

电子电路与系统基础II

理论课第**3**讲

线性时不变动态电路的相量分析法

李国林

清华大学电子工程系

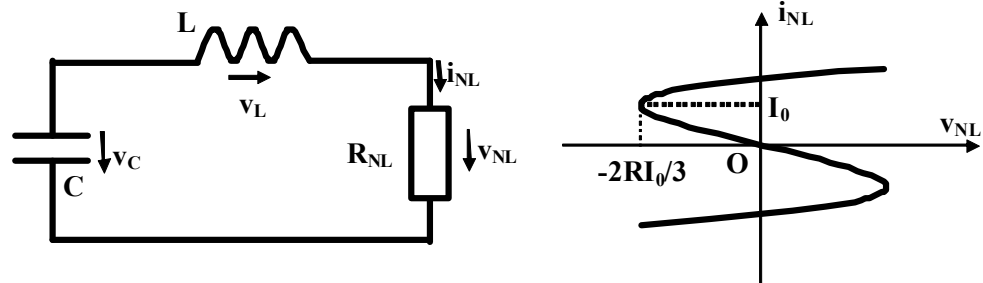
相量法 大纲

- 动态电路状态方程的数值解方法
 - 前向欧拉法，后向欧拉法
- 相图：时域考察
 - 动态系统的状态转移图：可以直观地了解该动态系统的动态行为，它是如何从前一状态转移到下一状态的
- 相量法：频域考察
 - 相量法仅适用于线性时不变动态电路的正弦稳态响应
 - 在频域处理
 - 微分方程变代数方程方便处理
 - 对频域特性的考察是直观的，如滤波特性
 - 线性时不变电路是电路基础的核心内容，正弦函数是电路信号的基函数，因而对相量法的掌握是理解一大类动态电路的关键

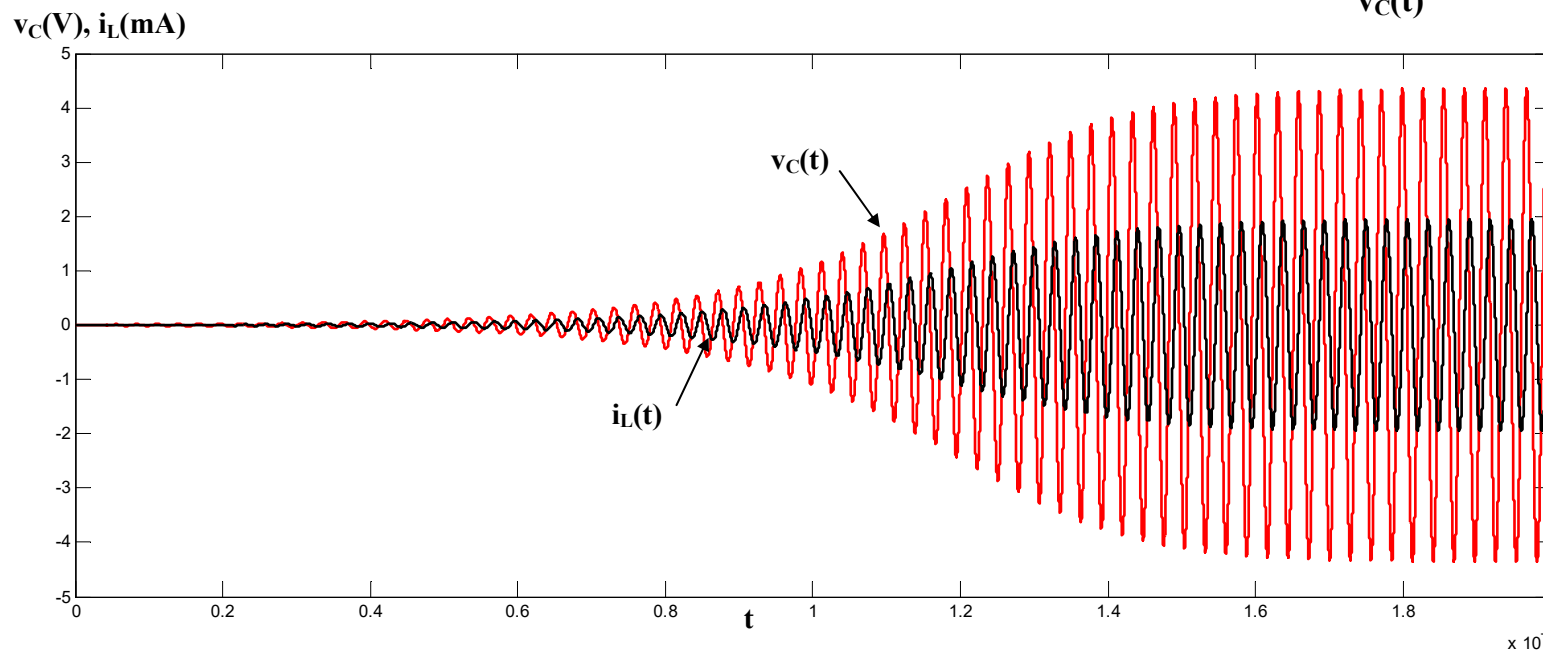
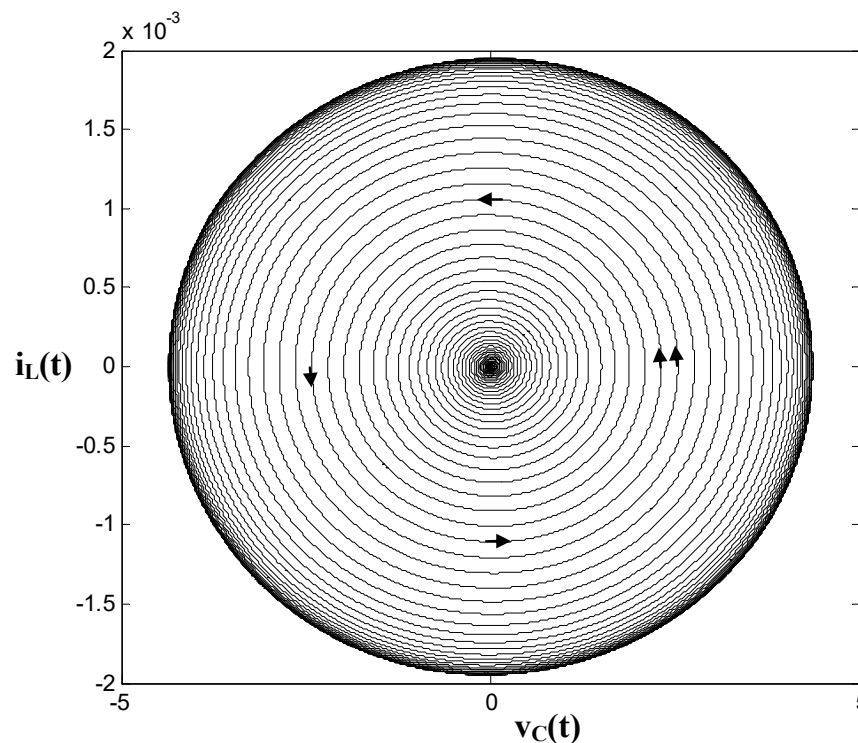
一、相图

- 以动态系统的独立状态变量为坐标轴构成的空间被称为该动态系统的状态空间
 - 状态空间中的一个点被称为该动态系统的一个状态
- 从某个初始状态出发，随着时间的推进，状态发生转移，进入下一个状态，将空间中的这些随时间变化而转移的状态点连成曲线，这条曲线被称为相轨迹
 - 不同初始状态点出发形成的所有相轨迹的集合就是该动态系统的相图
 - 在实际描述相图时，往往只画数条相轨迹来说明相图的特性，无需也难以画出所有初始状态点出发构成的相轨迹

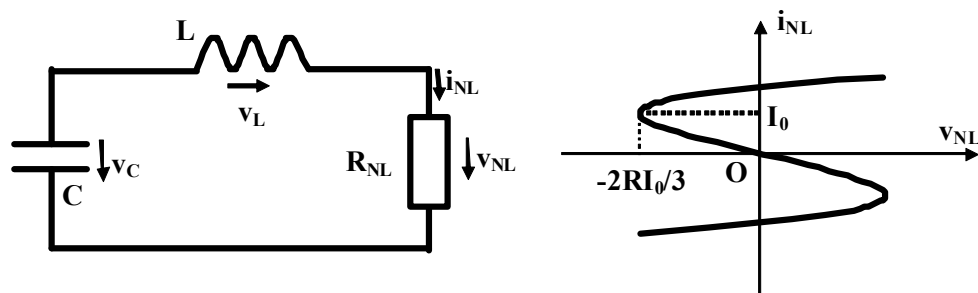
LC负阻正弦波振荡器的相图



$L=100\mu\text{H}$, $C=20\text{pF}$, $R=100\Omega$, $I_0=1\text{mA}$
 $v_C(0)=10\text{mV}$, $i_L(0)=0$



如何解释这个相图



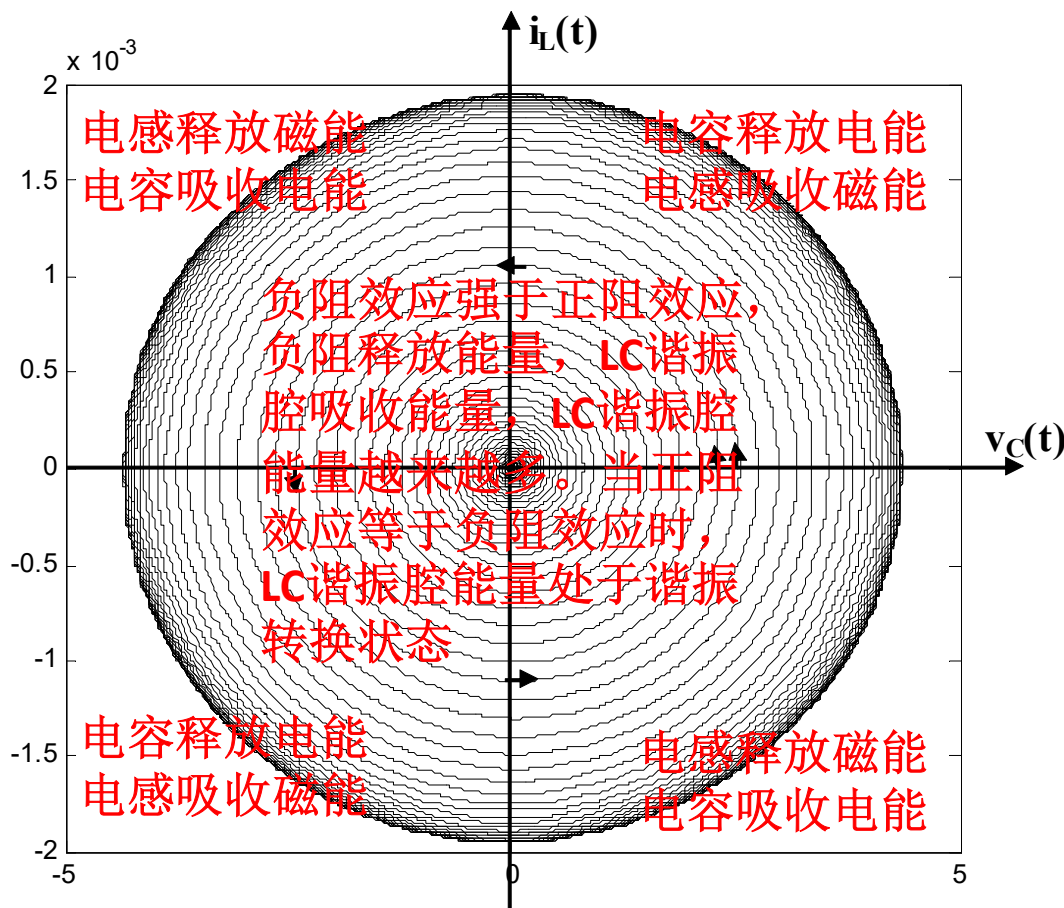
相图最终稳定在一个圆形极限环上

$$\left(\frac{i_L(t)}{I_{Lm}}\right)^2 + \left(\frac{v_C(t)}{V_{Cm}}\right)^2 = 1$$

分析结果表明电容电能和电感磁能的相互转换是完全的

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} Li_L^2(t) + \frac{1}{2} Cv_C^2(t) \\ & = E_C(t) + E_L(t) = \text{Constant} \end{aligned}$$

说明回路中没有电阻的影响，也就是说，当回路振荡幅度为 $2I_0$ 时，S型负阻的正阻效应恰好抵偿负阻效应，从而回路中只剩下纯L和纯C：电感释放磁能，电容吸收电能，电容释放电能，电感吸收磁能



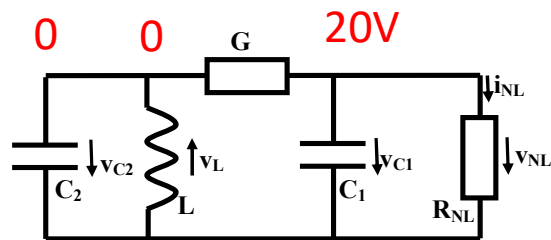
相图描述

- 二阶动态系统，二维平面上的相轨迹曲线十分直观
 - 相轨迹如果收敛于某个极限环，则说明出现周期振荡波形
 - 极限环是圆形，则正弦波振荡（振荡器）
 - 相轨迹如果收敛于某个点，此点则为稳定平衡点，系统在该点附近是稳定的（耗散系统：正阻耗能）（放大器直流工作点位置）
 - 相轨迹如果从某个点发散出去，此点则为不稳定平衡点，系统在该点附近是不稳定的（发散系统：负阻释能）（振荡器直流工作点位置）
- 三阶动态系统，三维空间的相轨迹曲线可借助计算机作图
- 更高阶动态系统的相图，则降阶考察
 - 4阶， $x_1x_2x_3x_4$ ，考察 $x_1x_2x_3$ ， $x_2x_3x_4$ ， $x_3x_4x_1$ ， $x_4x_1x_2$
 - 高阶非线性动态系统可能形成混沌，波形看似周期振荡，却不可预测（对初值和噪声极度敏感，不可重复），相轨迹不收敛，不发散，在状态空间的有限空间内混沌运动

