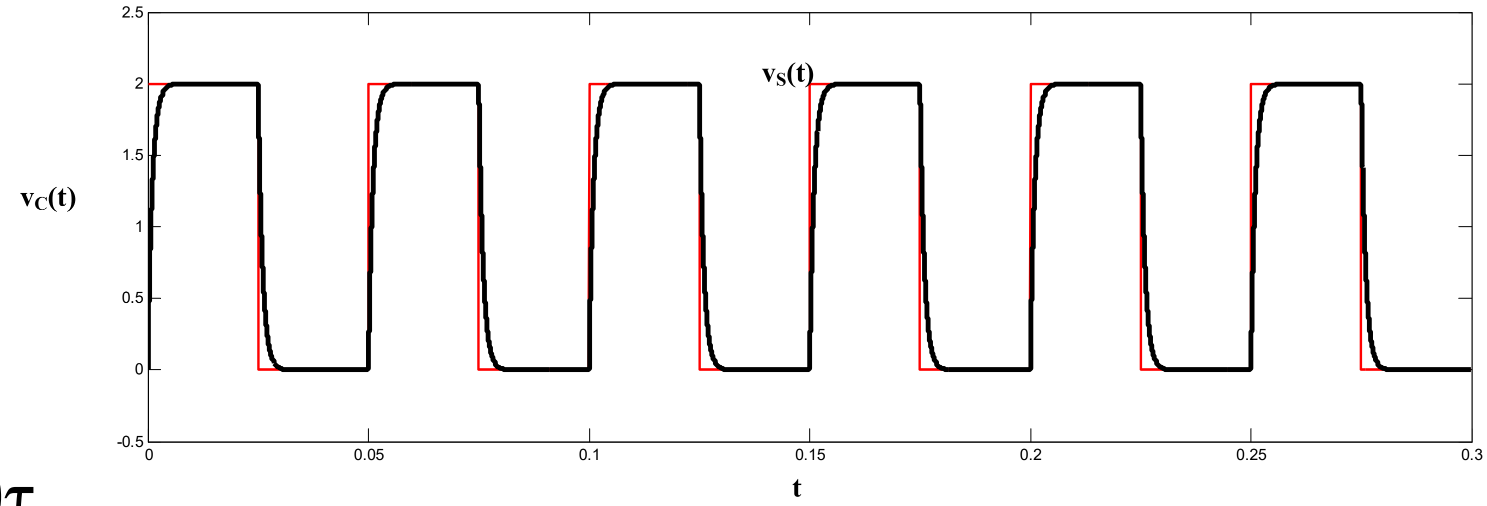


$T_0=0.1\tau$

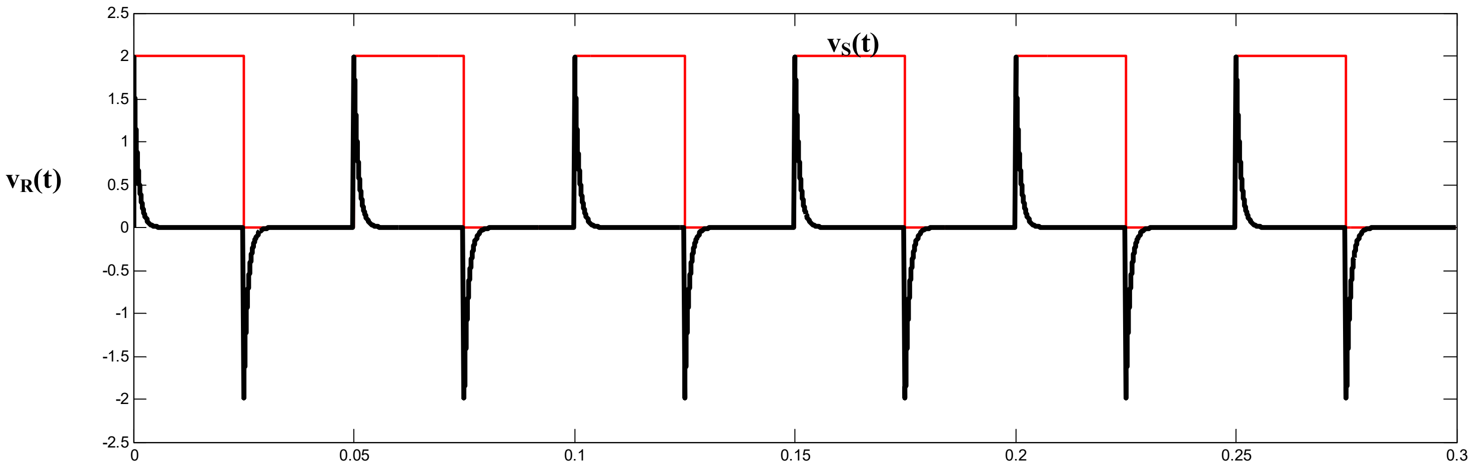


小电容几乎开路
微分波形加载电阻





$T_0=50\tau$



三要素法：表达式

$$v_{C\infty}(t)=\begin{cases} V_{S0}\left[1-\dfrac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}\right] & kT_0\le t\le (k+0.5)T_0 \\ V_{S0}\dfrac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}} & (k+0.5)T_0\le t\le (k+1)T_0 \end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\ldots)$$

$$v_C(0^+)=0 \qquad \tau=RC \qquad v_{C\infty}(0^+)=V_1=V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+\left(v_C(0^+)-v_{C\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=v_{C\infty}(t)-V_{S0}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$v_R(t)=v_{R\infty}(t)+\left(v_R(0^+)-v_{R\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=\ldots$$

