电子电路与系统基础II

理论课第2讲　电容与电感

李国林
清华大学电子工程系

电容与电感 大纲

- 电容与电感的基本特性
  - 基本定义
  - 基本特性
    - 记忆性、连续性、无损性
- 二端口电感和电容
- 纯容或纯感的串并联
- 动态电路状态方程的数值解方法

1.1 什么是电容/电感

- 电容是对导体结构保持自由电荷能力大小的描述
  - 自由电荷在导体结点上积累或消散，电荷形成的空间电场随时间发生变化，这种时变电场形成位移电流：电容描述导体结构（结点）电压变化形成位移电流的大小
  - 电容同时也是对导体结构电能存储能力大小的描述
    - 电压变化导致自由电荷积累或流失：吸收或释放电能

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

- 电感是对导线结构流通电流产生与链接磁通能力大小的描述
  - 导线回路有电流流过，电流产生磁场，磁场在导线平面的通量为磁通，因而电流产生磁通。当电流发生变化时，磁通发生变化，时变磁通产生感生电动势，以阻碍电流的变化：电感描述导线结构（回路）电流变化形成感生电动势的大小
  - 电感同时也是对导线结构磁能存储能力大小的描述
    - 电流变化导致磁通积累或流失：吸收电能（磁能形式存储），释放磁能

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

$$v(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

电路中的电容效应和电感效应无所不在

- 电路中，有导体则存在电容效应
  - 导体结点上可以有电荷的累积或流失，则产生位移电流，电路模型中必然有电容抽象以描述该位移电流，从而电荷守恒定律（**KCL**方程）始终满足

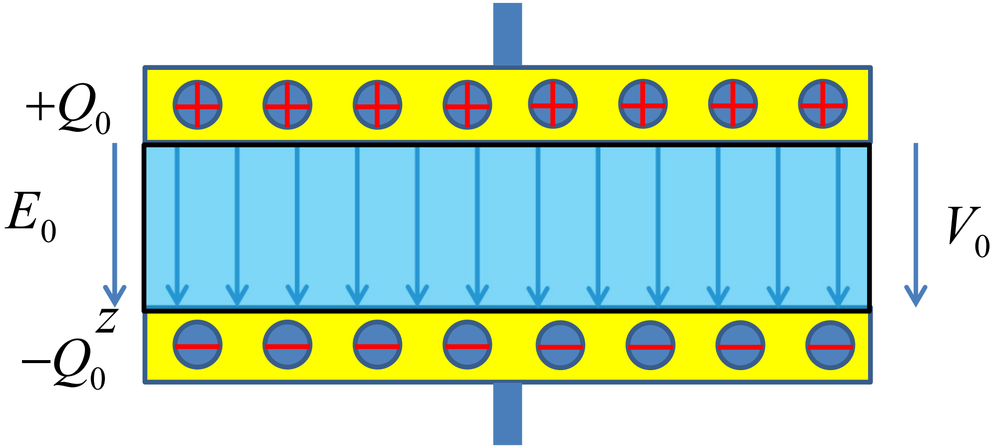
- 电路中，有导线电流通过则存在电感效应
  - 导线回路电流发生变化，回路中的磁通则会积累或流失，磁通的变化导致感生电动势，电路模型中必然有电感抽象以描述感生电动势，从而能量守恒定律（**KVL**方程）始终满足

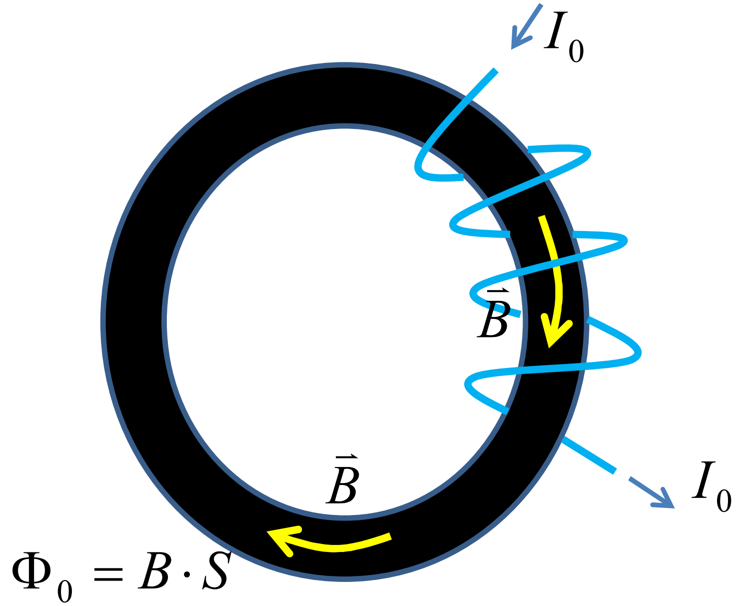
- 电容、电感效应在电路分析中是否需要考虑，则看它们的影响力大小
  - 频率较低时，小寄生电容视为开路，小寄生电感视为短路
  - 人为制作的大电容、大电感可以在很低频率上开始起作用

  - 看电容电感大小，看频率高低（信号随时间的变化快慢）

人工制作的电容和电感

- 其抽象过程见讲义第6章





$$C = \frac{Q_0}{V_0} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

$$L = \frac{N\Phi_0}{I_0} = \mu \frac{S}{p} N^2 = N^2 \Xi$$

$$\Xi = \mu \frac{S}{p}$$ 磁环磁导

1.2 电容、电感的三个基本特性

- 电容和电感是对偶元件，知其一则知其二

	对偶 duality		
电压V			电流I
电荷Q	$Q = Cv$	$\Phi = Li$	磁通Φ
电容C	$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dv}{dt}$	$v = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$	电感L
串联			并联