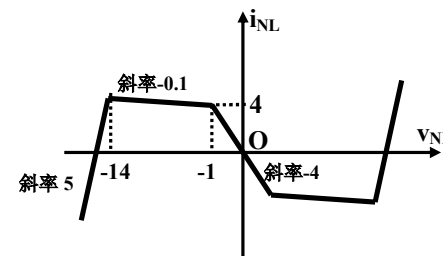
蔡氏电路

Chua's Circuit

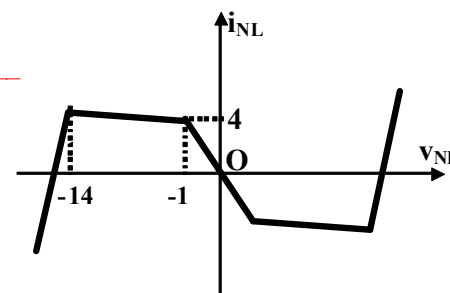
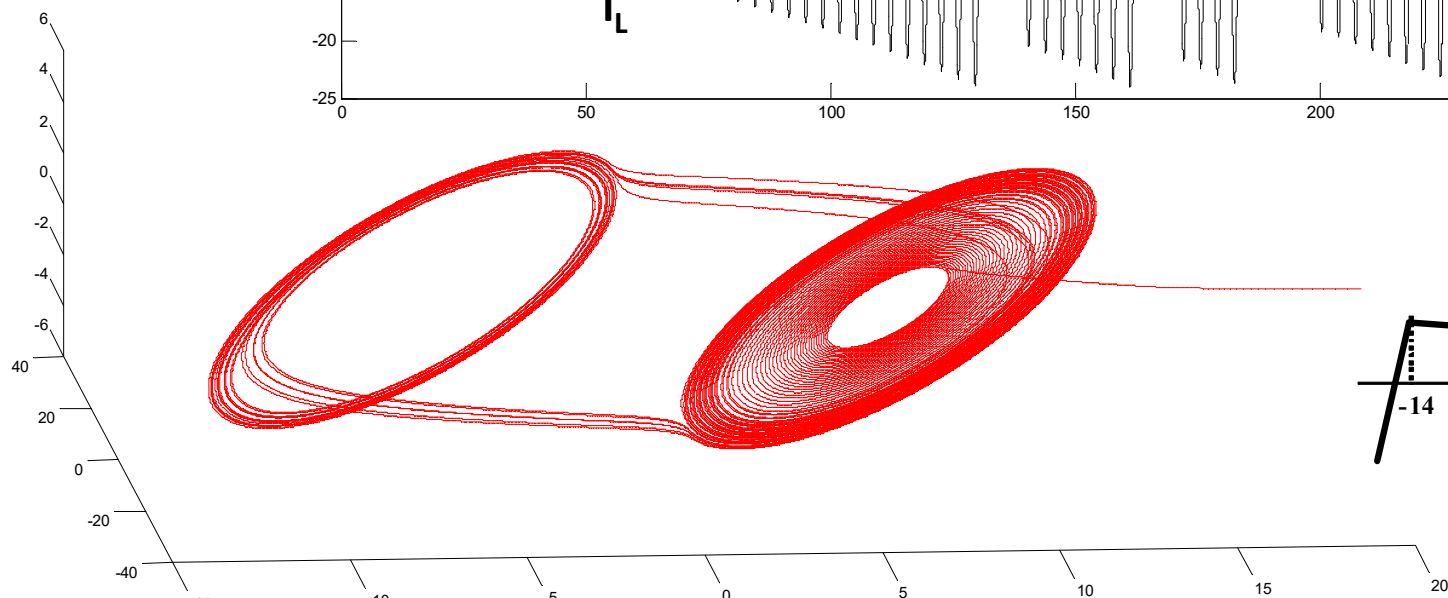
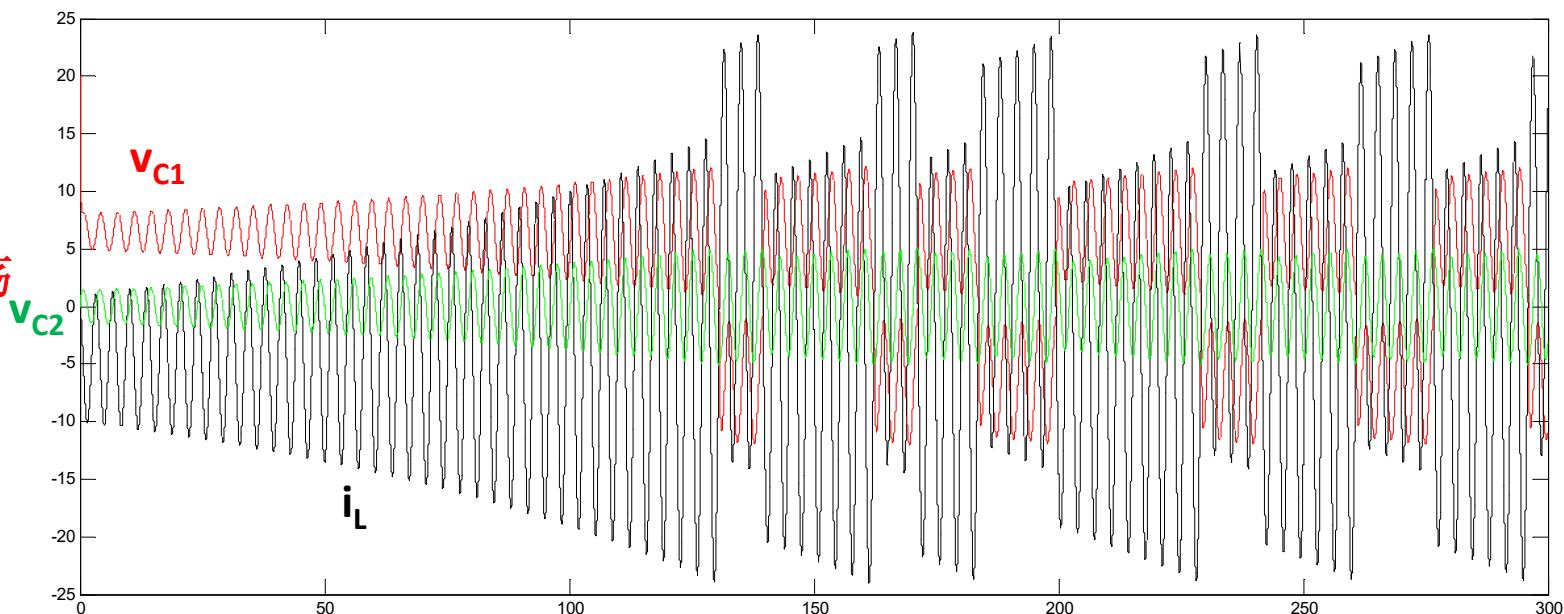
蔡少棠

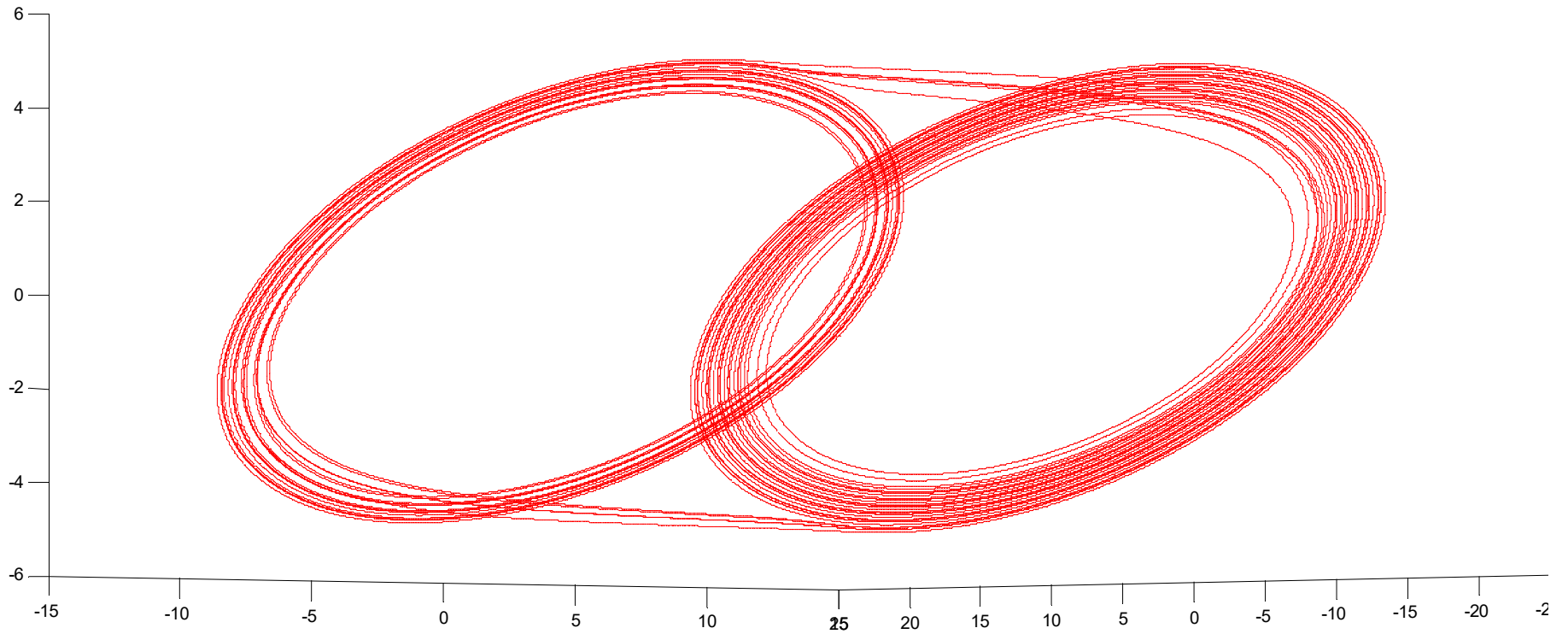
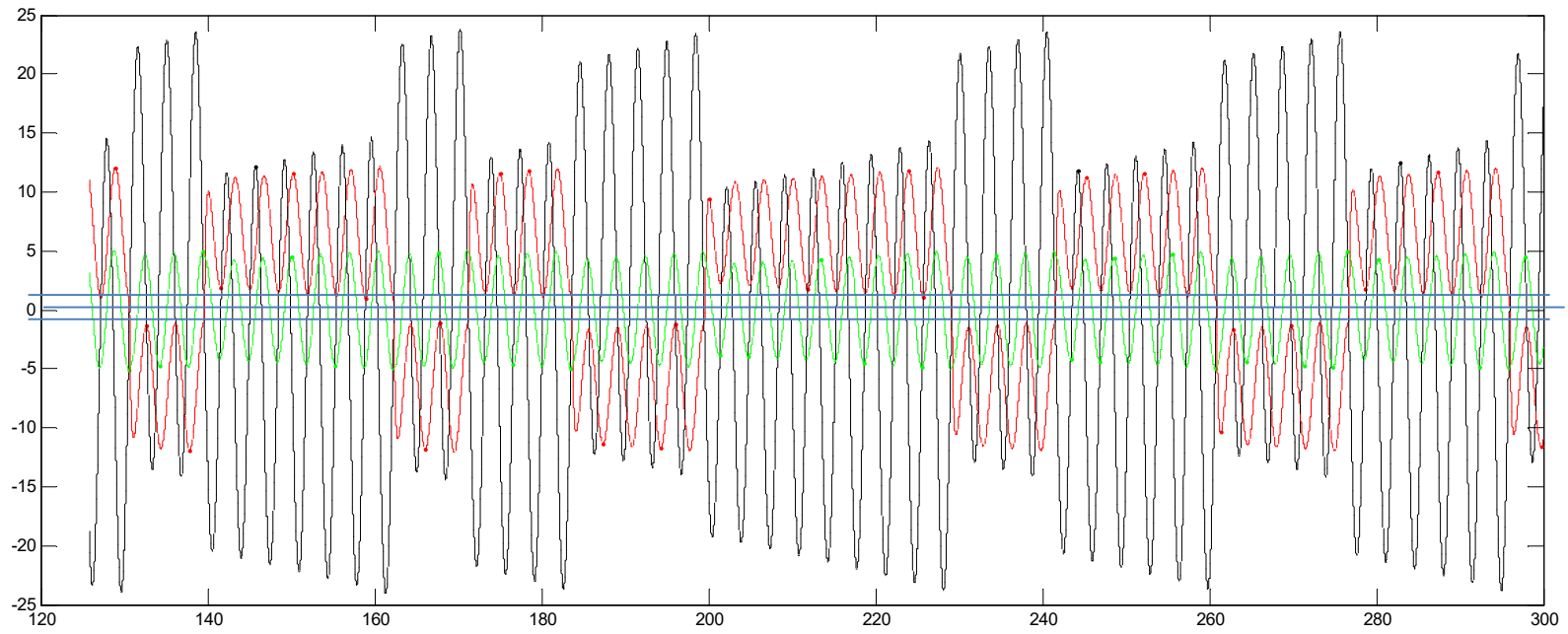


$C_1=0.1F, C_2=2F, L=0.143H, G=0.7S$



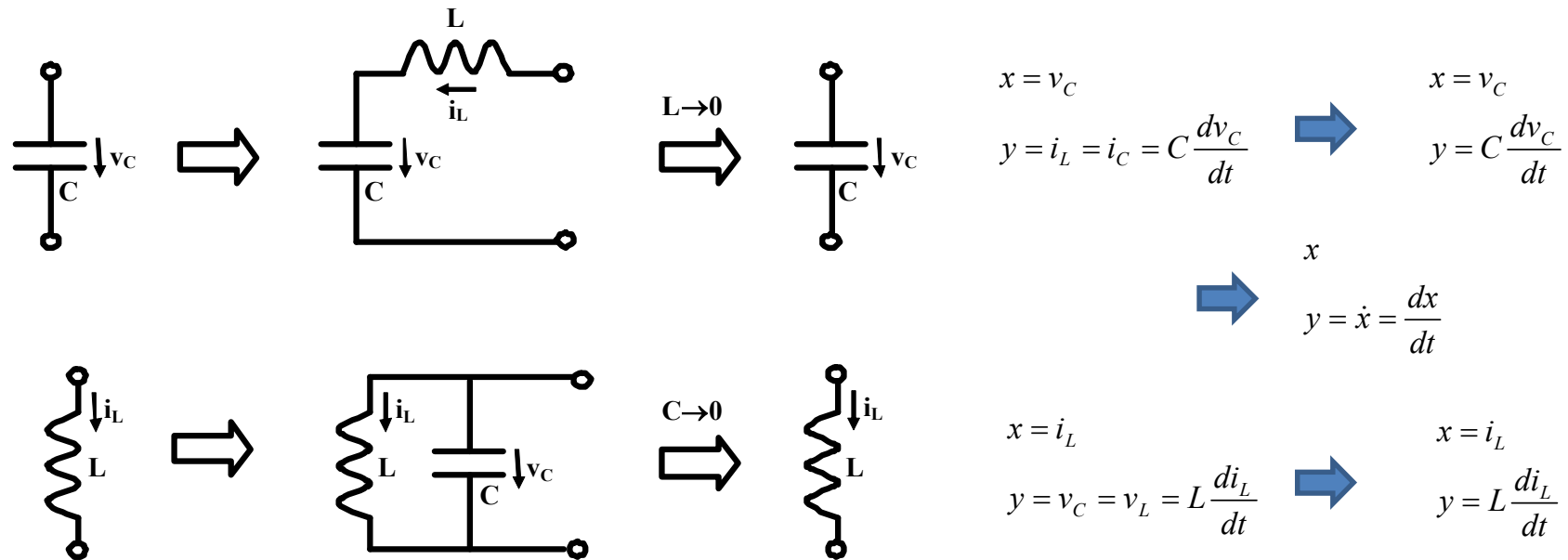
时髦：混沌
经典：寄生振荡



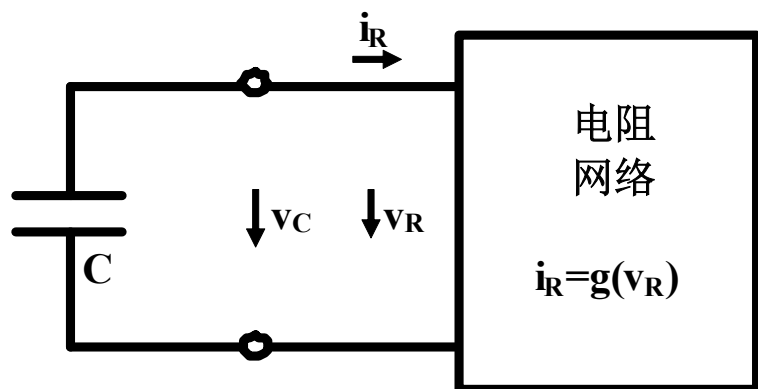


一阶动态系统的相图

- 严格用状态空间定义考察一阶动态系统的相图，一阶系统相图在一维空间（一个坐标轴）上运动
- 为了更加直观理解一阶系统的动态行为，将一阶系统视为二阶系统的极致情况，从而可用二阶系统的二维平面相图考察一阶动态系统的行为



单电容一阶动态系统

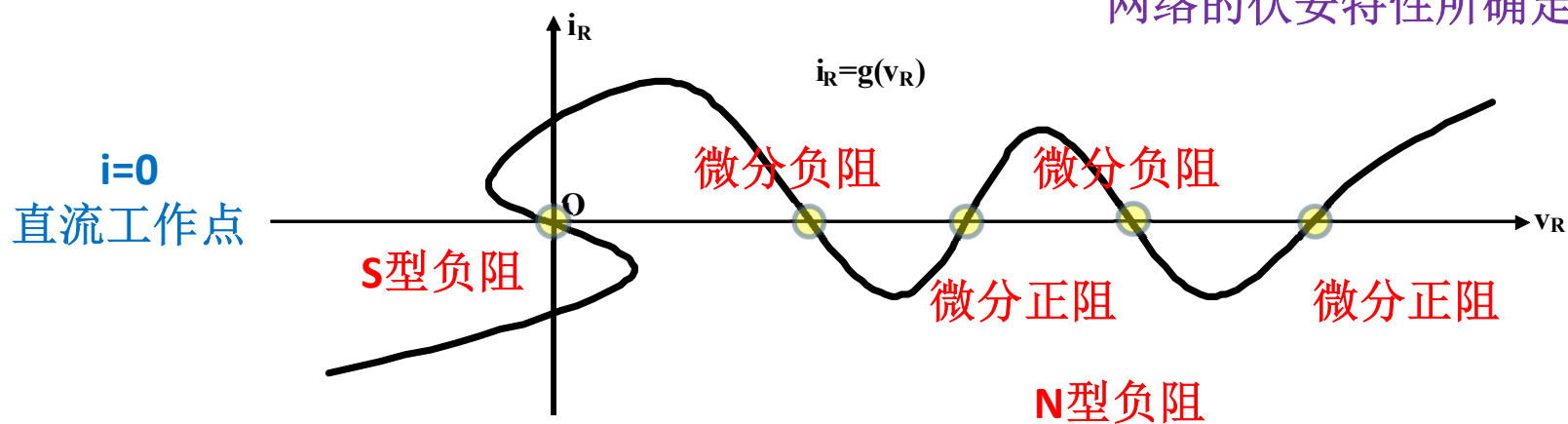


$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C = -\frac{1}{C} i_R = -\frac{1}{C} g(v_R) = -\frac{1}{C} g(v_C)$$