无需写出表达式，只需理解波形即可

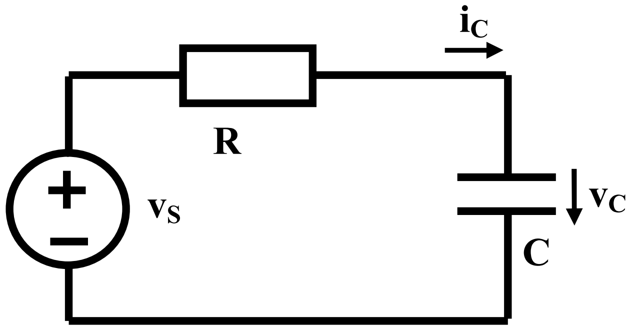
本节小结

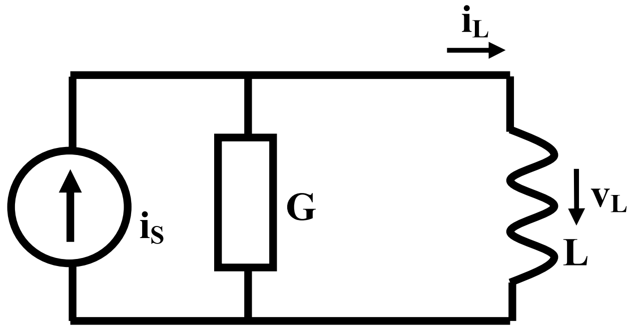
- 一阶**RC**电路的关键参量是时间常数τ=**RC**
  - 对偶地，一阶**RL**电路的时间常数为τ=**GL**
  - 一阶电路的动态行为，其时间尺度以τ作为比对基准
    - 一个τ，变化**63.2%**；**5**τ，和稳态之差小于**1%**；**7**τ，和稳态之差小于**0.1%**；…
- 线性时不变动态系统的全响应可分解为零输入响应和零状态响应
  - 对状态方程进行时域积分法获得此结论，是线性系统叠加定理的体现
    - 零输入响应对应的源为电容初始电压或电感初始电流的等效源
    - 零状态响应对应的源为系统外加激励源
- 一阶线性时不变动态电路在周期信号（正弦波、方波、直流等）激励下，可分解为瞬态响应和稳态响应，从而可以用三要素法给出解析解形态
  - 全响应=稳态响应+（初值-稳态初值）$e^{-t/\tau}$
  - 稳态响应的求解方法
    - 直流激励：电容开路，电感短路
    - 正弦激励：相量法
    - 方波激励：方波的两个状态时段视为直流激励，用三要素获得稳态解

$$x(t)=x_\infty(t)+\left(x(0^+)-x_\infty(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

$$x(t)=x_\infty(t)+\left(x(t_0^+)-x_\infty(t_0^+)\right)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \qquad (t>t_0)$$