- 下面以电容为例，说明这两个电抗元件的三个基本特性

（1）记忆性

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\cdot d\tau = V_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\cdot d\tau$$

电容的端口电压是状态变量：电容电压依赖于之前所有时间段的电流，它是有记忆的

下一时刻电容电压是上一时刻电容电压基础上的增量，该增量由电容极板上的电荷增量决定

$$v(t) = Ri(t)$$

电阻则是无记忆元件：当前电压仅由当前电流决定，和以前的电流没有任何关系

$$v(t+\Delta t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t+\Delta t} i(\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\cdot d\tau + \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\cdot d\tau$$

$$= v(t) + \frac{\Delta Q}{C} = v(t) + \Delta v$$

状态变量具有的特征：当前状态由前一时刻状态转移而来，是前一状态基础上的变化（缓变，一般不会跳变）

（2）连续性

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\cdot d\tau$$

$$v_C(t+\Delta t)-v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i_C(\tau)\cdot d\tau$$

如果电流有界，即

$$|i_C(\tau)|<I_M,\tau\in[t,t+\Delta t]$$

$$0\le|v_C(t+\Delta t)-v_C(t)|=\left|\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i_C(\tau)\cdot d\tau\right|\le\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t}|i_C(\tau)|\cdot d\tau<\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} I_M\cdot d\tau=\frac{I_M\Delta t}{C}$$

$$\Delta t\to 0 \qquad |v_C(t^+)-v_C(t^-)|=0$$

$$v_C(t^+)=v_C(t^-) \qquad v_C(0^+)=v_C(0^-)$$

则电容两端电压不会发生突变，电容电压是连续变化的（状态变量一般不会跳变）

功率与能量

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$P(t)=v(t)\cdot i(t)=v(t)\cdot C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$E(t)=\int_{-\infty}^{t}P(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\left(Cv(\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau}\right)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}Cv(\tau)dv(\tau)=\frac{1}{2}Cv^2(\tau)\Big|_{-\infty}^{t}$$

电容吸收的总能量

$$=\frac{1}{2}Cv^2(t)$$

假设$v(-\infty)=0$

$$i(t)=Gv(t)$$

$$P(t)=v(t)\cdot i(t)=Gv^2(t)$$

$$E(t)=\int_{-\infty}^{t}P(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}Gv^2(\tau)d\tau$$

电导吸收的总能量

电容储能、电阻耗能

$$E_C(t)=\frac{1}{2}Cv^2(t)=\frac{Q^2(t)}{2C}$$

$$t_1 \le t \le t_2$$

$$\Delta E = E_C(t_2)-E_C(t_1)$$

$$=\frac{1}{2}Cv^2(t_2)-\frac{1}{2}Cv^2(t_1)$$

$$=\frac{1}{2}C\left(v^2(t_2)-v^2(t_1)\right)=\frac{1}{2C}\left(Q^2(t_2)-Q^2(t_1)\right)$$

电容可以吸收能量，可以释放能量

电容本身不消耗能量：电容吸收的能量，可以在下一个时间段完全释放出来

$$\Delta E=\frac{1}{2}Cv^2(t_2)-\frac{1}{2}Cv^2(t_1)\overset{v_2(t)=0}{=}-\frac{1}{2}Cv^2(t_1)=-E_C(t_1)$$

$$E_G(t)=G\int_{-\infty}^{t}v^2(\tau)d\tau$$

$$\Delta E = E_G(t_2)-E_G(t_1)$$

$$=G\int_{-\infty}^{t_2}v^2(\tau)d\tau-G\int_{-\infty}^{t_1}v^2(\tau)d\tau$$

$$=G\int_{t_1}^{t_2}v^2(\tau)d\tau>0$$

电阻是纯消耗能量的，因为随着时间的增长，电阻吸收的能量是单调增加的：电阻是耗能元件：转换为其他形式的能量，如热能，光能，…

（3）无损性：吸能—释能

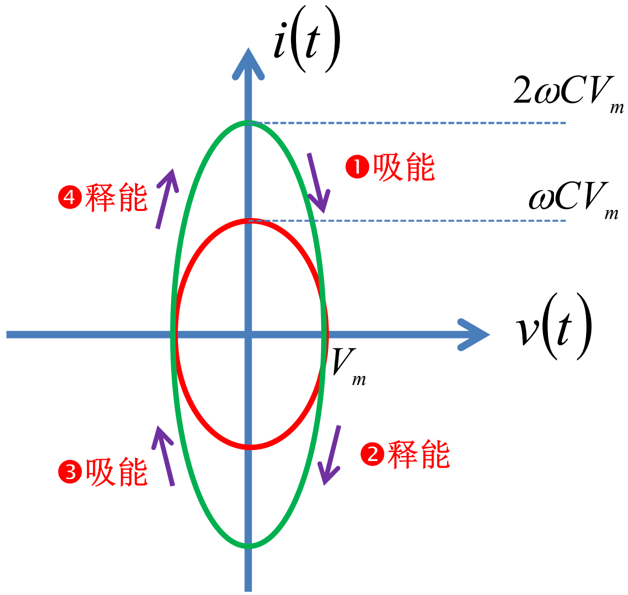
$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t)=V_m\sin\omega t$$