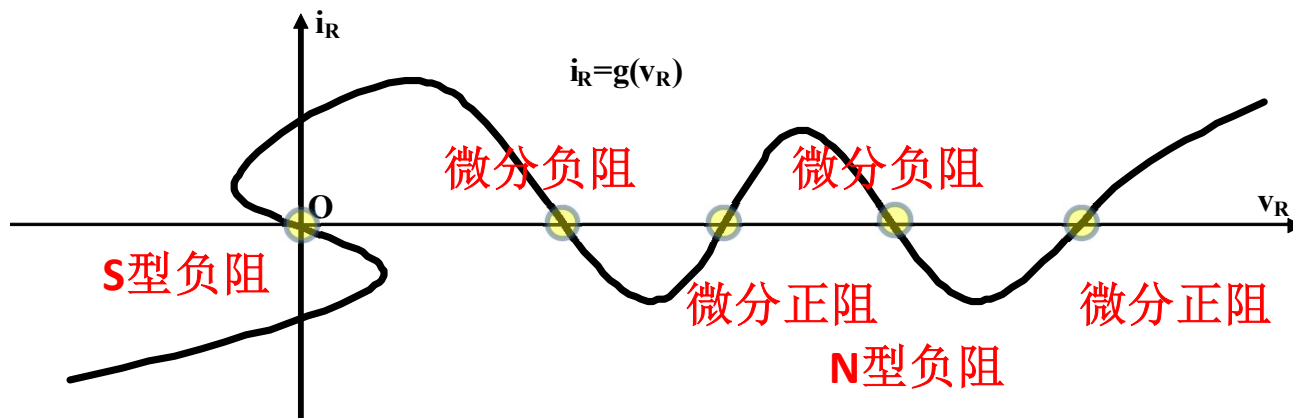
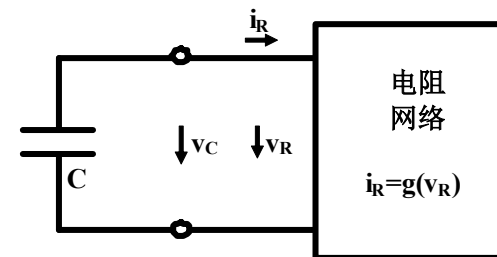
$$x = v_C(t)$$

$$y = \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} g(v_C) = -\frac{1}{C} g(x)$$

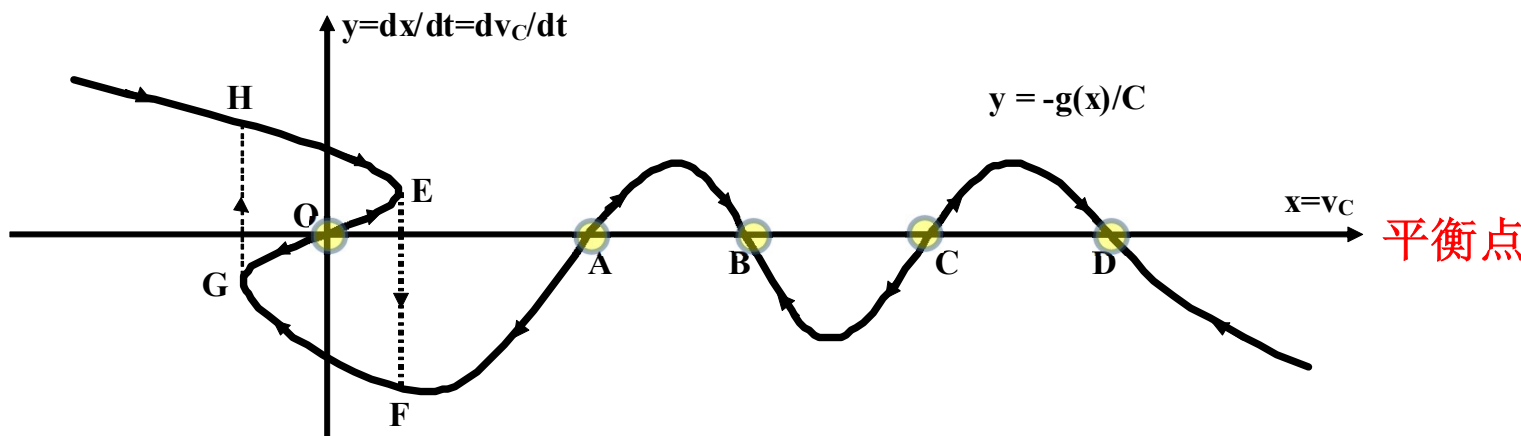
一阶动态系统的相轨迹由电阻网络的伏安特性所确定



一阶动态系统的相图分析



平衡点就是直流工作点：电容开路 ($i_C=0$) 或电感短路 ($v_L=0$) 情况
 直流工作点位置的微分电阻为负阻，则为不稳定平衡点
 直流工作点位置的微分电阻为正阻，这为稳定平衡点： $t \rightarrow \pm\infty$ 进入该状态



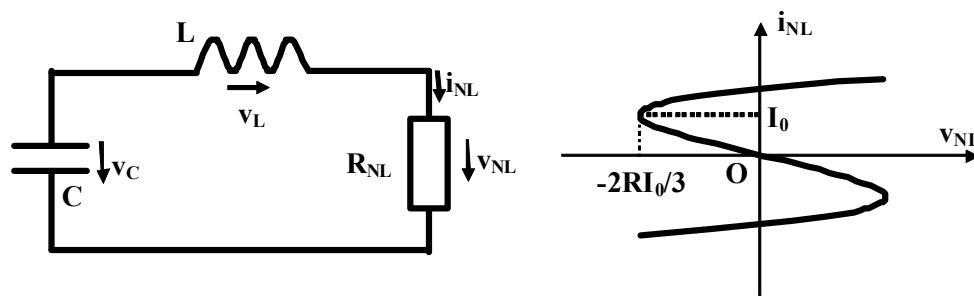
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} > 0$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

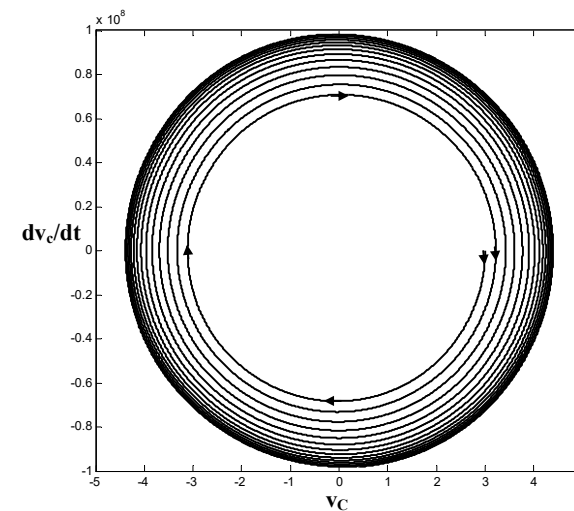
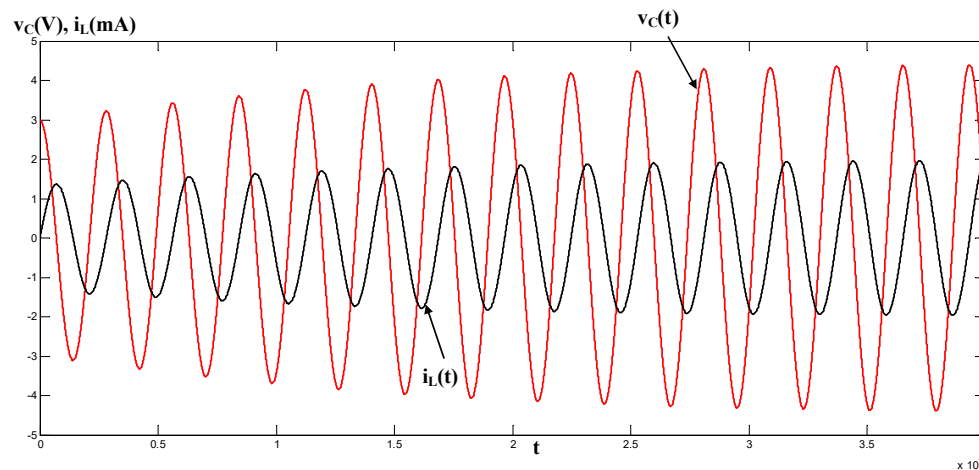
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} < 0$$

S型负阻和电容可构成张弛振荡，**N**型负阻和电容则不会振荡
 对偶地，**N**型负阻和电感可构成张弛振荡，**S**型负阻和电感则不会振荡

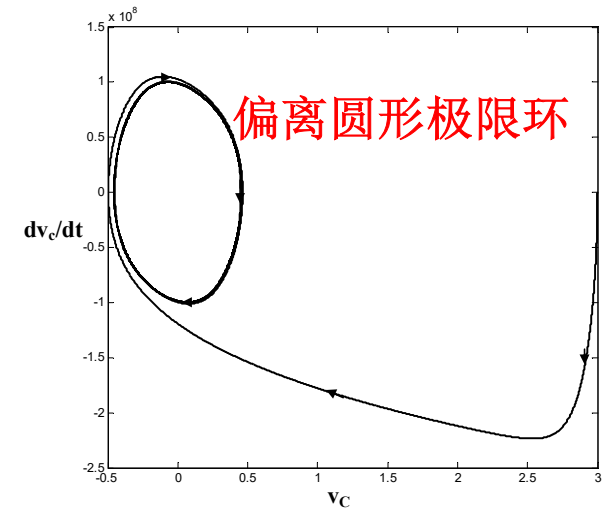
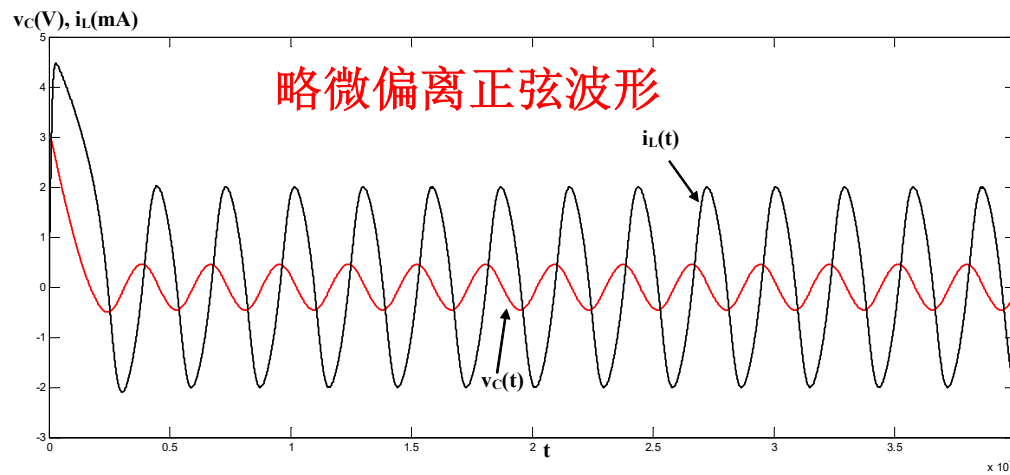
二阶正弦振荡退化为一阶张弛振荡 的数值仿真例



$C=20\text{pF}$, $R=100\Omega$, $I_0=1\text{mA}$
 $v_C(0)=3\text{V}$, $i_L(0)=0$
 $L=100\mu\text{H}$, $1\mu\text{H}$, 10nH , 0.1nH
 由二阶系统退化为一阶系统，
 由正弦振荡转化为张弛振荡

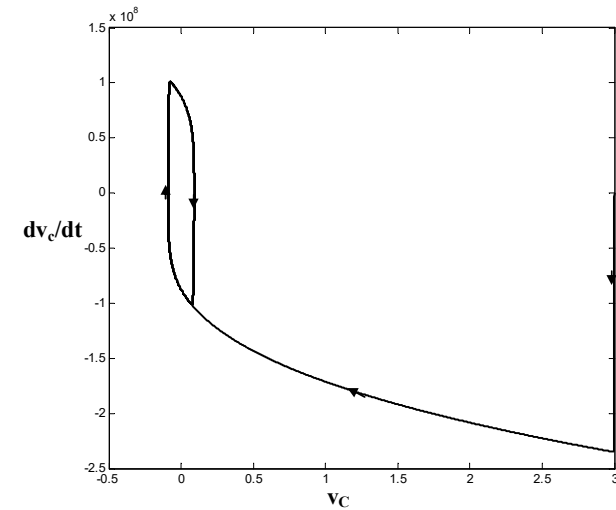
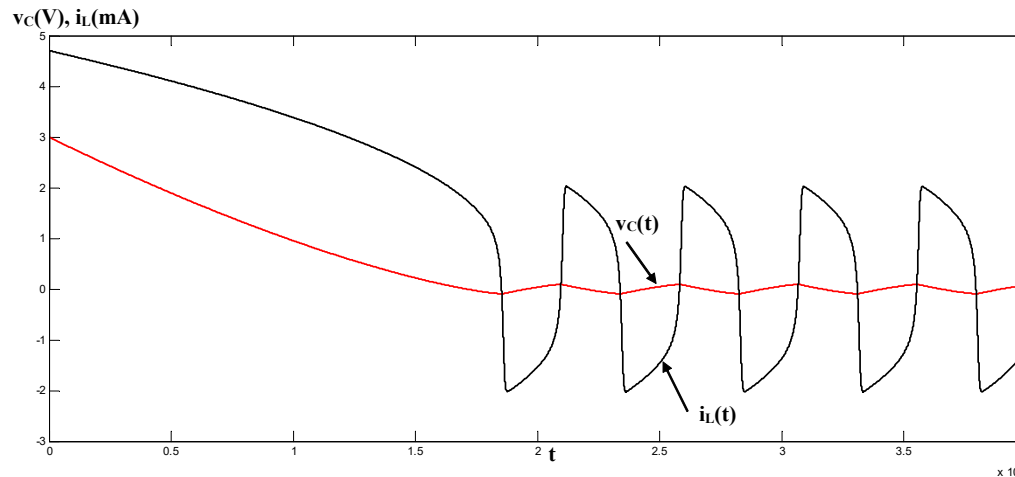


$L=100\mu\text{H}$



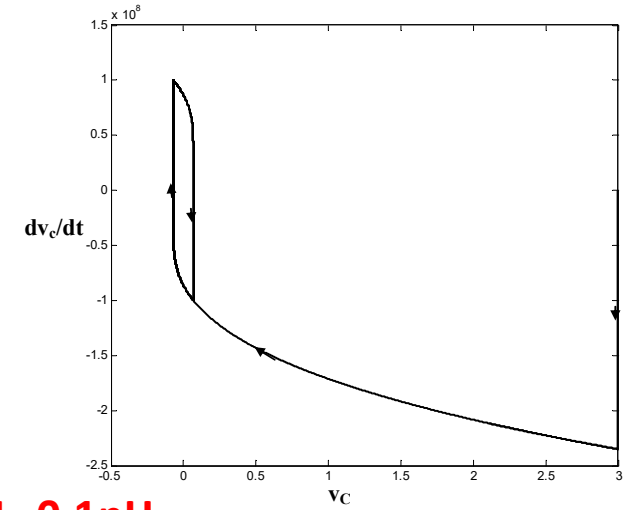
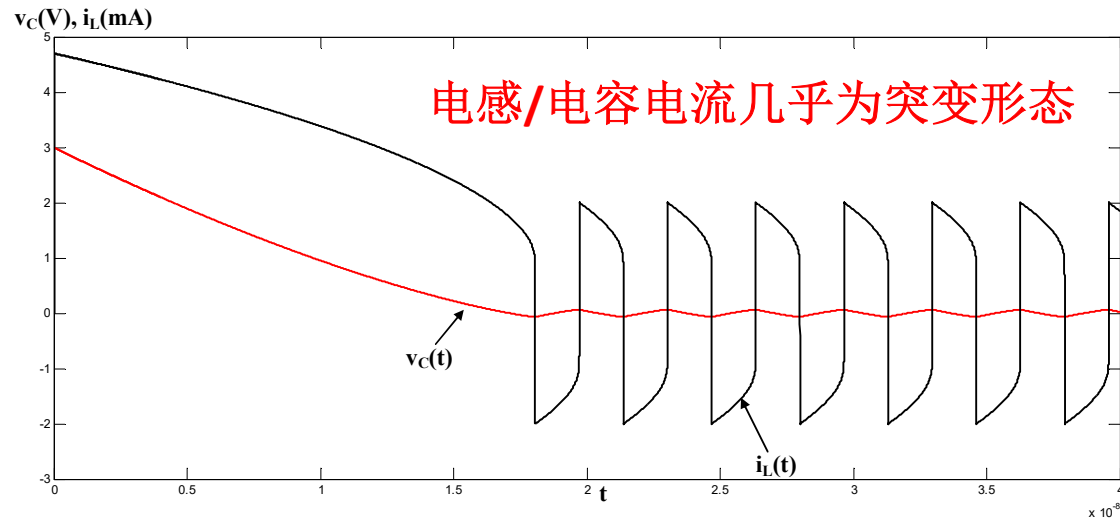
$L=1\mu\text{H}$