作业一、RC对偶GL





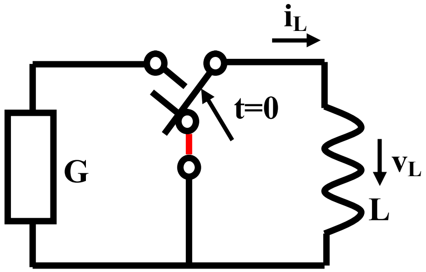
- 图示的一阶**RC**电路对偶一阶**GL**电路（习惯称之为**RL**电路），对一阶**RC**电路成立的结论对一阶**RL**电路同样成立，只需置换对偶量即可

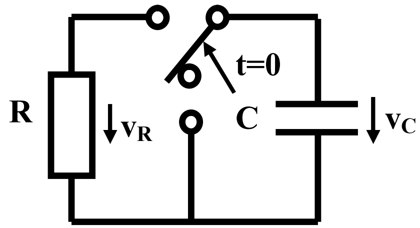
$$(t \geq 0)$$

$$v_C(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t v_S(\lambda) \cdot e^{\frac{\lambda - t}{\tau}} d\frac{\lambda}{\tau} \qquad i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t i_S(\lambda) \cdot e^{\frac{\lambda - t}{\tau}} d\frac{\lambda}{\tau}$$

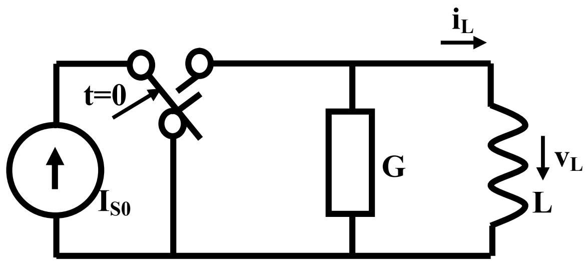
$$\tau = RC \qquad \tau = GL$$

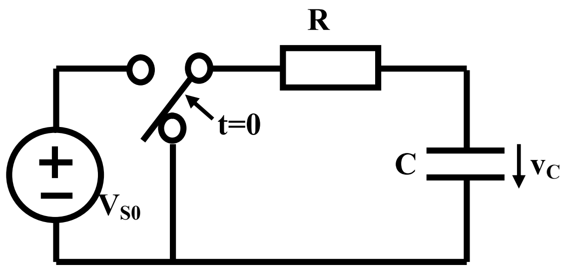
电感放磁、充磁曲线





- （1）练习9.2.2 分析图示一阶**RL**电路的零输入响应，假设开关在**t=0**时刻拨动，开关拨动前的电感初始电流为I_0
  - 给出电感电流放磁曲线，和放磁电压时域波形：表达式和曲线





- （2）练习9.2.4 分析图示一阶**RL**电路的零状态响应，假设开关在**t=0**时刻换路，开关换路前放磁已经结束，电感初始电流为**0**
  - 给出电感电流充磁曲线，和充磁电压时域波形：表达式和曲线