$$i(t)=Gv(t)$$

$$i(t)=\omega CV_m\cos\omega t$$

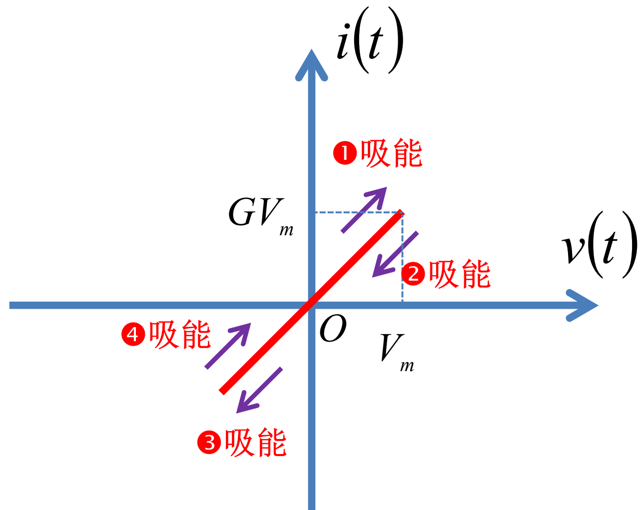
$$i(t)=GV_m\sin\omega t$$



不同频率，
不同伏安
运行轨迹

不能用伏
安iv特性描
述电容C，
用qv特性
描述电容

吸能、释能；
释能=吸能：无损



用伏
安iv
特性
描述
电阻R，
就是
一条
直线

任意频率，都在一条特性曲线上
始终在一三象限：一直吸能，耗能

电容和电感基本特性

- 电容端口电压是状态变量：电容电压依赖于之前所有时间段的电流，它是有记忆的
  - 电感端口电流是状态变量：电感电流依赖于之前所有时间段的电压，它是有记忆的

$$v(t)=V_0+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\cdot d\tau \qquad i(t)=I_0+\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\cdot d\tau$$

- 如果端口电流有界，则电容电压不能突变，电容电压是连续的
  - 如果端口电压有界，则电感电流不能突变，电感电流是连续的

$$v_C\left(t^+\right)=v_C\left(t^-\right) \qquad i_L\left(t^+\right)=i_L\left(t^-\right)$$

- 电容可吸收电能，以电荷存储形式存储为电能，该电能可全部释放，它自身不损耗能量
  - 电感可吸收电能，以磁通形态存储为磁能，该磁能可以全部释放，它自身不损耗能量

$$E_C(t)=\frac{1}{2}Cv^2(t)=\frac{Q^2(t)}{2C} \qquad E_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)=\frac{\Phi^2(t)}{2L}$$

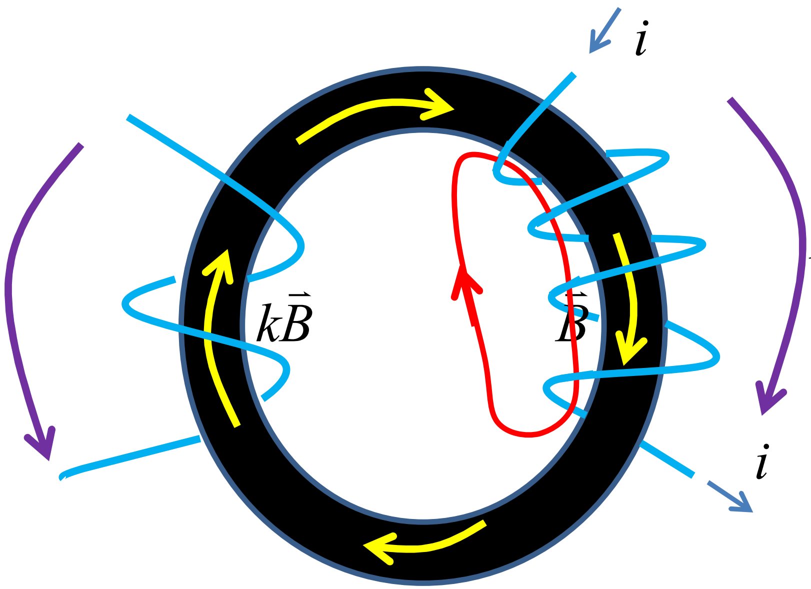
电容与电感 大纲

- 电容与电感
- 二端口电感和电容
  - 互感变压器
  - 理想变压器抽象
  - 互感变压器等效电路
  - 二端口电容
- 电容串并联
- 含电容、电感电路的电路方程数值解方法