严重偏离正弦波形，电感/电容电流接近突变形态



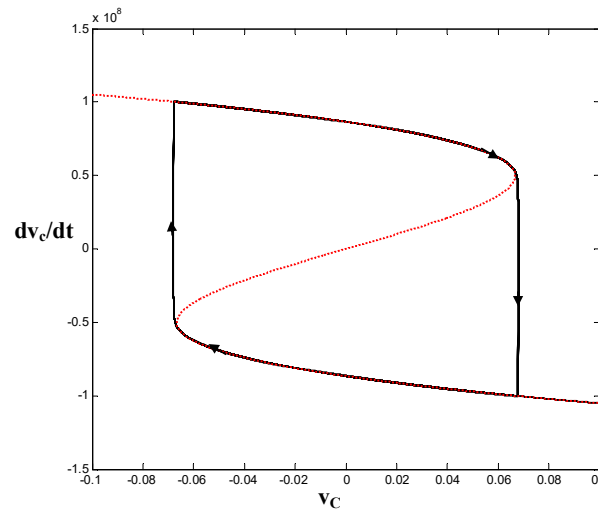
$L=10\text{nH}$

退化为一阶张弛振荡波形



$L=0.1\text{nH}$

s型负阻和电容形成的张弛振荡相轨迹



电感很小，跳变略有弧度
电感为0，发生垂直跳变

电容电压不会突变
电容电流可以突变

相量法 大纲

- 动态电路状态方程的数值解方法
- 相图

- 相量法

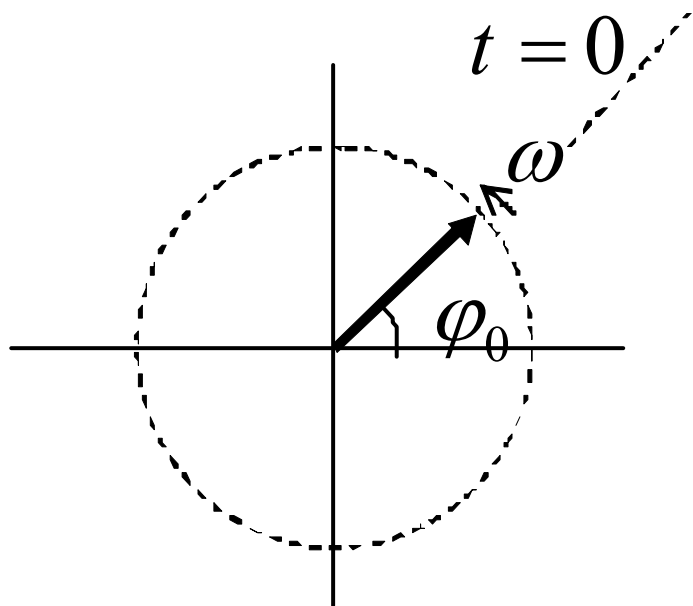
- 1、正弦波的复数表述
- 2、相量表述与微积分运算
- 3、正弦稳态分析

- 4、元件相量图与阻抗
- 5、基尔霍夫定律（相量）
- 6、阻抗串并联
- 7、传递函数 $H(j\omega)$
- 8、复功率

正弦波是电路信号的基函数，正弦激励下的线性时不变系统响应如果清楚，任意信号激励下的系统响应均可知

假设激励源是单频正弦波，且系统已经稳定线性时不变系统：不会有新频率产生因而系统内部电量只能是同频正弦波分析时只考察幅度和相位的变化，这就是相量法，它可以简化系统分析

2.1 正弦波的复数表述



$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

$$\begin{aligned} s(t) &= x(t) + jy(t) \\ &= A_p \cos(\omega t + \varphi_0) + jA_p \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} \end{aligned}$$

正弦信号的三要素：幅度 A_p ，频率 ω ，初始相位 φ_0

$$x(t) = \operatorname{Re} s(t) = A_p \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = \operatorname{Im} s(t) = A_p \sin(\omega t + \varphi_0)$$

复数表述中的微分运算

$$s(t) = A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} s(t) = A_p \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = j\omega \cdot s(t) = j\omega A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \omega A_p e^{j\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

复数表述下，时间微分是简单的乘 $j\omega$ 运算

$$\operatorname{Re} \frac{ds(t)}{dt} = \omega A_p \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega A_p \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(x + jy)}{dt} = \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} \quad \text{微分运算是线性算子}$$

复数表述中的积分运算

- 负无穷点初始值为零

$$s(t) = A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad x(t) = \operatorname{Re} s(t) = A_p \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\int_{-\infty}^t s(t) dt = \frac{s(t)}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \frac{A_p}{\omega} e^{j\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

复数表述的时间积分为简单的除 $j\omega$ 运算

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^t s(t) dt = \frac{A_p}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A_p}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^t s dt = \int_{-\infty}^t (x + jy) dt = \int_{-\infty}^t x dt + j \int_{-\infty}^t y dt$$

设定初始状态为零，则积分运算也是线性算子

2.2 正弦电压电流的相量表述

- 对于由线性时不变的比例关系 (R , G_{ain})、微积分关系 (L , C) 构成的线性时不变电路, 如果电路中的电压电流信号是正弦信号, 稳态分析则可采用相量表述
 - 对于线性时不变电路, 正弦激励稳定后, 电路中信号频率只有一个, 因而幅度和初始相位足以表述该电矢量的所有性质, 这就是正弦电量的相量表述方法
 - 相量表述法本质上是一种频域分析方法: 这里只考察幅度和相位, 这个幅度和相位恰好是正弦波傅立叶变换对应频点的幅度和相位

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \bar{i}(t) = I_p e^{j(\omega t + \varphi_I)} = \dot{I} e^{j\omega t} \quad \dot{I} = I_p e^{j\varphi_I} = I_p \angle \varphi_I$$

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi_V) \quad \bar{v}(t) = V_p e^{j(\omega t + \varphi_V)} = \dot{V} e^{j\omega t} \quad \dot{V} = V_p e^{j\varphi_V} = V_p \angle \varphi_V$$

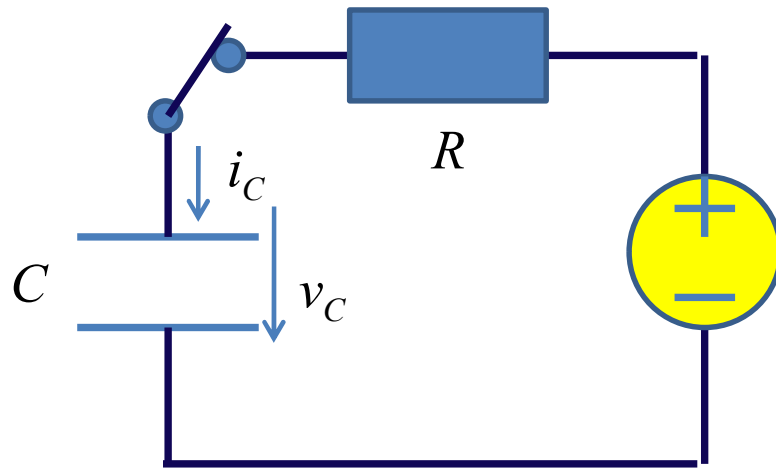
实信号的实数表述

实信号的复数表述

实信号的相量表述

复数的实部就是实信号

2.3 正弦稳态响应



$$v_S(t) = V_{Sp} \cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$\dot{V}_S = V_{Sp} \angle \varphi_S$$

$$RC(j\omega \dot{V}_C)e^{j\omega t} + \dot{V}_C e^{j\omega t} = \dot{V}_S e^{j\omega t}$$

由于 $e^{j\omega t}$ 始终都有，因而不必写出

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_S$$

稳态分析：时间足够长，瞬态已经结束
只剩下正弦稳态形式

$$RC \frac{d(\dot{V}_C e^{j\omega t})}{dt} + \dot{V}_C e^{j\omega t} = \dot{V}_S e^{j\omega t}$$

$$RC(j\omega \dot{V}_C) + \dot{V}_C = \dot{V}_S$$

微分用 $j\omega$ 简单替代即可

相量法表述：只需记忆此结果即可

$$(1 + j\omega RC)\dot{V}_C = \dot{V}_S$$

$$(1 + j\omega RC)\dot{V}_C = \dot{V}_S \quad (1 + j\omega\tau)\dot{V}_C = \dot{V}_S$$

$$\left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \angle \arctan \omega\tau \right] \cdot \dot{V}_C = \dot{V}_S$$

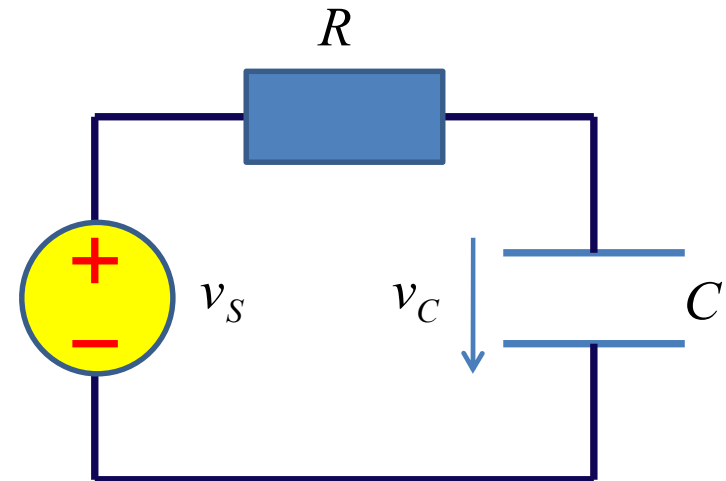
$$\left[\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \angle \arctan \omega\tau \right] \cdot V_{Cp} \angle \varphi_C = V_{Sp} \angle \varphi_S$$

$$\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cdot V_{Cp} = V_{Sp}$$

$$\varphi_C + \arctan \omega\tau = \varphi_S$$

$$V_{Cp} = \frac{V_{Sp}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi_C = \varphi_S - \arctan \omega\tau$$



用相量运算（复数运算），很容易获得正弦激励下的线性时不变电路的稳态响应：将时域内对正弦波的加减运算、微积分运算变换为频域内复数的加减乘除运算，大大简化了分析过程

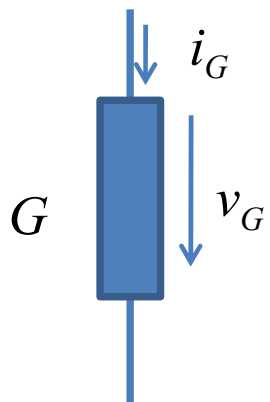
$$v_S(t) = V_{Sp} \cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$v_C(t) = \frac{V_{Sp}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \varphi_S - \arctan \omega\tau)$$

$$\tau = RC$$

2.4 元件相量图

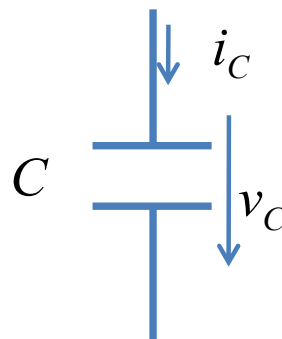
时域内的微分关系
频域内是比例关系
电容是线性元件



$$i_G = G \cdot v_G$$



$$\dot{I}_G = G \cdot \dot{V}_G$$



$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

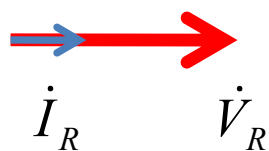


$$\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{V}_C = jB \cdot \dot{V}_C$$

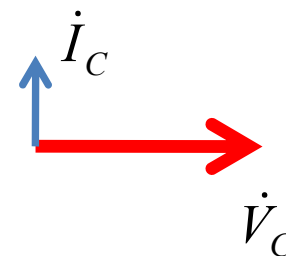
电导: **G**
conductance

统称为**导纳**
admittance

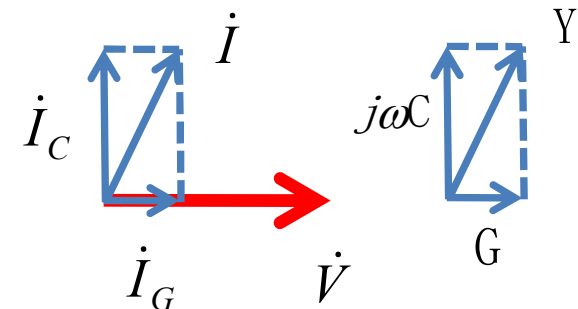
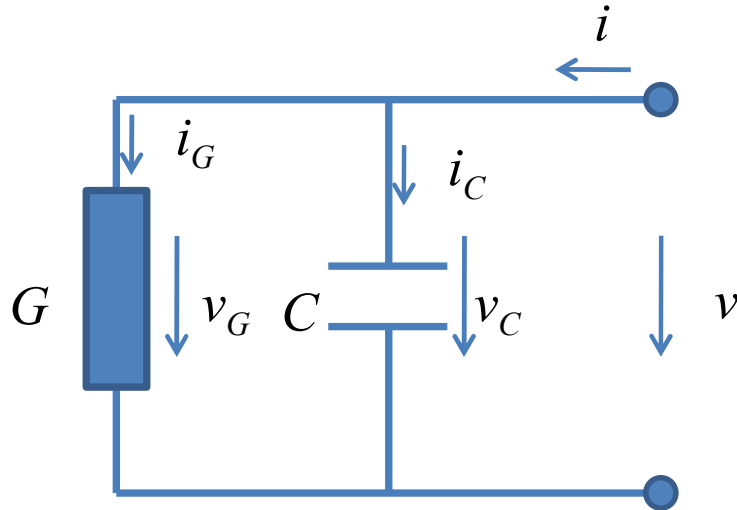
电纳: **B=ωC**
susceptance



$$\frac{\dot{I}}{\dot{V}} = Y = \text{Re}Y + j \text{Im}Y = G + jB$$



电容和电阻的并联：导纳



$$i = i_G + i_C \quad \dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C$$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{I_p}{V_p} \angle(\varphi_I - \varphi_V)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C = G\dot{V}_G + j\omega C\dot{V}_C = (G + j\omega C)\dot{V} = Y\dot{V}$$

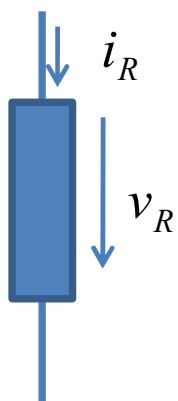
$$Y = G + j\omega C$$

$$= G + jB$$

导纳
admittance

$$Y = G + j\omega C = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \angle \arctan \frac{\omega C}{G}$$

以电流相量为基准的元件相量图

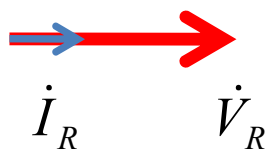


$$v_R = R \cdot i_R$$

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I}_R$$

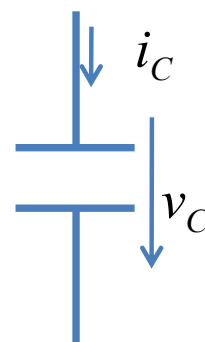
电阻: R
resistance

统称为**阻抗**
impedance



$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = Z = \text{Re} Z + j \text{Im} Z = R + jX$$

$$Z = \frac{1}{Y}$$

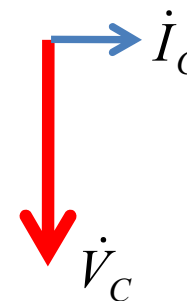


时域内的积分关系
频域内是比例关系
电容是线性元件

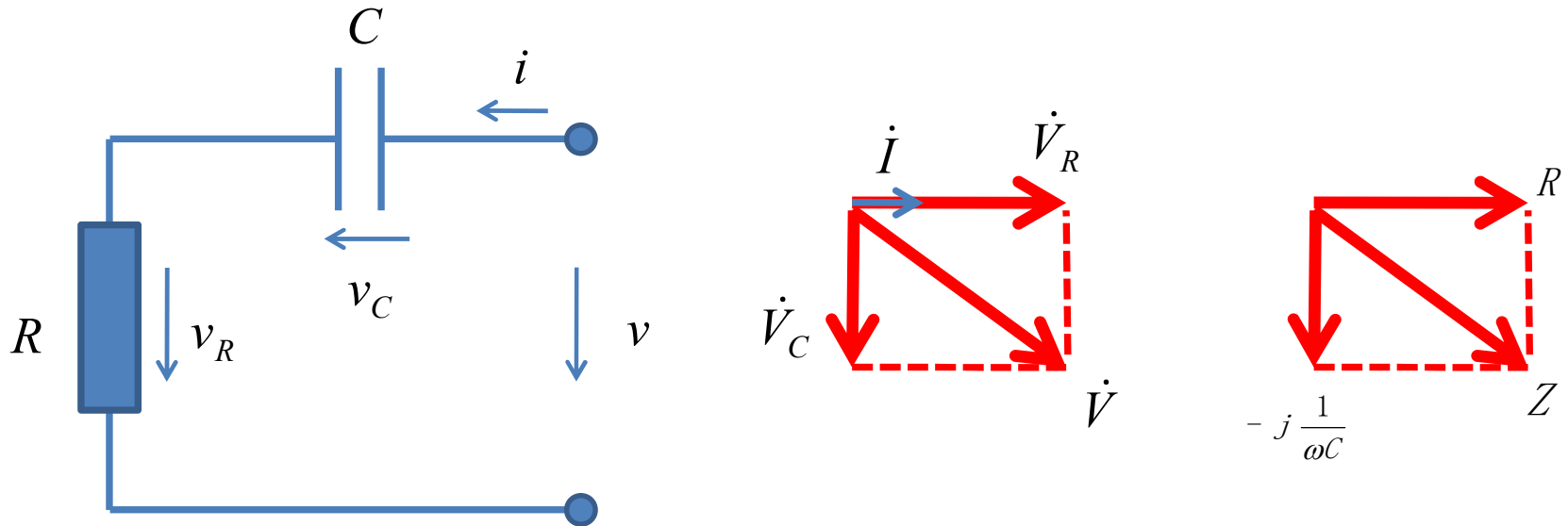
$$v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = jX \cdot \dot{I}_C$$