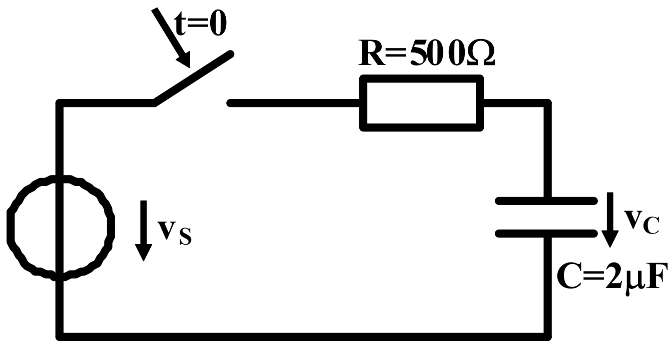
作业2 正弦激励

- 如图所示，**t=0**时刻开关闭合，正弦波电压激励源加载到一阶**RC**串联电路端口

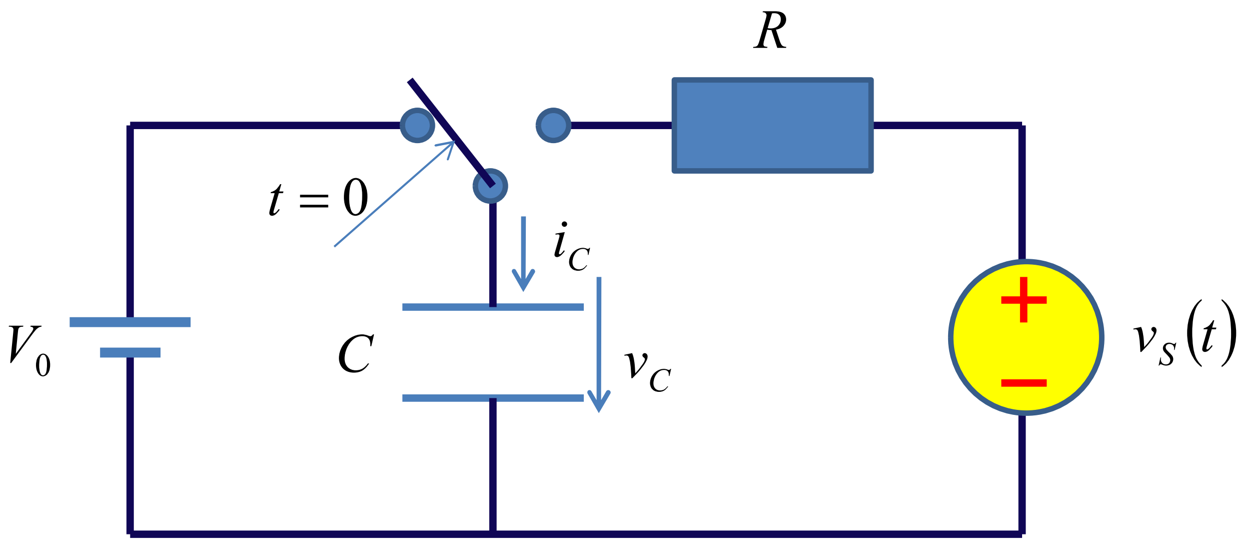
$$v_S(t)=2\cos\omega_0 t$$

  – 其中，$\omega_0=2\pi f_0 \quad f_0=500Hz$

- 假设电容初始电压为**0**，**$v_C(0)=0$**，请给出电容电压时域表达式



作业3 斜升信号稳态响应



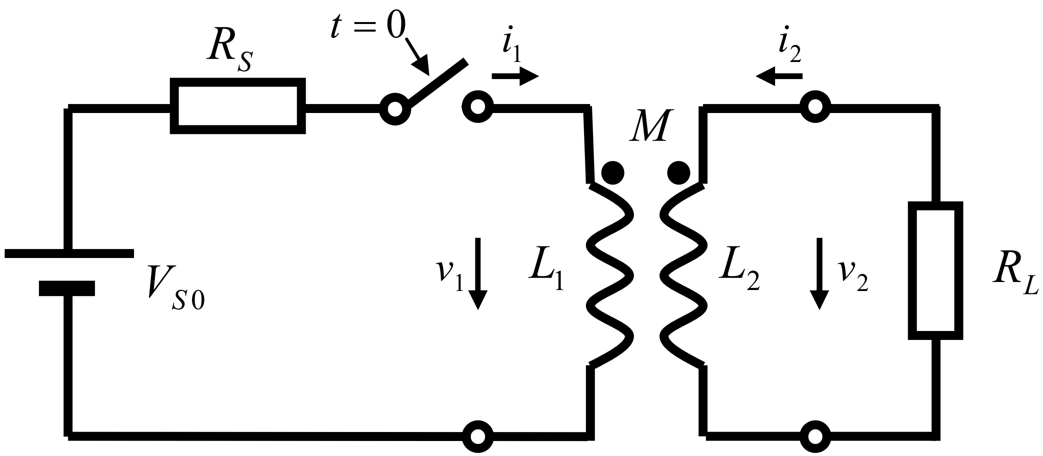
$v_S(t) = \frac{V_{S0}}{\tau_S} t$　　假设激励源是一个斜升信号，请给出电容电压表达式。