2.1 互感变压器

S：环横截面面积
N：总匝数
p：环周长
Ξ：磁环磁导

$$v_2 = M\frac{di}{dt}$$



$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$B = \mu\frac{N}{p}i$$

$$\Phi_0 = B\cdot S = \mu\frac{N}{p}i\cdot S$$

$$\Xi = \mu\frac{S}{p}$$

$$\Phi_0 = N\Xi i$$

$$M = kN_2(N\Xi)$$

$$\Phi = N\Phi_0 = N^2\Xi i$$

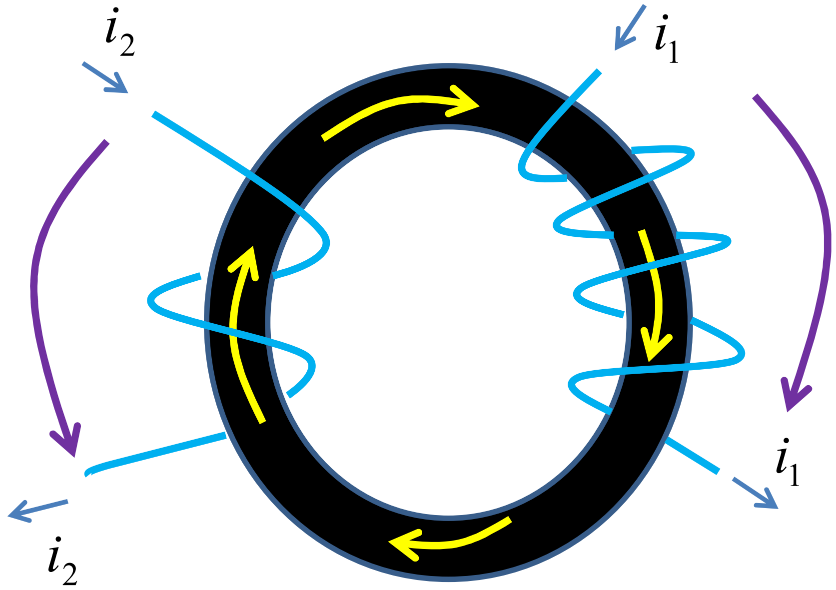
$$L = \frac{d\Phi}{di} = N^2\Xi = N(N\Xi)$$

N_2：第二线圈总匝数
k：第二线圈链接的第一线圈产生磁通的百分比

互感：**Mutual Inductance**　　自感：**Self Inductance**

二端口网络

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$



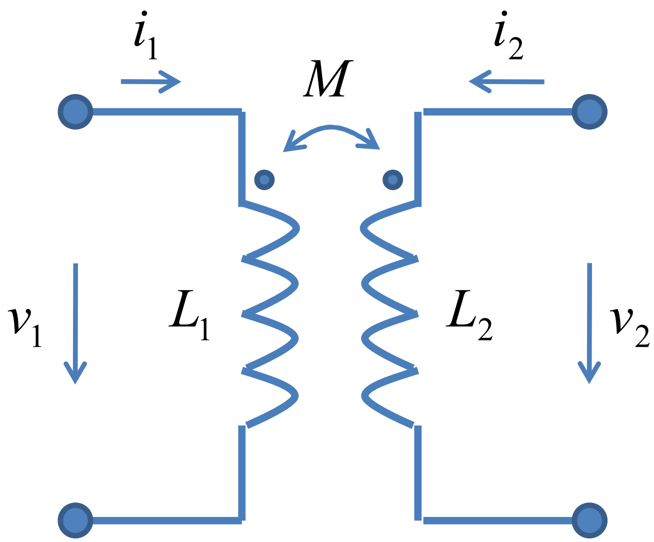
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$L_1 = N_1^2 \Xi$$

$$L_2 = N_2^2 \Xi$$

$$M_{12} = M_{21} = M = kN_1N_2\Xi$$

电路符号



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

二端口电感

$$v = L\frac{di}{dt}$$

单端口电感

$$L_1 = N_1^2 \Xi$$

$$L_2 = N_2^2 \Xi$$

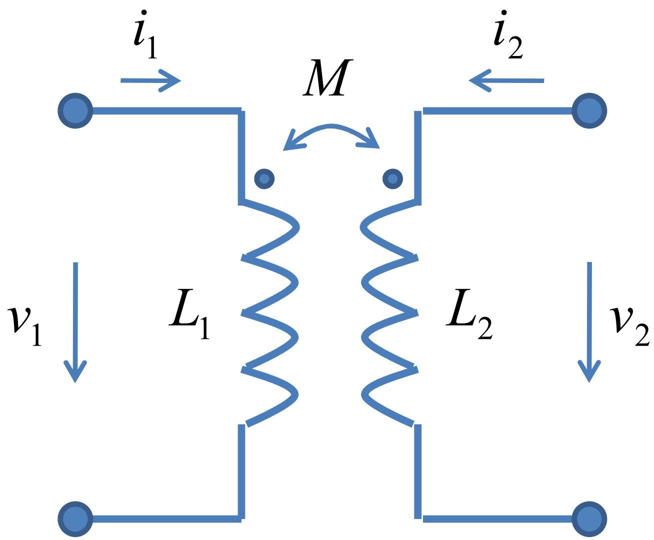
$$M = kN_1N_2\Xi = k\sqrt{L_1L_2} = kM_0$$

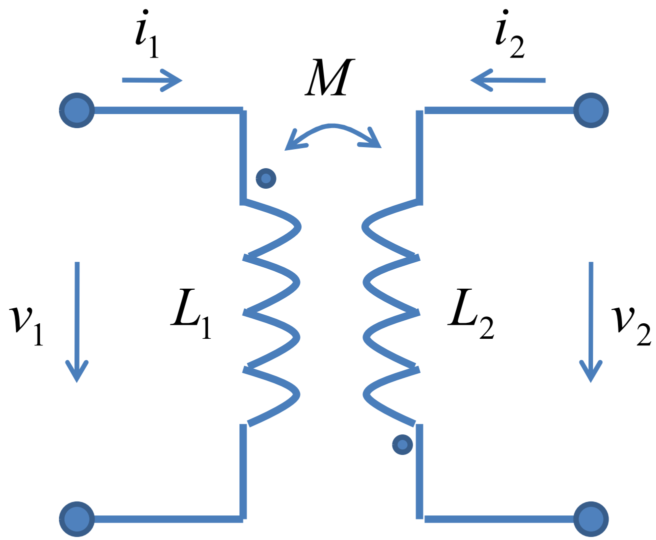
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{M}{M_0}$$