电抗: $X = -(\omega C)^{-1}$
reactance



电容和电阻的串联：阻抗



$$v = v_R + v_C \quad \dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V_p}{I_p} \angle(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I} = Z\dot{I}$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + jX$$

阻抗

impedance $Z = R + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle -\arctan \frac{1}{\omega RC}$

电容和电感是对偶的

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{V}_C = jB \cdot \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_L = j\omega L \cdot \dot{I}_L = jX \cdot \dot{I}_L$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = jX \cdot \dot{I}_C = j \left(-\frac{1}{\omega C} \right) \cdot \dot{I}_C$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \cdot \dot{V}_L = jB \cdot \dot{V}_L = j \left(-\frac{1}{\omega L} \right) \cdot \dot{V}_L$$

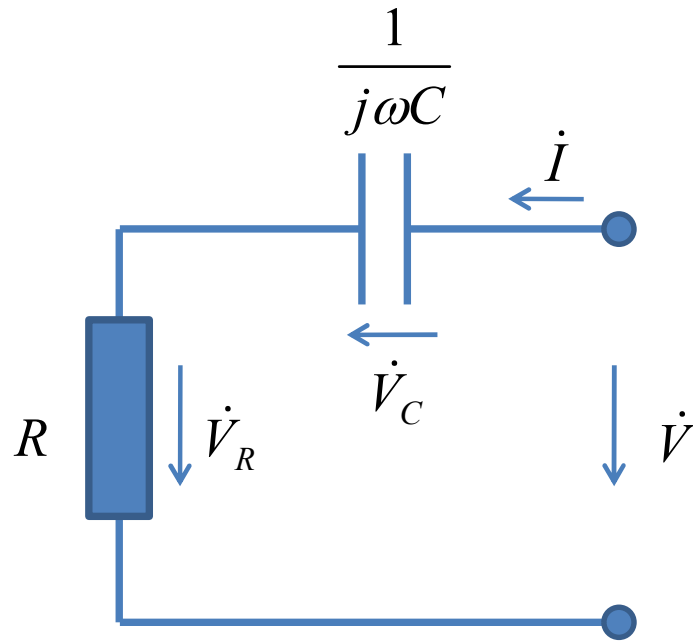
$$B_C = \omega C$$

$$X_L = \omega L$$

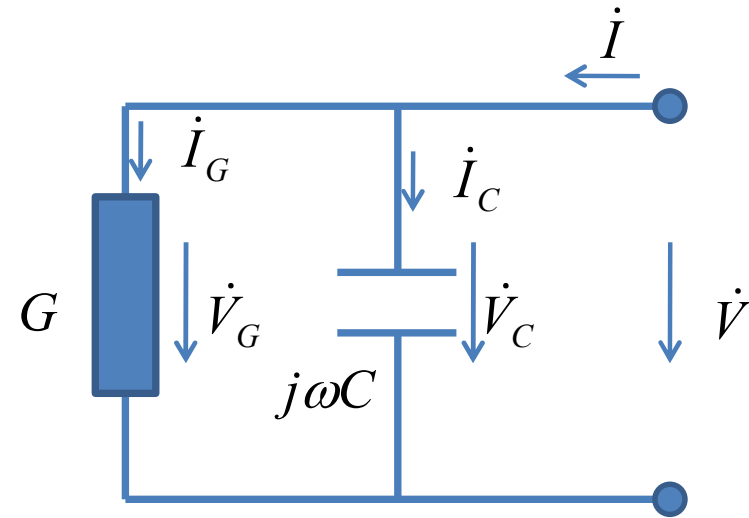
$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

2.5 基尔霍夫定律



$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$



$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C$$

相量形式的电路定律

- 对线性时不变电路的正弦稳态分析，全部电压电流都是同一频率的正弦信号，时域电路基本定律**KVL**，**KCL**，**OL**公式直接转换为相量域公式，称之为电路定律的相量形式

$$\sum_{k=1}^N v_k = 0$$

KVL

$$\sum_{k=1}^N \dot{V}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^M i_k = 0$$

KCL

$$\sum_{k=1}^M \dot{I}_k = 0$$

元件约束条件

(线性时不变元件)

戴维南源

$$v_k = v_{S,k} - R_k i_k$$

$$\dot{V}_k = \dot{V}_{S,k} - Z_k \dot{I}_k = \dot{V}_{S,k} - R_k \dot{I}_k$$

RLC串联支路

$$v_i = R_i i_i + L_i \frac{d}{dt} i_i + \frac{1}{C_i} \int i_i dt$$

$$\dot{V}_i = Z_i \dot{I}_i = \left(R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i} \right) \dot{I}_i$$

z参量

$$v_j = R_{jj} i_j + R_{ji} i_i$$

$$\dot{V}_j = Z_{jj} \dot{I}_j + Z_{ji} \dot{I}_i$$

2.6 阻抗的串并联

串联:

$$\dot{V} = \sum_{k=1}^N \dot{V}_k = \sum_{k=1}^N Z_k \dot{I}_k = \sum_{k=1}^N Z_k \dot{I} = \left(\sum_{k=1}^N Z_k \right) \dot{I} = Z \dot{I}$$

$$Z = \sum_{k=1}^N Z_k$$

$$R = \sum_{k=1}^N R_k$$

$$j\omega L = \sum_{k=1}^N j\omega L_k$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{j\omega C_k}$$

并联:

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^N \dot{I}_k = \sum_{k=1}^N Y_k \dot{V}_k = \sum_{k=1}^N Y_k \dot{V} = \left(\sum_{k=1}^N Y_k \right) \dot{V} = Y \dot{V}$$

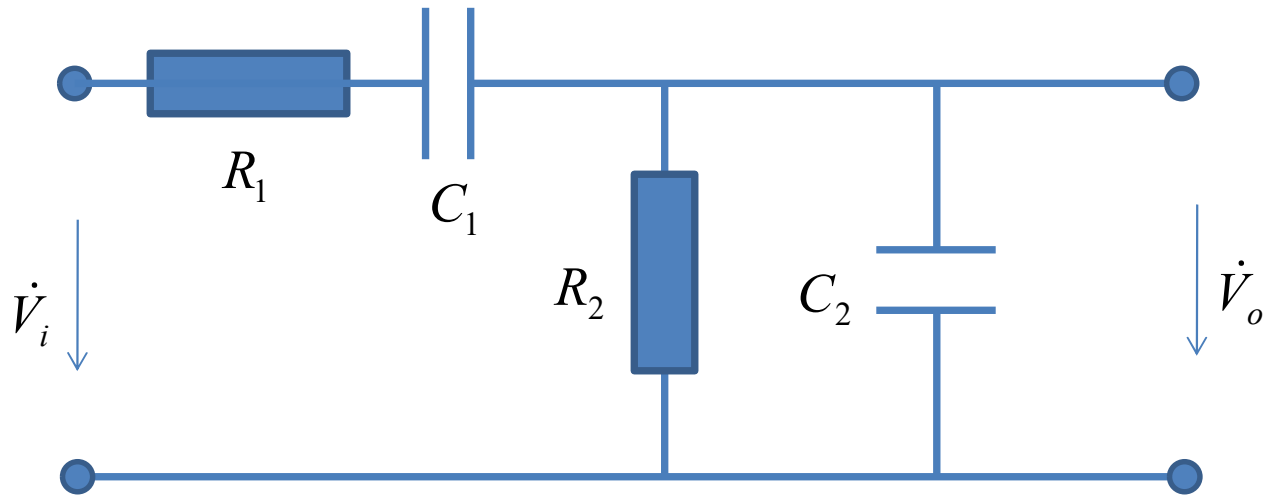
$$Y = \sum_{k=1}^N Y_k$$

$$G = \sum_{k=1}^N G_k$$

$$j\omega C = \sum_{k=1}^N j\omega C_k$$

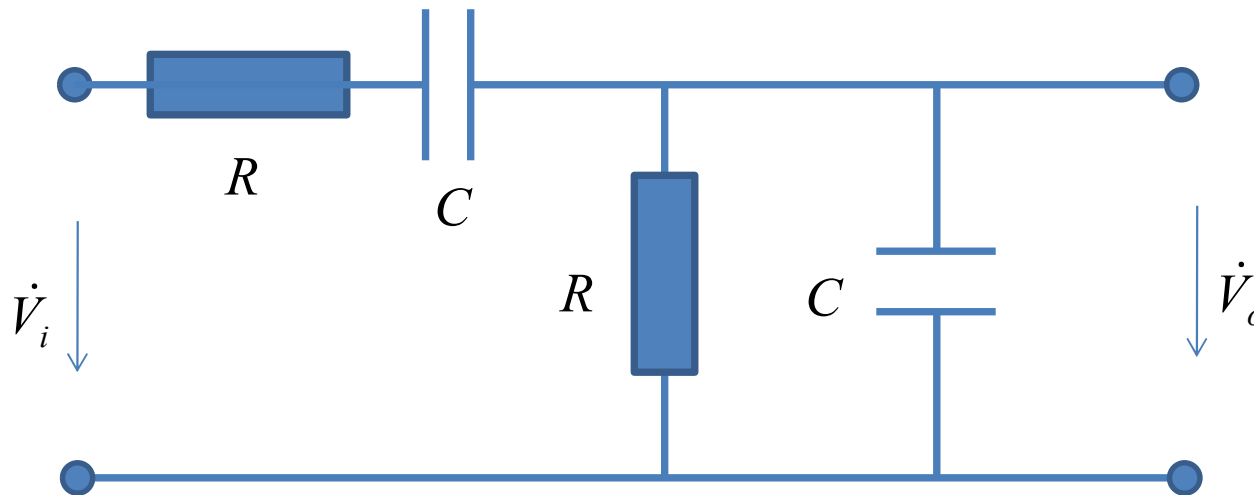
$$\frac{1}{j\omega L} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{j\omega L_k}$$

例2：求分压比



$$H = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}$$

2.7 传递函数



$$H = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1 + j\omega RC}} = \frac{1}{3 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}}$$

对于两个端口，两个端口电压、电流之比定义为端口间的传递函数关系：
电压传递函数，电流传递函数，跨导传递函数，跨阻传递函数

传递函数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{1}{3 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}} e^{-j \arctan \frac{\omega RC - \frac{1}{\omega RC}}{3}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

电阻电路中，传递函数和频率无关
动态电路中，传递函数是频率的函数

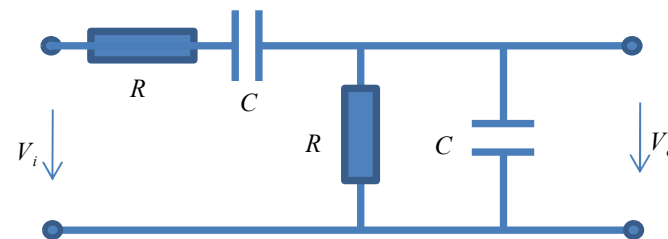
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

幅频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega RC - \frac{1}{\omega RC}}{3}$$

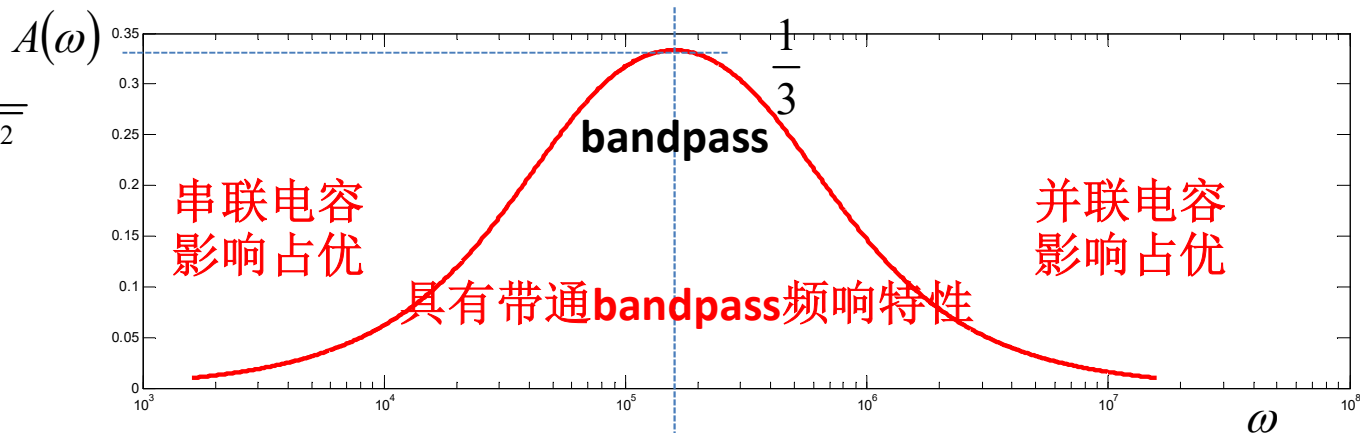
相频特性

频率响应



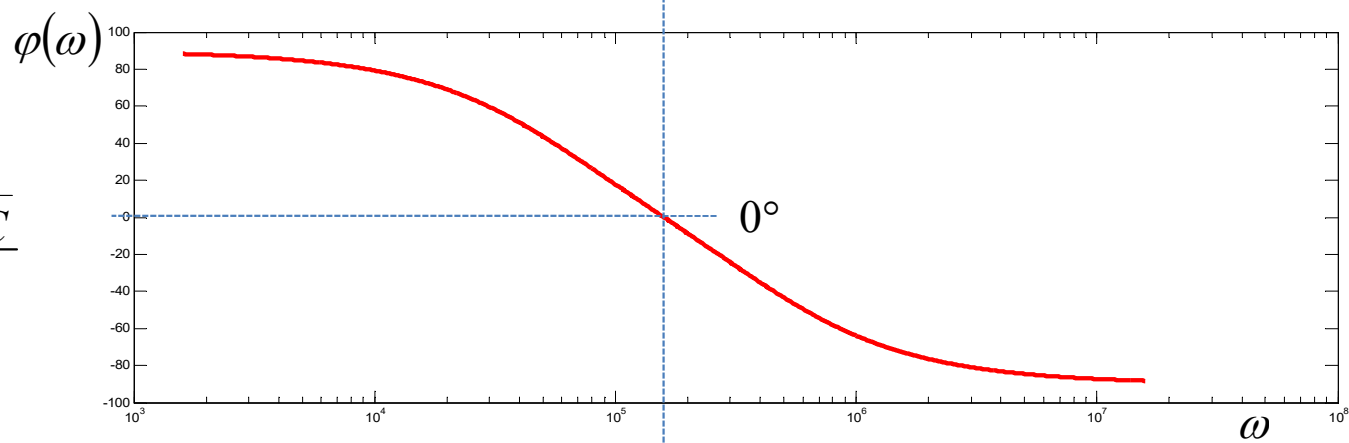
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega RC - \frac{1}{\omega RC}}{3}$$

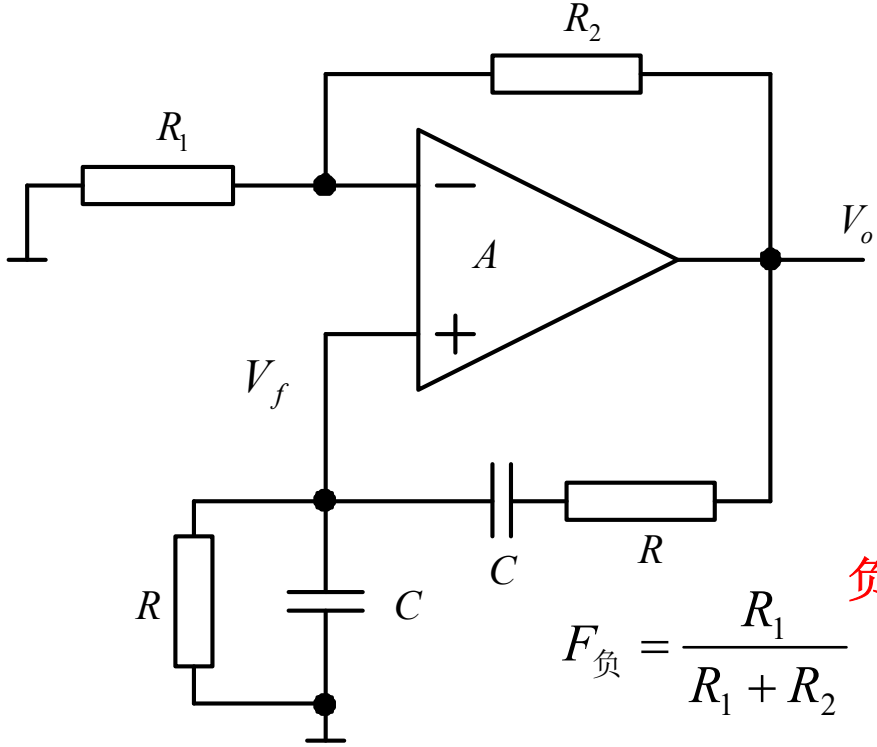
$$= -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{3}$$