思路：三要素法：代入稳态响应表达式，或者猜解的形态

$$v_{C\infty}(t) = \int_{-\infty}^{t} v_S(\lambda) \cdot e^{\frac{\lambda - t}{\tau}} d\frac{\lambda}{\tau}$$

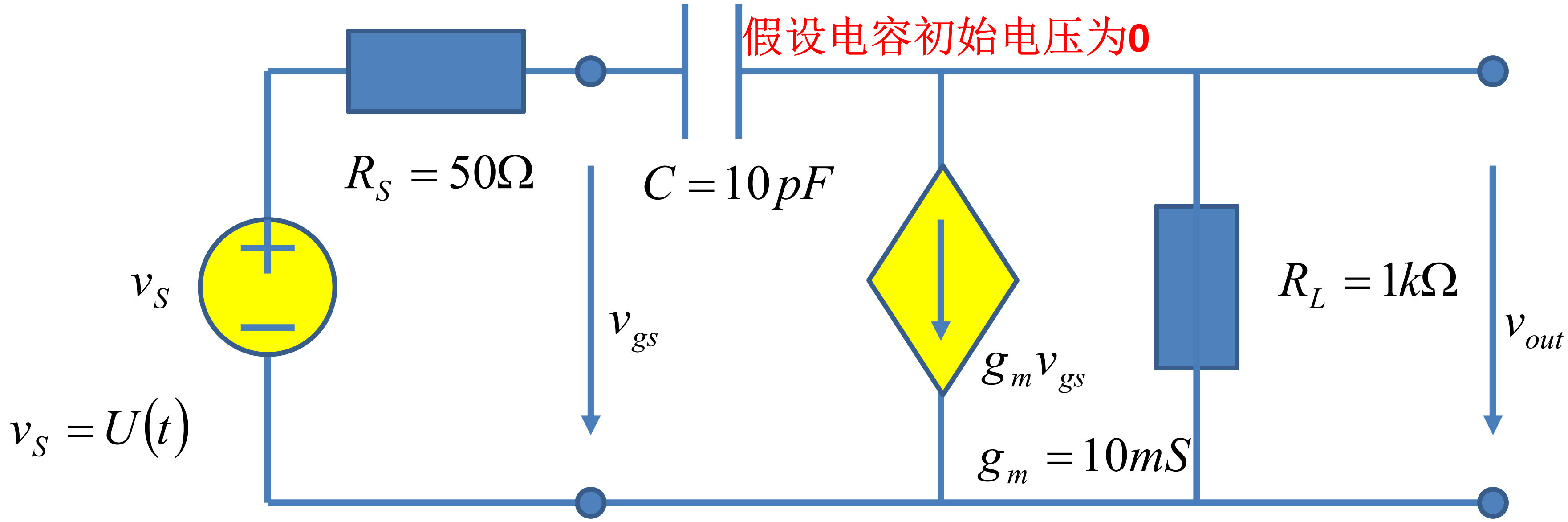
作业4 全耦合变压器是一阶元件