耦合系数：磁通链接百分比

$$0 \le k \le 1$$

同名端



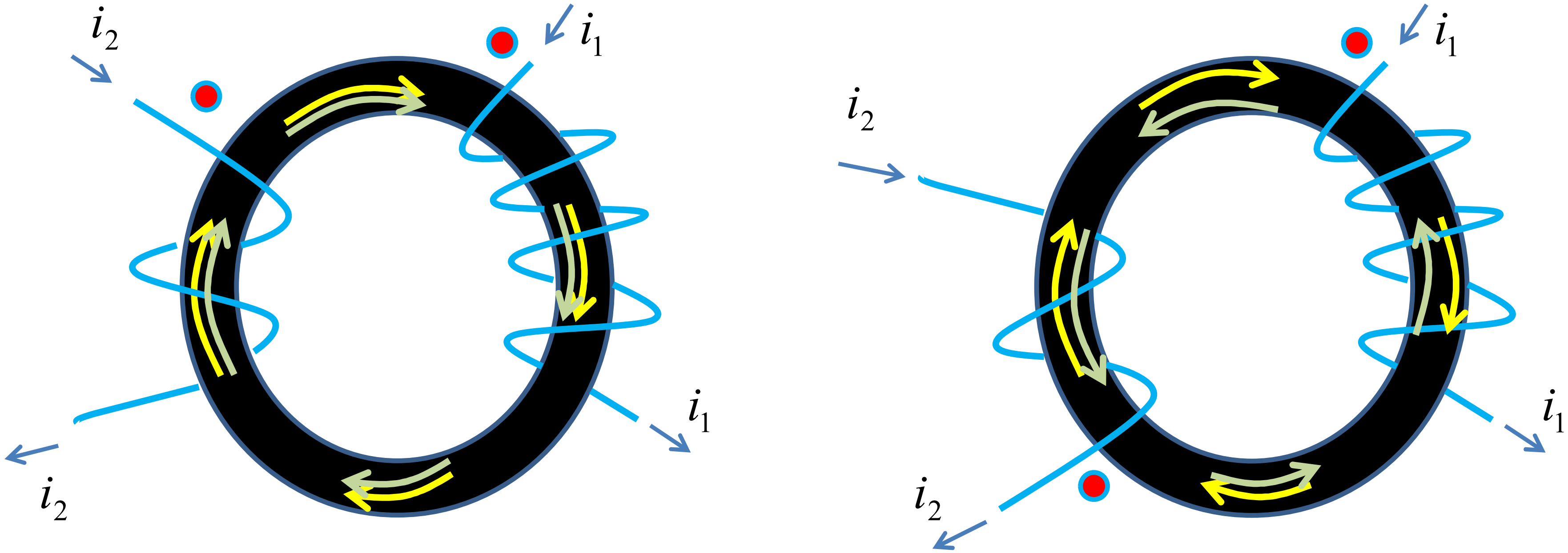


$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

如何判定同名端

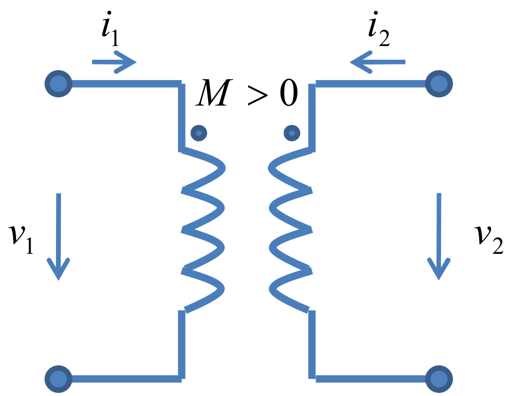


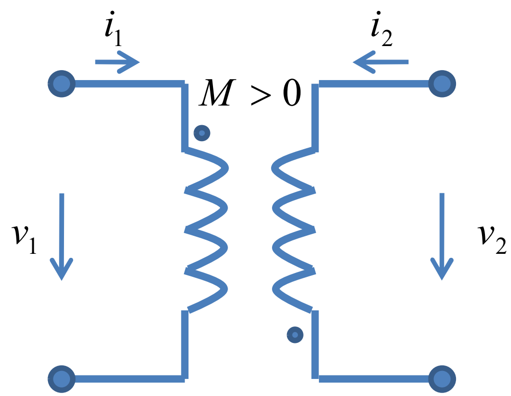
流入电流使得磁通加强的两个端点是同名端

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

数学形式统一





$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$M>0$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$M>0$

$M>0$

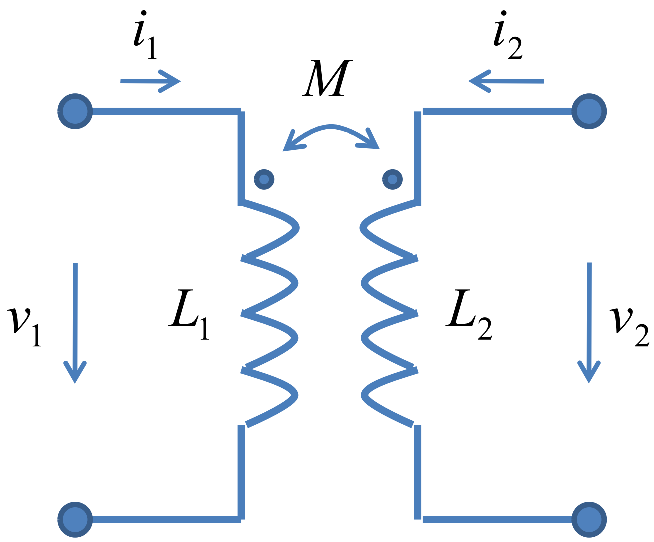
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$M<0$

$$-1 \le k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1$$

如果耦合系数大于**0**，表明两个端口按参考方向，同向电流导致电感内磁通加强。
如果耦合系数小于**0**，表明两个端口按参考方向，同向电流导致电感内磁通减弱。