$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

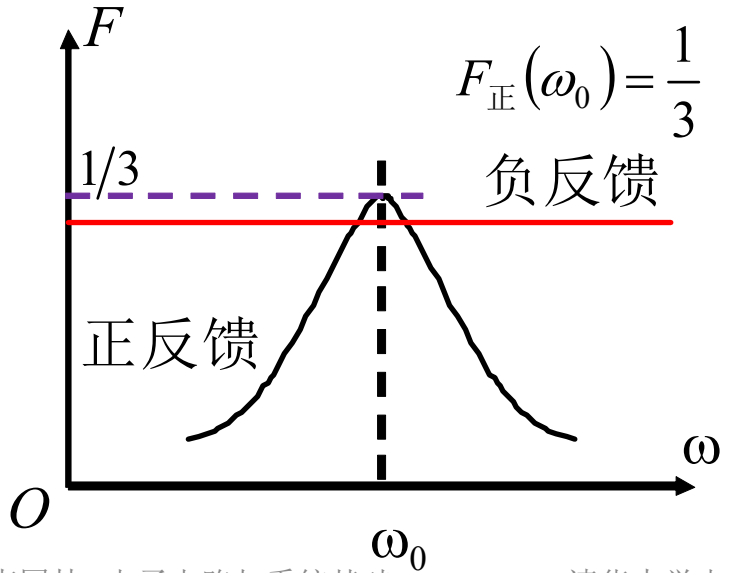
$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

文氏电桥 正弦波振荡器



负反馈系数

$$F_{\text{负}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



RC带通网络构成正反馈选频网络

$$F_{\text{正}}(\omega_0) = \frac{1}{3}$$

$$f_{\text{osc}} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$R_2 > 2R_1$$

- 文氏电桥振荡器，同时具有正反馈和负反馈
- 正反馈大于负反馈，即可在特定频点上形成正弦振荡

2.8 功率

- 瞬时功率
 - **Instantaneous Power**
- 平均功率
 - **Average Power**
- 视在功率
 - **Apparent Power**
- 复功率
 - **Complex Power**

2.8.1 瞬时功率

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

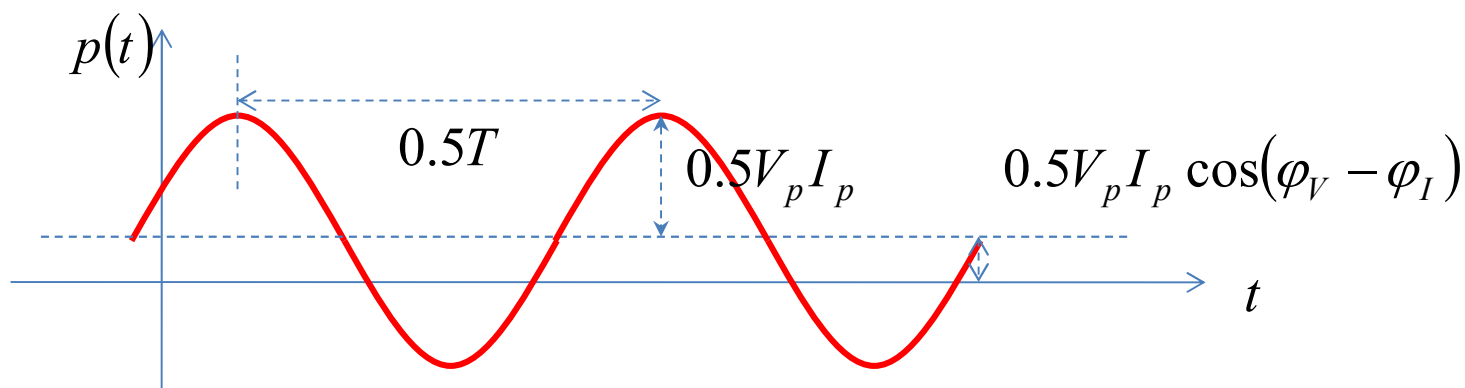
瞬时功率 (w) 是任一瞬间的功率
代表了元件吸收能量的速率

$$p(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi_V) \cdot I_p \cos(\omega t + \varphi_I) \\ &= \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_p I_p \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) \end{aligned}$$

与时间无关的常量

2ω 正弦变化分量



2.8.2 平均功率

- 瞬时功率随时间而变，难以测量，平均功率则容易测量
- 平均功率 (**W**) 是指一个周期内瞬时功率的平均值

$$\begin{aligned} P &= \overline{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_p I_p \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \frac{I_p}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_V - \varphi_I) = V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I) \end{aligned}$$

电阻与电容

$$P = \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) = V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$v = R \cdot i$$

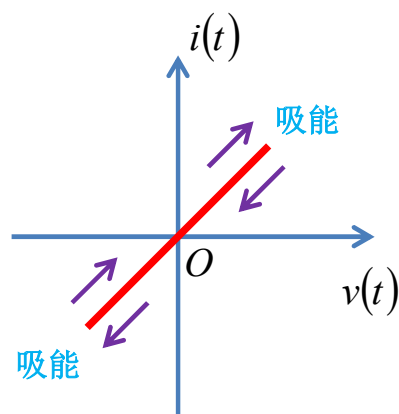
$$V_p = R \cdot I_p$$

$$\varphi_V = \varphi_I$$

$$P_R = \frac{1}{2} V_p I_p = V_{rms} I_{rms}$$

$$= \frac{1}{2} I_p^2 R = I_{rms}^2 R$$

电阻是纯消耗功率的：
耗能元件

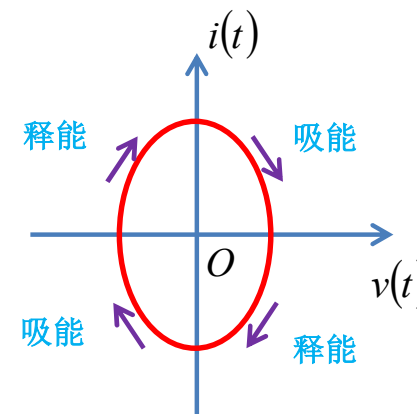


$$i = C \frac{dv}{dt}$$

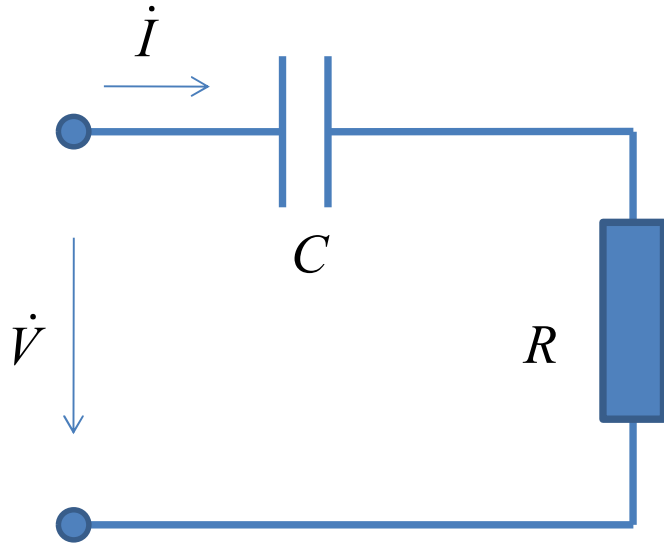
$$I_p = V_p \omega C$$

$$\varphi_I = \varphi_V + \frac{\pi}{2}$$

$P_C = 0$ 电容吸收的功率在下
1/4个周期被全部释放
出来：储能元件



阻容串联例



$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = |Z|e^{j\varphi_z} = |Z|\cos\varphi_z + j|Z|\sin\varphi_z$$
$$= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle -\arctan\frac{1}{\omega RC}$$

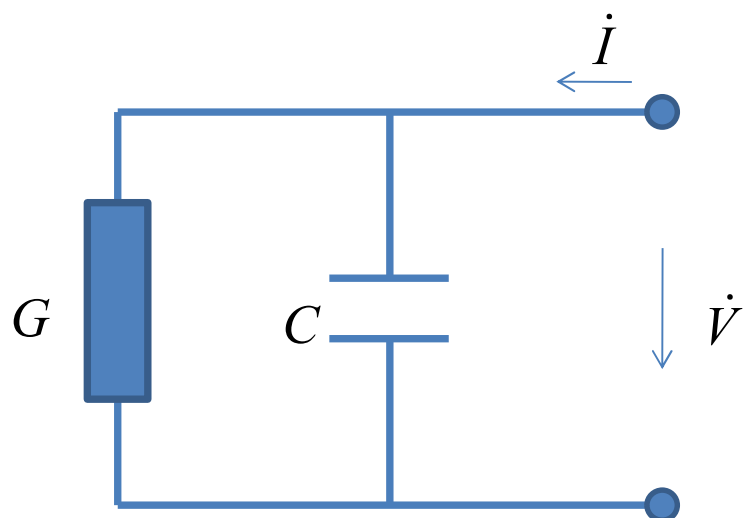
$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$v(t) = I_p |Z| \cos(\omega t + \varphi_I + \varphi_Z)$$

$$P = \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) = \frac{1}{2} I_p^2 |Z| \cos\varphi_Z = \frac{1}{2} I_p^2 R = I_{rms}^2 R$$

整个阻抗中，只有电阻部分是消耗功率的
电抗部分不消耗功率：吸收的功率会释放出去

阻容并联例



自行推导： ...

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} V_p^2 G = V_{rms}^2 G \end{aligned}$$

整个导纳中，只有电导部分是消耗功率的，
电纳部分不消耗功率

2.8.3 视在功率

$$P = \frac{1}{2} V_p I_p \cos(\varphi_V - \varphi_I) = V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$S = \frac{1}{2} V_p I_p = V_{rms} I_{rms}$$

视在功率（**VA**）：电压有效值与电流有效值之积

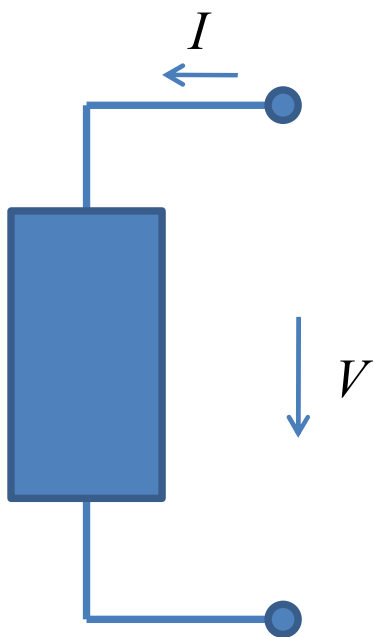
$$pf = \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

功率因数（**power factor**）：平均功率与视在功率之比

功率因数角： $\varphi_V - \varphi_I$

2.8.4 复功率

- 假设某负载（单端口网络）的端口电压电流为如图所示的关联参考方向，则该负载所吸收的复功率为



$$\hat{S} = \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^*$$

$$= \frac{1}{2} (V_p \angle \varphi_V) (I_p \angle \varphi_I)^*$$

$$= \frac{1}{2} (V_p \angle \varphi_V) (I_p \angle -\varphi_I)$$

$$= \frac{1}{2} V_p I_p \angle (\varphi_V - \varphi_I) = S \cdot e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}$$

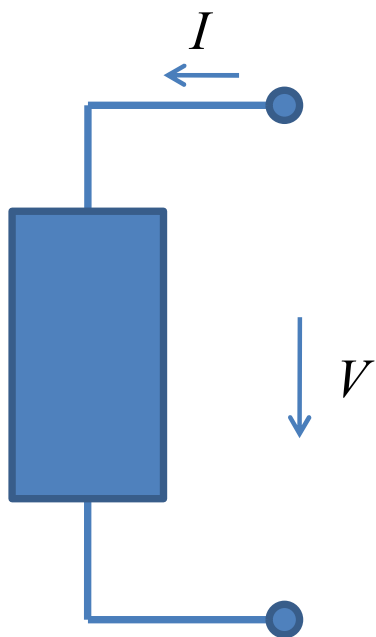
视在功率 (VA, 伏安)

$$= S \cos(\varphi_V - \varphi_I) + jS \sin(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$= P + jQ$$

实功，有功功率 (W, 瓦) 虚功，无功功率 (var, 乏)
平均功率

负载



$$P = I_{rms}^2 R \quad \text{负载真正消耗的功率}$$

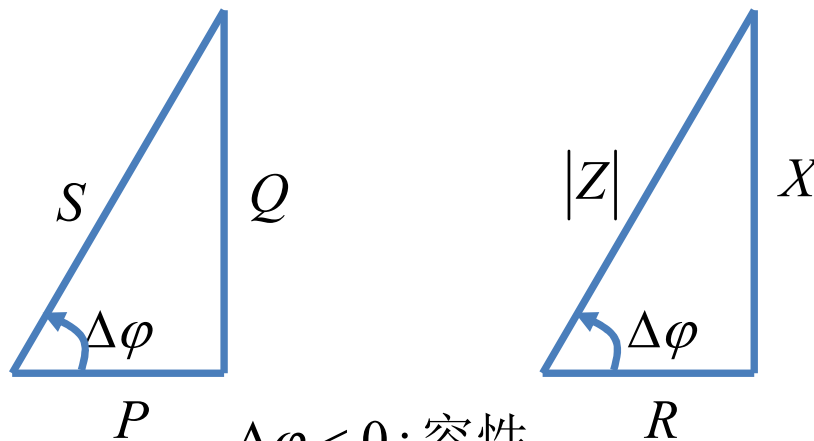
$$Q = I_{rms}^2 X \quad \text{来回反射的功率}$$

吸收、释放、吸收、...

$$S = I_{rms}^2 |Z| \quad \text{负载看上去消耗的功率}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V_p}{I_p} \angle(\varphi_V - \varphi_I) \\ &= \frac{V_p}{I_p} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + j \frac{V_p}{I_p} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \\ &= R + jX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S} &= S \angle(\varphi_V - \varphi_I) \\ &= S \cos(\varphi_V - \varphi_I) + jS \sin(\varphi_V - \varphi_I) \\ &= P + jQ \end{aligned}$$



$\Delta\varphi < 0$: 容性

$\Delta\varphi > 0$: 感性

2.9 一些说明

- 用相量法表述线性时不变电路单频正弦激励是方便的，所有在时域中成立的电路定理，用相量法表述后，仍然成立
 - **KVL, KCL, OL**
 - 阻抗串并联公式
 - 支路电流法，回路电流法，结点电压法
 - 功率守恒
 - 叠加定理，替代定理
 - 戴维南定理，诺顿定理
 - ...