- 练习9.2.6 如图E9.2.9所示，这是一个全耦合变压器电路。开关在t=0时刻闭合，求变压器两个端口的电压时域表达式。



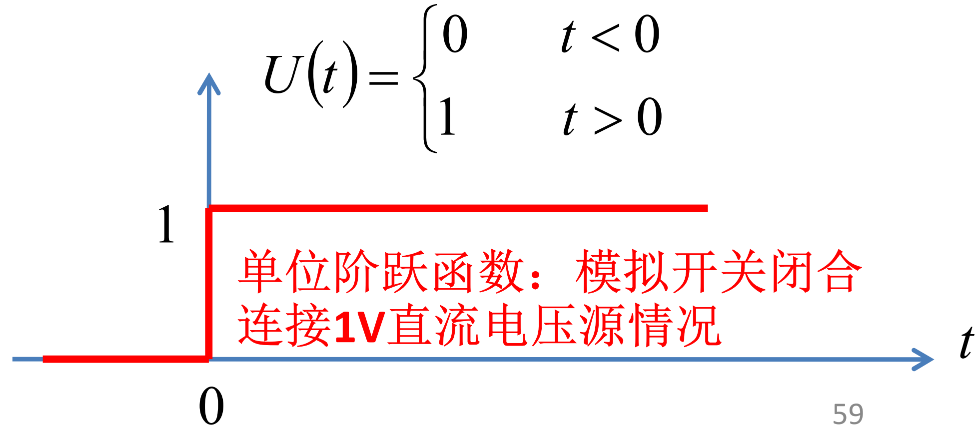
$$M=\sqrt{L_1L_2}$$

作业5 三要素法适用一阶RC电路



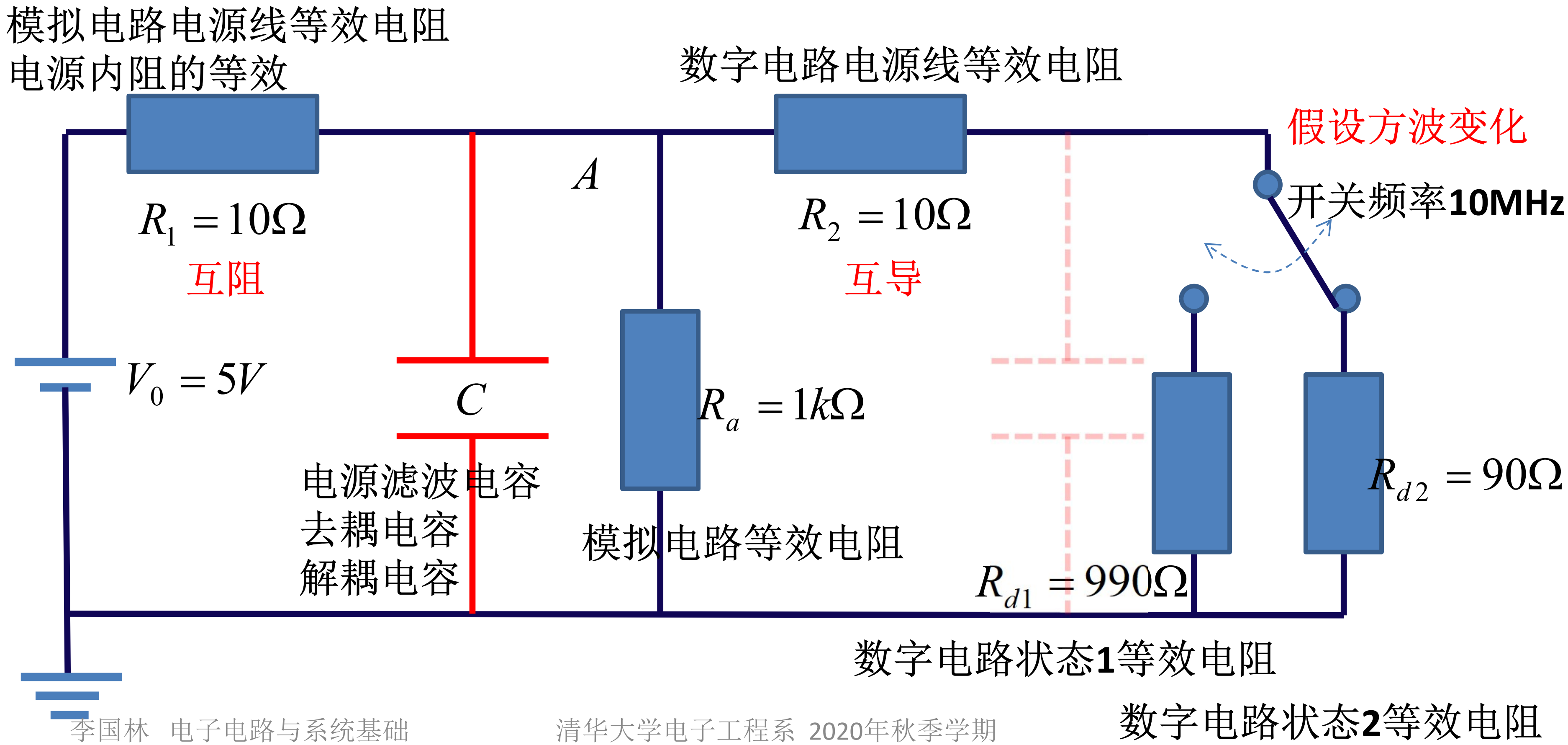
方法一、用三要素法获得电容时域波形**$v_C(t)$**，进而获得输出电压时域波形**$v_{out}(t)$**，表达式和曲线