储能关系



如果两端电流实际流入导致磁通加强，**$Mi_1i_2>0$**，储能累加形态

如果两端电流实际流入导致磁通降低，**$Mi_1i_2<0$**，储能降低：一个端口进能量，一个端口出能量

$$p(t)=v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)$$
$$=\left(L_1\frac{di_1(t)}{dt}+M\frac{di_2(t)}{dt}\right)i_1(t)$$
$$+\left(L_2\frac{di_2(t)}{dt}+M\frac{di_1(t)}{dt}\right)i_2(t)$$
$$=\frac{1}{2}L_1\frac{d}{dt}i_1^2(t)+M\frac{d}{dt}\left(i_1(t)i_2(t)\right)+\frac{1}{2}L_2\frac{d}{dt}i_2^2(t)$$

$$E(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\upsilon)d\upsilon$$
$$=\frac{1}{2}L_1i_1^2(t)+Mi_1(t)i_2(t)+\frac{1}{2}L_2i_2^2(t)$$

假设： $E(-\infty)=0$

理想变压器是互感二端口元件极致化原则下的一种高度抽象

2.2 理想变压器抽象

$$M_0=\sqrt{L_1L_2}\to\infty, k=\frac{M}{M_0}\to 1$$

理想抽象条件

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=M_0\begin{bmatrix} n & k \\ k & \frac{1}{n} \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

互感变压器是二阶元件

$$n=\frac{N_1}{N_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

匝数比

$k=1$

全耦合

二阶微分方程退化为一阶微分方程

$$v_1=nv_2$$

$$v_2=M_0\frac{d}{dt}\left(i_1+\frac{i_2}{n}\right)$$

全耦合互感变压器是一阶元件

$M_0\to\infty$

极大电感量

$$\frac{d}{dt}\left(i_1+\frac{i_2}{n}\right)\to 0 \qquad i_1+\frac{i_2}{n}=I_0$$

直流短路，短路电流无关系

扣除直流后，两回路电流线性关系

$$v_1=nv_2$$

$$i_1=-\frac{1}{n}i_2$$

理想变压器是零阶元件，视为二端口电阻网络

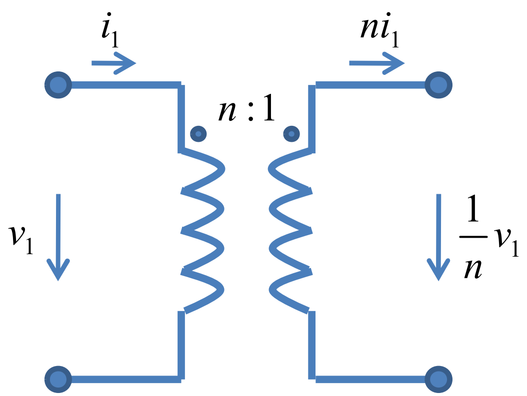
理想变压器
变压、变流、理想传输

$$v_1 = nv_2$$

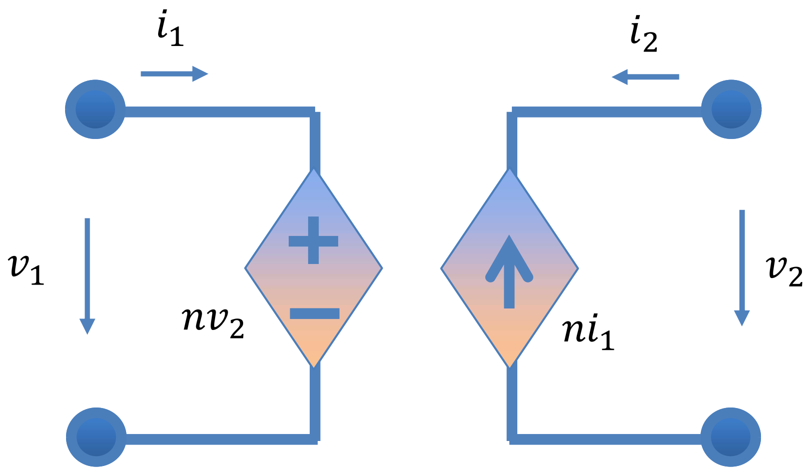
$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2$$

$$\mathbf{T}_{idealtransformer} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \qquad \left(n = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$