例3：相量表述的好处：无需微积分运算

- 利用相量方法，确定由如下微积分方程描述的电路中的稳态电流大小

$$4i + 8 \int i dt - 3 \frac{di}{dt} = 50 \cos(2t + 75^\circ)$$

$$4\dot{I} + \frac{8}{j\omega} \dot{I} - 3j\omega \dot{I} = 50 \angle 75^\circ$$

$$4\dot{I} + \frac{8}{j2} \dot{I} - 3 \cdot j2 \cdot \dot{I} = 50 \angle 75^\circ$$

$$= (4 - j4 - j6)\dot{I} = (4 - j10)\dot{I} = \dot{I}10.77 \angle -68.2^\circ$$

本题未考虑系统稳定性问题：如果系统是稳定的，则可如是处理：稳定系统才存在稳态正弦响应

$$\dot{I} = 4.64 \angle 143.2^\circ$$

$$i(t) = 4.64 \cos(2t + 143.2^\circ)$$

相量法的巨大好处：求电路稳态解无需微积分运算
微积分运算被乘除法替代

例4：相量表述的好处：正弦加减

- 已知一结点流入的两路电流，求流出总电流

$$i_1(t) = 4 \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 5 \sin(\omega t - 20^\circ)$$

$$\dot{I}_1 = 4 \angle 30^\circ$$

$$\dot{I}_2 = 5 \angle -110^\circ$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 \angle 30^\circ + 5 \angle -110^\circ \\ &= (3.464 + j2) + (-1.71 - j4.698) \\ &= 1.754 - j2.698 \\ &= 3.218 \angle -56.97^\circ \end{aligned}$$

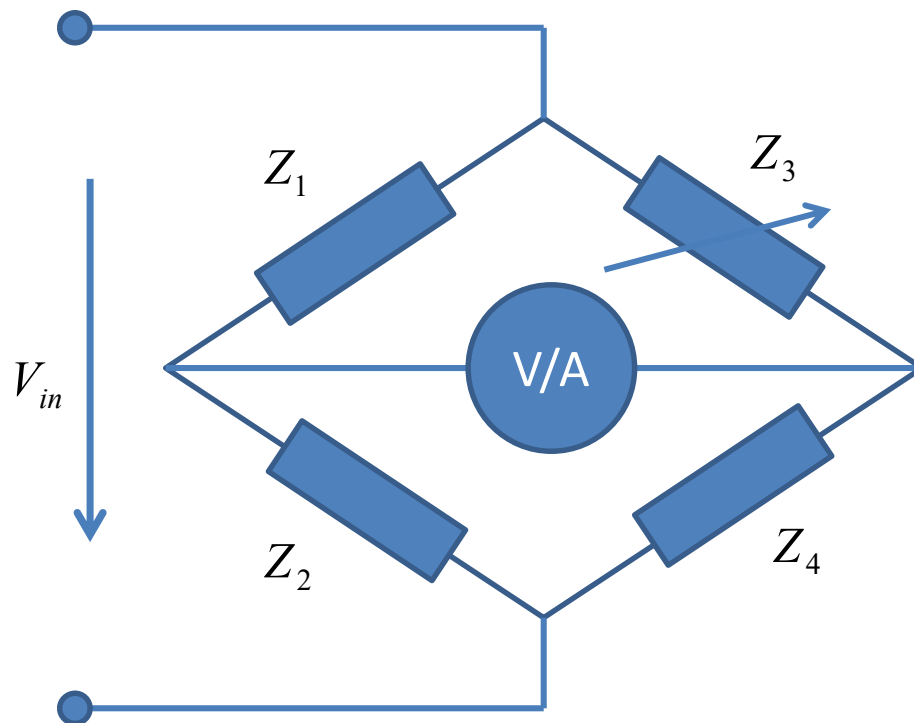
相量法的好处：同频正弦波
叠加用复数加减法可实现

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3.218 \cos(\omega t - 56.97^\circ)$$

例5：电桥

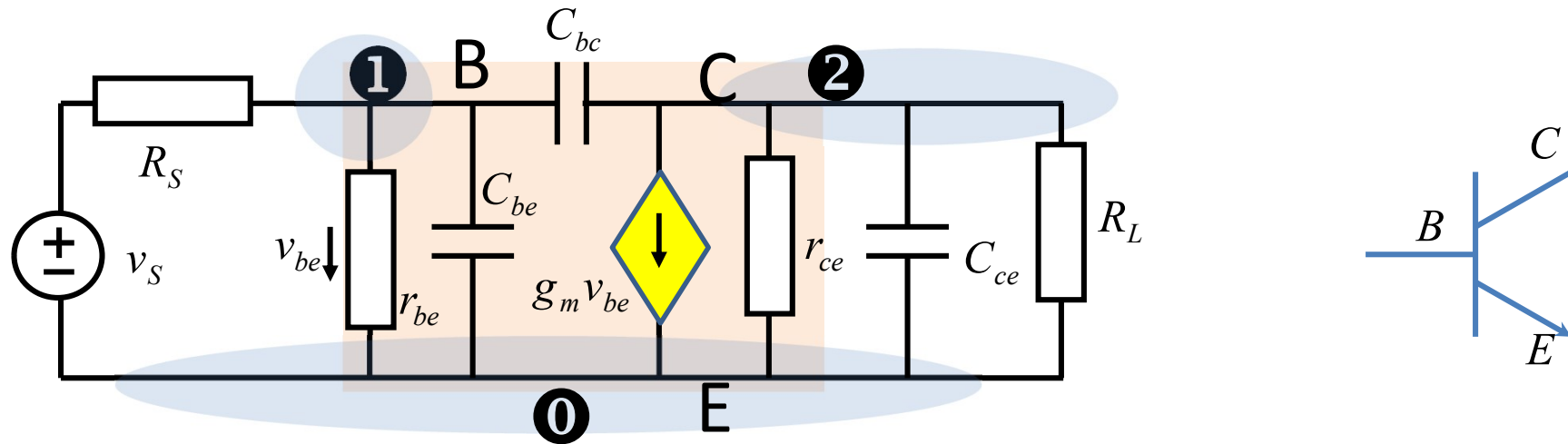
- 如图所示为一交流电桥，其中 Z_1 为 $10\text{k}\Omega$ 电阻器， Z_2 为 $40\text{k}\Omega$ 电阻器， Z_3 为 $15\text{k}\Omega$ 电阻器与 1.2nF 电容器的并联，在 2kHz 频点上，电桥达到平衡，求 Z_4

- 思考：如果已知 Z_4 是一个电阻 R_4 和一个电容 C_4 的串联，电阻为多大？电容为多大？



$$\begin{aligned} Z_4 &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{G_3 + j\omega C_3} \right) \\ &= \frac{40 \times 10^3}{10 \times 10^3} \frac{1}{\frac{1}{15 \times 10^3} + j\omega \times 1.2 \times 10^{-9}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{60 \times 10^3} + j\omega \times 0.3 \times 10^{-9}} = 60\text{k}\Omega \parallel 0.3\text{nF} \end{aligned}$$

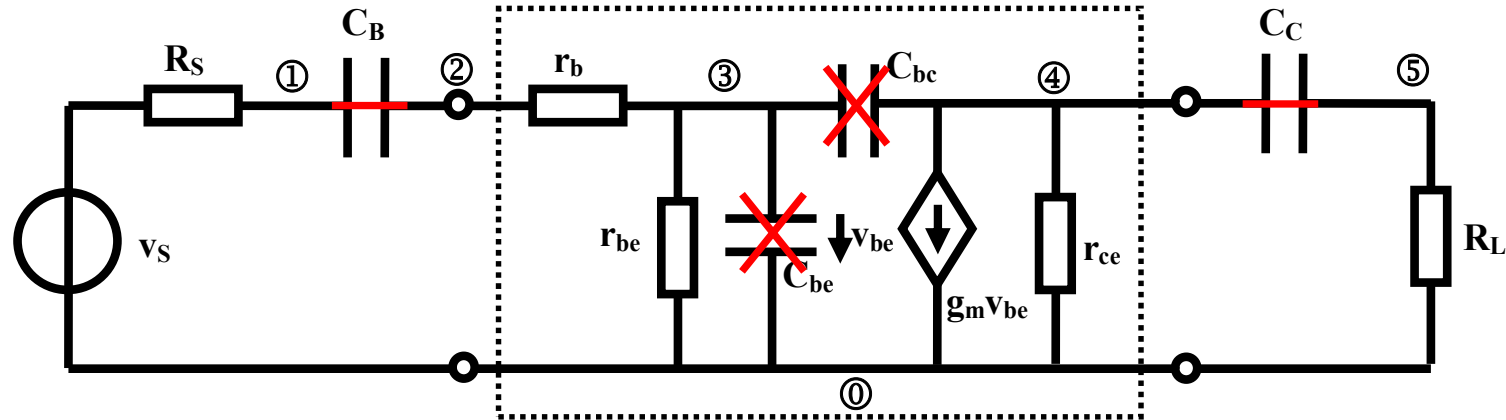
例6：用结点分析法求解



$$\begin{bmatrix} G_S + g_{be} + j\omega C_{be} + j\omega C_{bc} & -j\omega C_{bc} \\ -j\omega C_{bc} & G_L + g_{ce} + j\omega C_{ce} + j\omega C_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_S \dot{V}_S \\ -g_m \dot{V}_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_S + g_{be} + j\omega C_{be} + j\omega C_{bc} & -j\omega C_{bc} \\ g_m - j\omega C_{bc} & G_L + g_{ce} + j\omega C_{ce} + j\omega C_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_S \dot{V}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

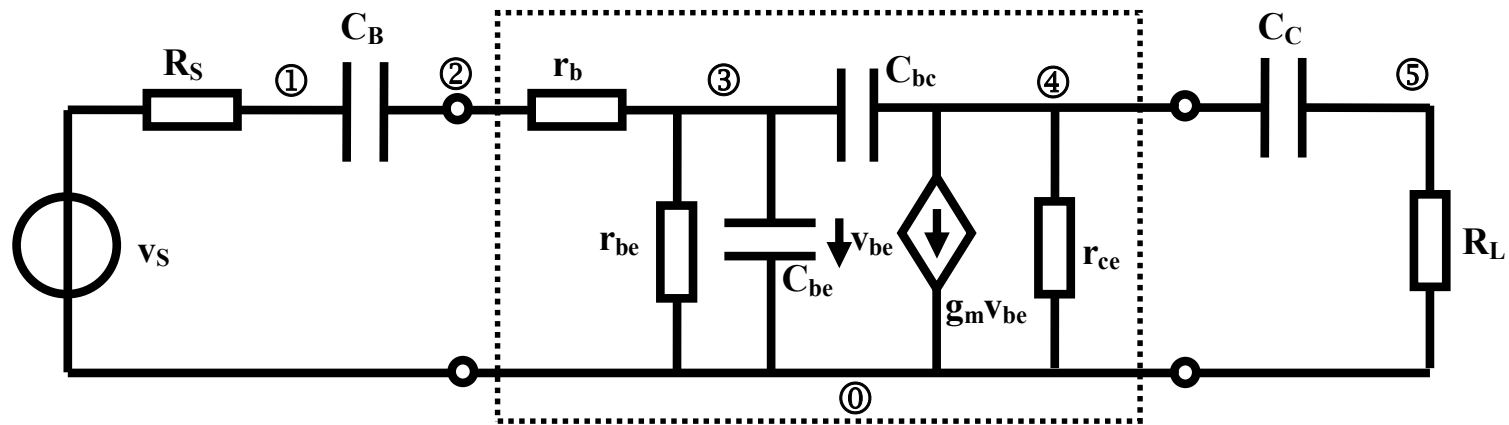
例7 晶体管放大器交流小信号分析



$$A_v = -g_m R_L \frac{r_{ce}}{R_L + r_{ce}} \frac{r_{be}}{r_{be} + r_b + R_S} = -40m \times 3k \times \frac{100k}{3k + 100k} \times \frac{10k}{10k + 0.1k + 0.1k}$$

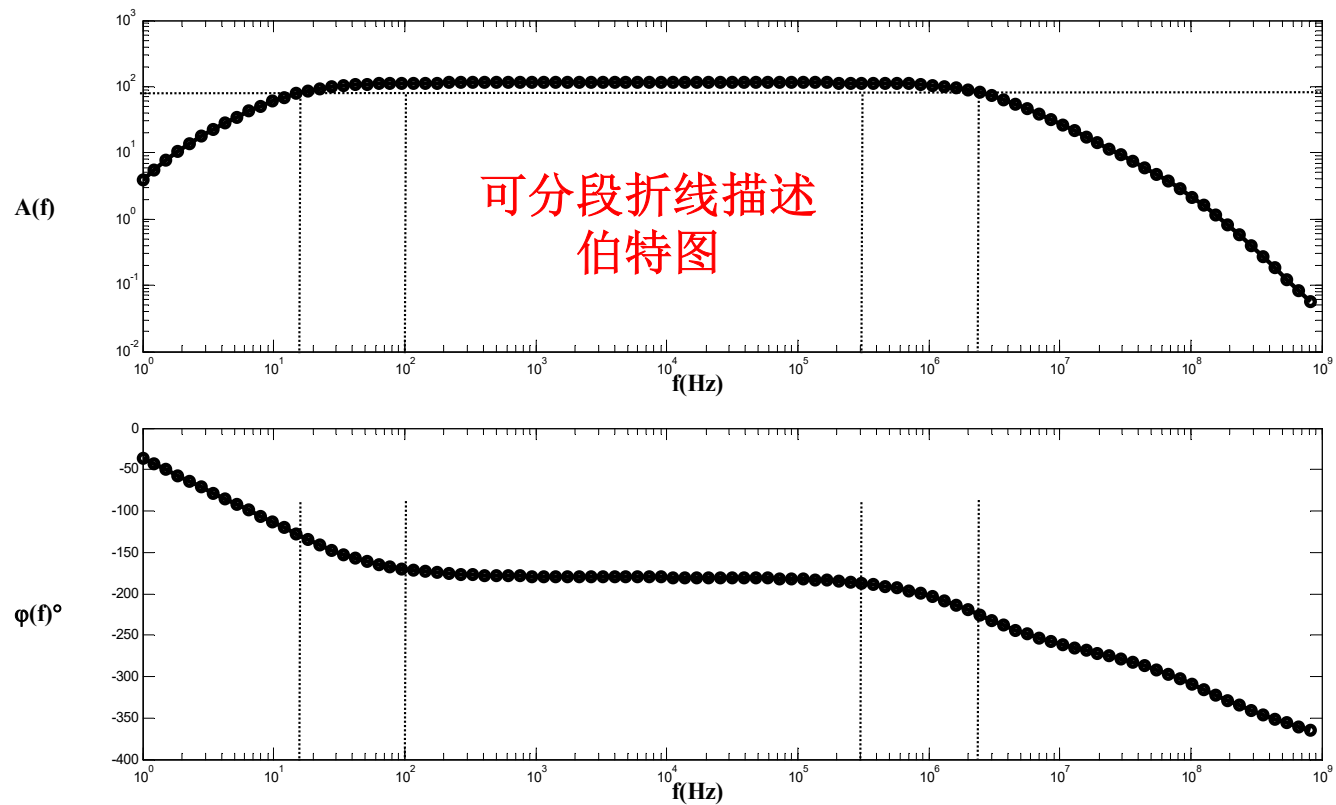
$$= -120 \times 0.9709 \times 0.9804 = -120 \times 0.9518 = -114 = 41.2dB \text{反相}$$

例8.16: 晶体管核心模型, $g_m=40mS$, $r_{be}=10k\Omega$, $r_{ce}=100k\Omega$, 基极体电阻 $r_b=100\Omega$, 晶体管寄生电容 $C_{be}=70pF$, $C_{bc}=2pF$, 晶体管之外的耦合电容 $C_B=1\mu F$, $C_C=1\mu F$, 信源内阻 $R_S=100\Omega$, 负载电阻 $R_L=3k\Omega$ 。



$$A_v(j\omega) = \frac{\dot{V}_L}{\dot{V}_S}$$

$$= A_v(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$



本节小结 1

- 相图是动态系统的状态转移图
 - 相轨迹收敛到一个点，该点为稳定平衡点
 - 相轨迹从某个点发散，该点为不稳定平衡点
 - 相轨迹可围绕某个不稳定平衡点收敛于某个极限环，该动态系统为周期信号振荡器
 - 极限环为圆形，则为正弦波振荡器
 - 极限环上有状态点的跳变，则为张弛振荡
 - 相轨迹围绕多个类平衡点类周期振荡，却不可预测，相轨迹不收敛，不发散，在状态空间的有限空间内运动却不重复
 - 混沌
- 相量法用于线性时不变电路系统的正弦稳态分析，可以极大地简化分析过程
 - 时域内的微分被转化为乘 $j\omega$ 运算，积分被转化为除 $j\omega$ 运算，微分方程求解被转化为复数代数方程求解
- 相量域分析时，所有适用于线性时不变电阻电路的电路定律、电路定理都成立，只是实数运算被复数运算替代而已
 - 电容和电感在相量域以电抗或电纳形式和电阻或电导同等地位
 - 电感电抗和频率成正比关系，电容电抗和频率成反比关系
 - 电感电纳和频率成反比关系，电容电纳和频率成正比关系
 - 电路中包含电容、电感时，不同频率具有不同电压-电流关系，在频域看，可通过电容、电感形成带宽效应

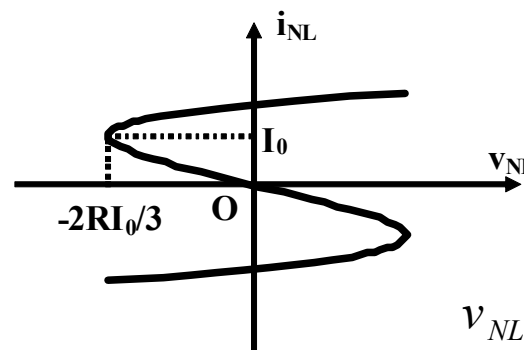
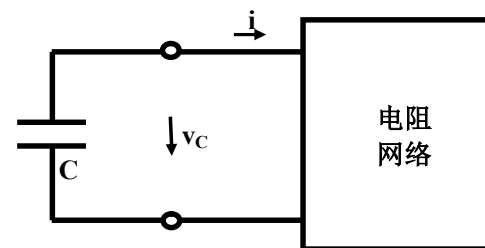
本节小结 2

- 电容电压滞后电容电流 90° 相位，电感电流滞后电感电压 90° 相位
- 用相量法获得的线性时不变系统的传递函数 $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
 - $A(\omega)$ 被称为幅频特性， $\varphi(\omega)$ 被称为相频特性
 - 正弦激励 $E(t) = E_m \cos(\omega_0 t)$ 通过该系统，其稳态响应为 $R(t) = A(\omega_0)E_m \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$
- 电容和电感不消耗能量，但它们可以存储能量
 - **RLC**网络中，电阻消耗的功率记为实功（复功率的实部），电容、电吸收再释放最终为源回收的功率用虚功表述（复功率的虚部）
 - 计算复功率，取其实部即可获得**RLC**网络在正弦激励下稳态响应消耗的平均功率
 - 有源、无源判定