方法二（选作）、用三要素法直接获得输出电压时域波形**$v_{out}(t)$**

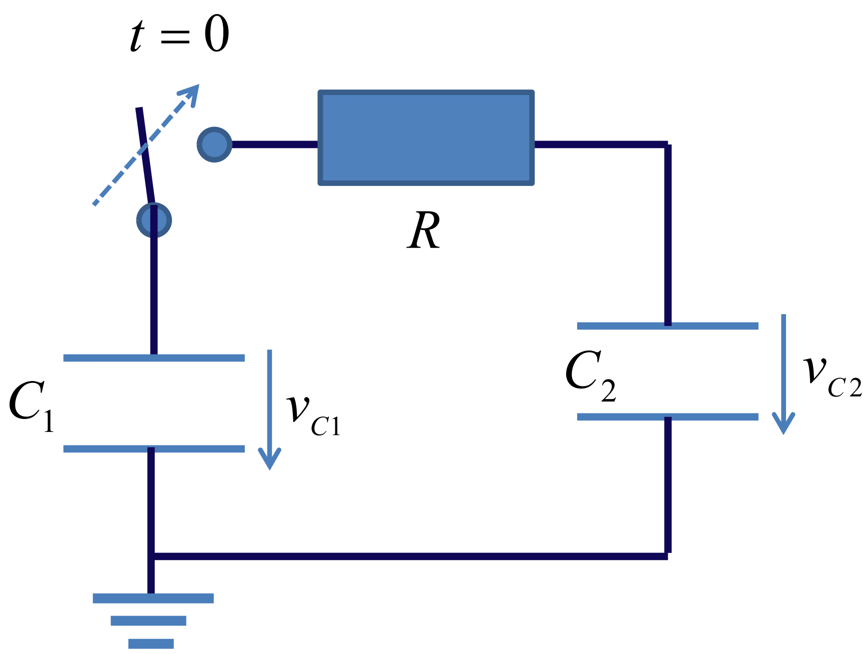


作业6：用电容做电源滤波

- （1）假设没有滤波电容，求模拟电路电源端A点的电压波形
- （2）多大的电容，可以使得A点电压波形起伏是没有电容时的1/10



作业7 电容电荷的重新分配



- **t<0**时刻，**C_1**电容初始电压为**V_0**，**C_2**初始电压为**0**
- 在**t=0**时刻，开关闭合，求电容**C_1**、**C_2**两端电压变化规律，写出表达式，画出时域波形
  - 电荷重新分配过程中，电阻消耗多少能量？能量是否守恒？
- 考察**R**越来越小趋于**0**的变化过程中，回路电流是如何变化的？电容电荷的重新分配情况怎样？
  - 当**R=0**（短接线连接）时，电容电荷的重新分配是瞬间完成的，电容电压发生突变！出现无界电流！

仿真作业

- 题5计算获得电容值，置于A位置，仿真确认满足设计要求
- 将电容从A位置移到B位置，仿真，说明是否满足设计要求
- 将电容拆分为两个电容，分别置于A，B两个位置，...
- 将电容拆分为3个电容，置于A，B及互导电阻中间，...
- 将电容拆分为4个电容，置于A，B及互导、互阻电阻中间，...
- 总结：功能电路的去耦电容应该置于什么位置最好？
- 继续研究：模拟电路还是数字电路离电源更近了好？