$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 \equiv 0$$



h参量等效电路

$v_1 = nv_2$

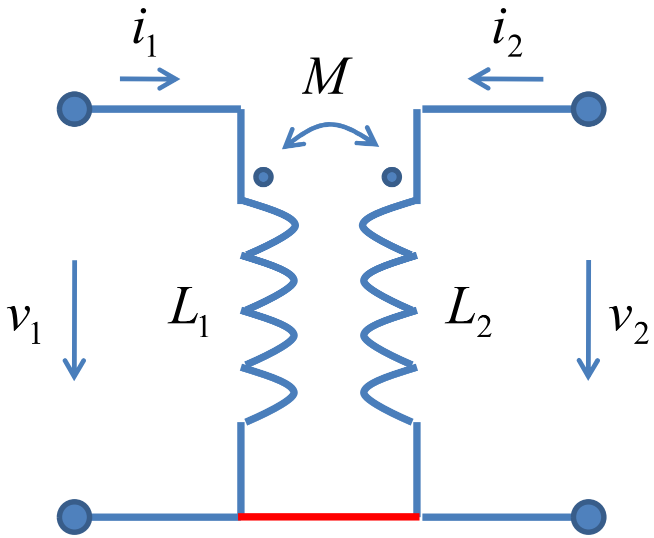
$i_2 = -ni_1$

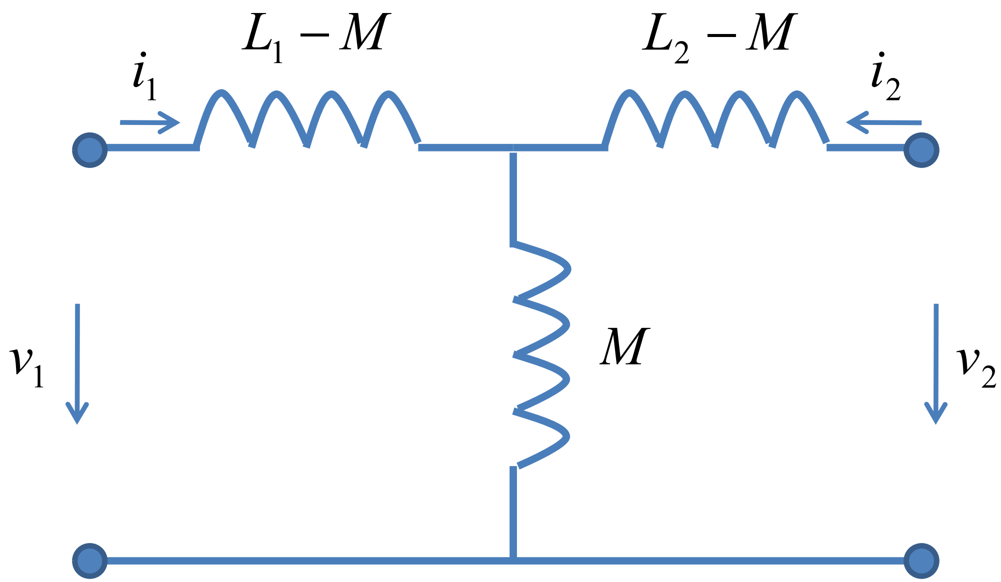
理想变压器既不储能，也不耗能，只是传输能量
端口1进入多少能量，都在端口2传输出去！

2.3 互感变压器等效电路

- 互感变压器可以抽象为理想变压器，但抽象条件过于苛刻
  - 实际互感变压器可以在理想变压器模型基础上添加非理想因素，形成等效电路
    - **k<1, M_0**有限
  - 理想变压器模型可使得问题分析大大简化

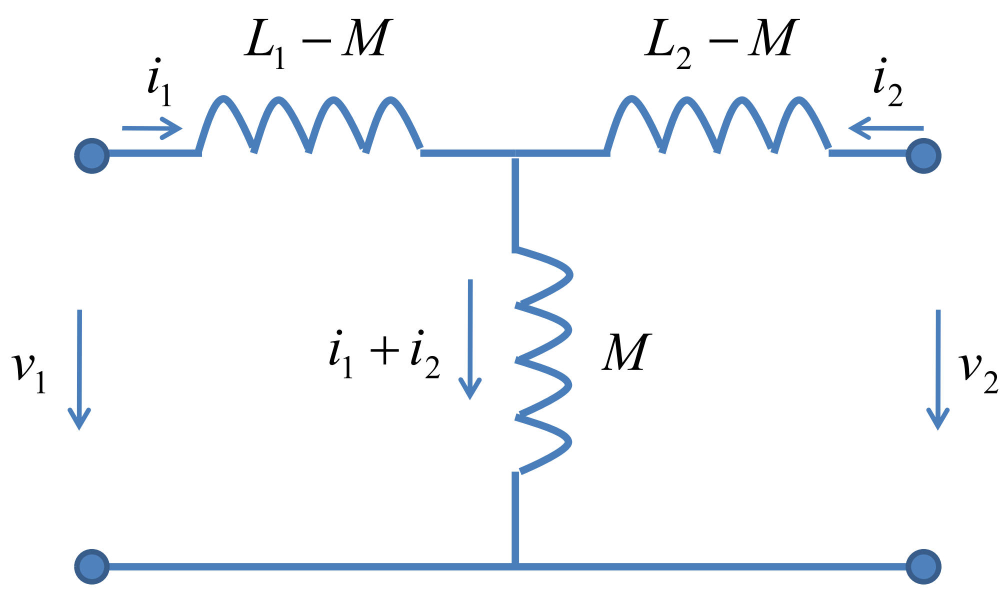
基本T形等效





$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

证明



$$v_1=(L_1-M)\frac{di_1}{dt}+M\frac{d}{dt}(i_1+i_2)=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2=(L_2-M)\frac{di_2}{dt}+M\frac{d}{dt}(i_1+i_2)=L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