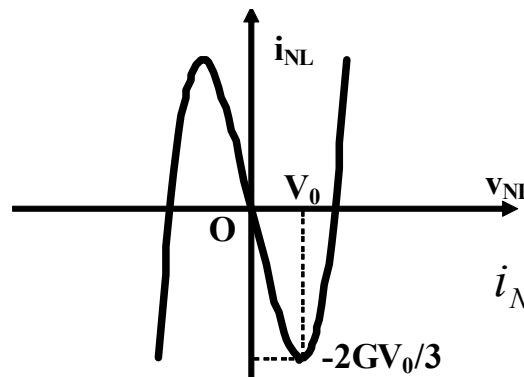
作业1 一阶动态系统的相轨迹

- (练习8.2.9) 图示单电容一阶动态系统中的电阻网络，分别为如下五种情况，请画出相图，并说明平衡点在什么位置？是否稳定？是否会出现振荡？

- 线性电阻R
- 线性负阻-R
- 戴维南源，源电压为 V_{S0} ，源内阻为 R_S
- S型负阻
- N型负阻

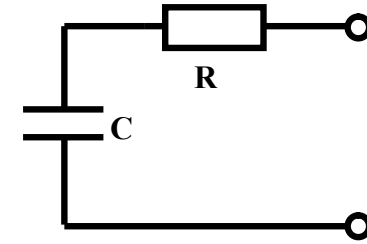


$$v_{NL} = -Ri_{NL} + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3$$



$$i_{NL} = -Gv_{NL} + \frac{G}{3V_0^2} v_{NL}^3$$

作业2 串联RC

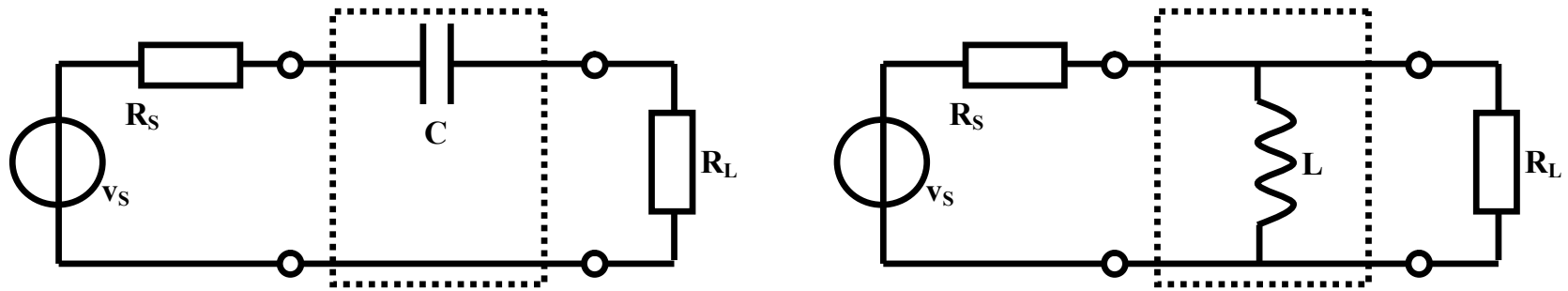


- 对于图示RC串联电路

- (练习8.3.8) 在单端口加载正弦波激励电压源，测得电阻上正弦波电压幅度为**3V**，电容上正弦波电压幅度为**4V**，问激励电压源正弦波电压幅度为多少？保持正弦激励电压源幅度不变，但频率增加为原来频率的**2倍**，此时测得电阻上电压幅度为多少？电容上的电压幅度为多少？

- (练习8.3.9) 在单端口加载正弦波电压 $v_s(t) = V_{Sp} \cos \omega t$ ，电容上分压为多少？电阻上分压为多少？是否满足两个分压之和等于总电压（**KVL**方程）？在频域分析中如何理解两个分压之和等于总电压（**KVL**方程）？

作业3 耦合电容和 高频扼流圈

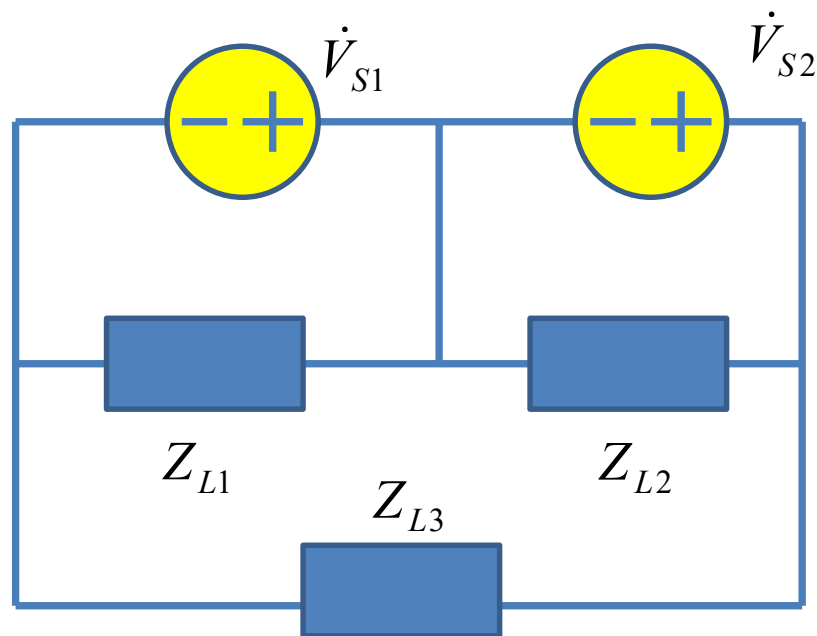


• (练习8.3.22)

- 如图**a**所示，这是一个用耦合电容耦合激励源和负载的简单电路模型。请分析确认：什么频率下可认为耦合电容是交流短路的？什么频率下可认为耦合电容是直流开路的？
- 如图**b**所示，这是一个高频扼流圈例子，一端接电源的高频扼流圈在此处被处理为接地。请分析确认：在什么频率下可认为高频扼流圈是直流短路的？什么频率下可认为高频扼流圈是交流开路的？

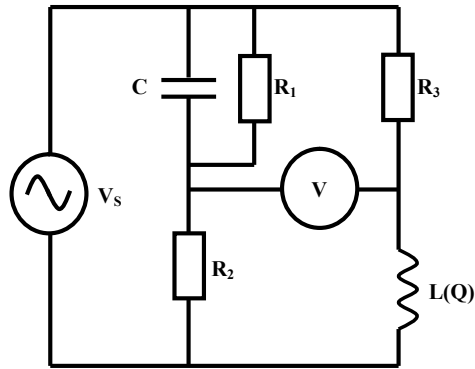
作业4：复功率

- **(练习8.3.5)** 如图所示电路中有两个电压源和三个负载，负载1吸收的功率为**1.8kW**和**600var**，负载2吸收功率为**1.5kVA**，功率因数**0.8超前**（**电流超前电压**），负载3为 $(12\Omega) \parallel (j48\Omega)$
 - 如果 $\dot{V}_{s1} = \dot{V}_{s2} = 120\angle 0^\circ \text{V}_{\text{rms}}$ ，求两个电源发送的平均功率和无功功率
 - 确认实功和虚功均守恒

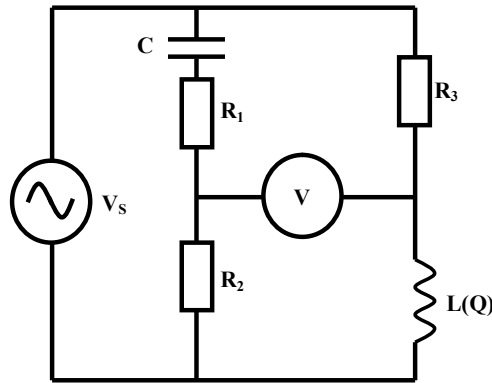


作业5：电桥

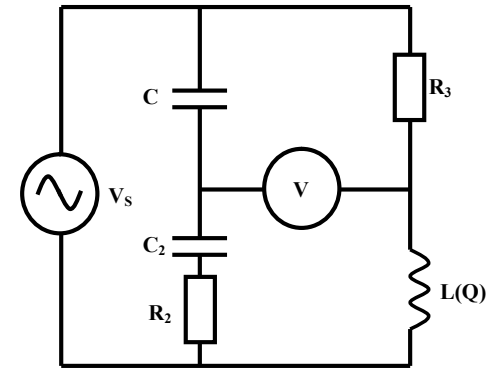
- 5、6 (习题8.4, 习题8.5)
- ## 用电桥测电感感值及其Q值



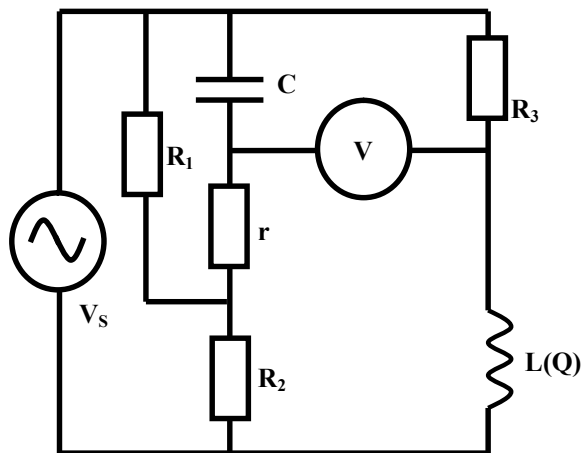
(a) 麦克斯韦电桥



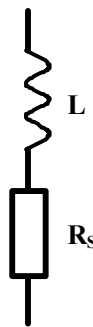
(b) 海氏电桥



(c) 欧文电桥



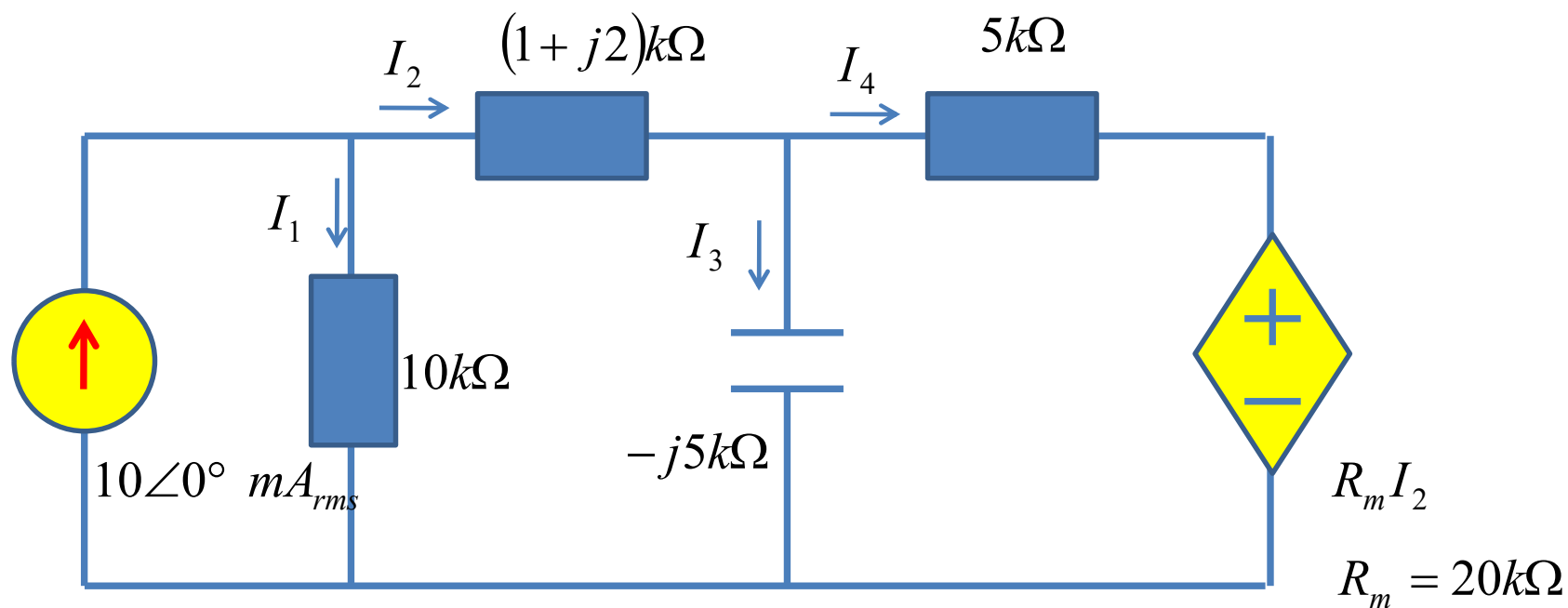
安德森电桥



$$Q = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{\text{储能}}{\text{耗能}} = \text{品质因数}$$

作业7：频域下的结点电压法

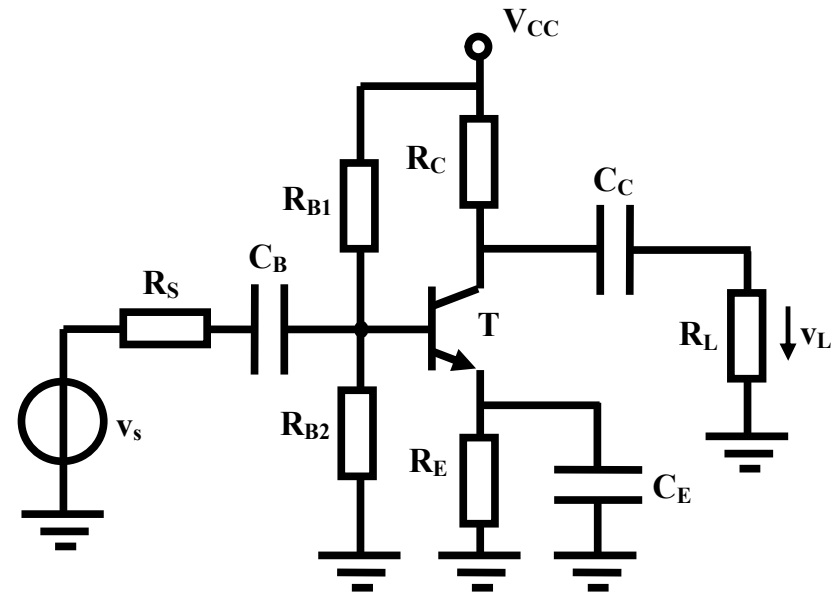
- 用结点电压法列出如图所示电路的电路方程，求解结点电压，之后再计算各个支路的电流分别为多少。
 - 可以利用matlab进行复数运算，但必须给出计算过程和步骤



作业8

(练习8.3.24) 如图所示，这是一个晶体管放大器电路。已知电源电压 $V_{CC}=12V$ ，分压偏置电阻 $R_{B1}=56k\Omega$ ， $R_{B2}=10k\Omega$ ，集电极直流负载电阻 $R_C=5.6k\Omega$ ，发射极串联负反馈电阻 $R_E=1k\Omega$ ，信源内阻 $R_S=100\Omega$ ，负载电阻 $R_L=6.2k\Omega$ 。NPN-BJT晶体管的厄利电压为 $V_A=100V$ ，电流增益为 $\beta=300$ 。图中三个电容为 $1\mu F$ 大电容，直流分析时开路处理。

- 直流分析，获得直流工作点；
- 获得直流工作点下的微分元件电路模型。交流分析时考虑晶体管的两个寄生电容，假设在该直流工作点下，晶体管的微分电容 $C_{be}=70pF$ ， $C_{bc}=2pF$ ，同时考虑基极体电阻，假设 $r_b=100\Omega$ 。
- 用结点电压法获得小信号分析电路方程
- (matlab选作) 分析该放大器小信号电压增益 $A_v=v_L/v_s$ 的幅频特性和相频特性。
- (matlab选作) 分别将三个电容 C_B 、 C_C 、 C_E 增加10倍，根据电压增益幅频特性分析确认哪个电容对低端3dB频点起决定性作用？



提示：本练习参见例4.5.1，首先获得直流工作点，之后给出直流工作点上的局部线性化模型。微分电容获得也应在直流工作点计算基础上获得的微分元件。

作业9 波特图

- 自学**P640-648**内容，学会画波特图
 - 周三晚上习题课略讲
 - 波特图：幅频特性和相频特性的分段折线描述
- 练习**8.3.20** 画出如下传递函数的波特图

$$H(j\omega) = -10 \frac{1 + \frac{j\omega}{5 \times 10^9}}{\left(1 + \frac{j\omega}{5 \times 10^6}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{1 \times 10^8}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{5 \times 10^{10}}\right)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

CAD作业

- 在二阶RC网络输入端口加正弦波恒压源，测量输出端口开路电压
 - 画出电压传递函数的幅频特性和相频特性
- 调整R2取值，从小到大，调整到什么位置，可正弦振荡？继续增加R2，正弦振荡波形会发生怎样的变化？
 - 修正电路：分析振荡波形是否改善，是否更接近理想正弦波？为什么？（分析两个二极管的作用）