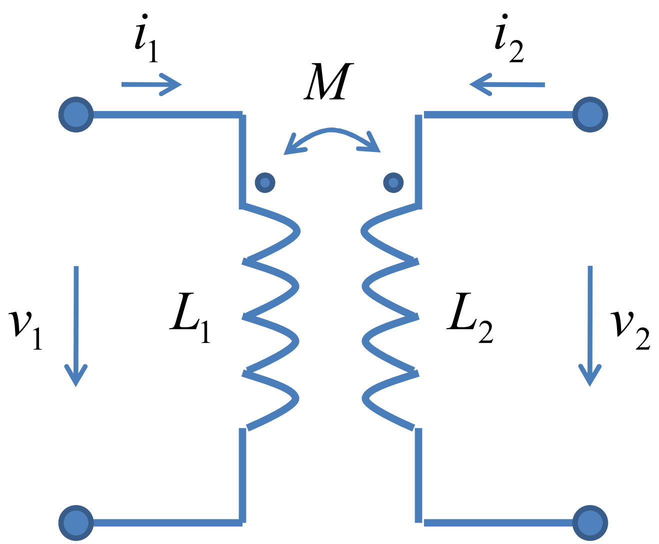
两个端口描述方程一模一样，因而对两个端口而言，完全等价

问题：

1、等效电路中可能有负电感出现

2、只适用于两个端口具有公共端点的情况

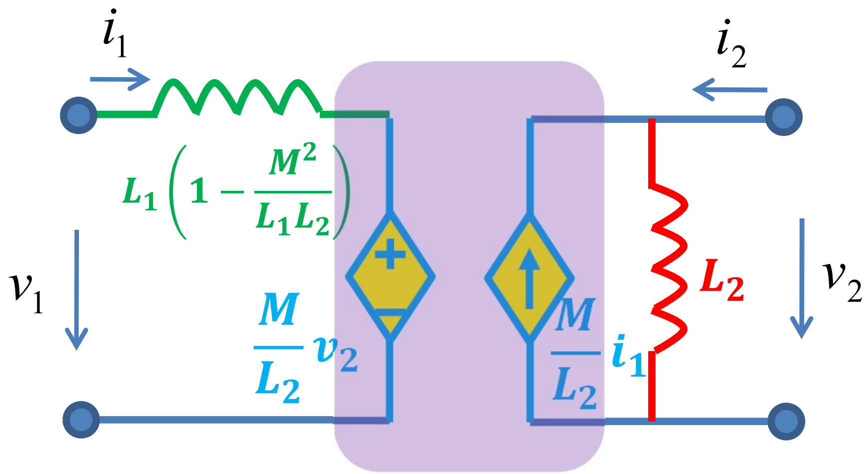
互感变压器的h参量电路模型



$$v_1 = L_1 \frac{d}{dt} i_1 + M \frac{d}{dt} i_2$$

$$v_2 = M \frac{d}{dt} i_1 + L_2 \frac{d}{dt} i_2$$

$$\frac{1}{L_2} \int v_2 \, dt = \frac{M}{L_2} i_1 + i_2$$

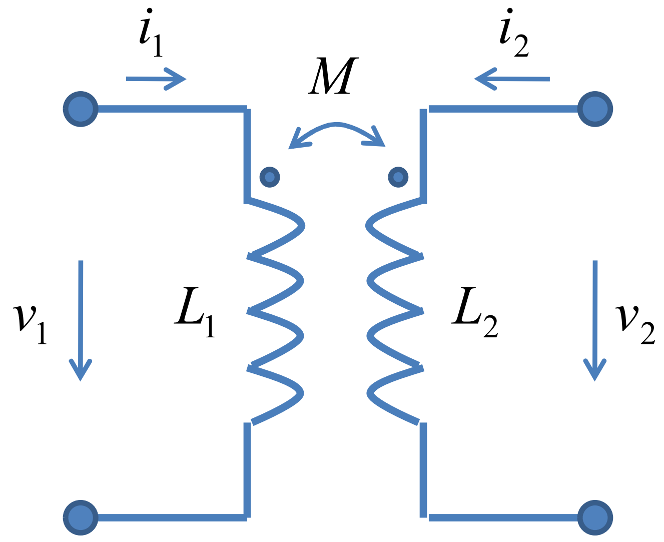


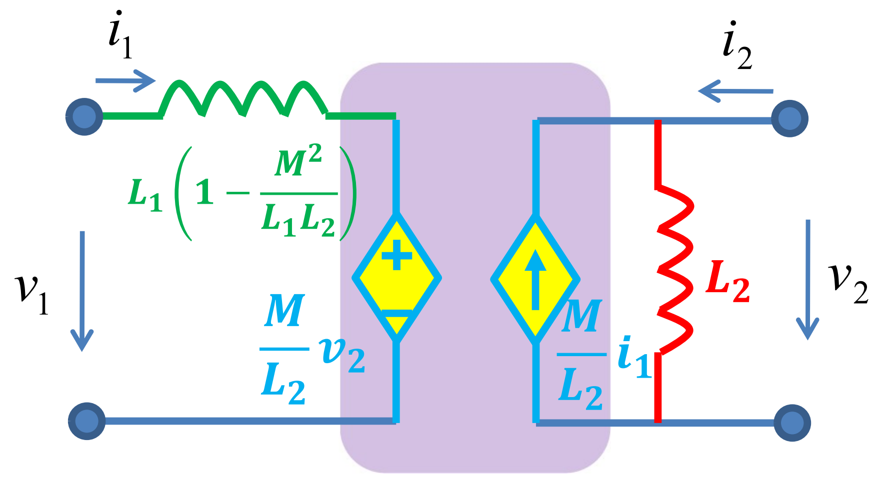
$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int v_2 \, dt - \frac{M}{L_2} i_1$$

$$v_1 = L_1 \frac{d}{dt} i_1 + M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_2} \int v_2 \, dt - \frac{M}{L_2} i_1 \right)$$

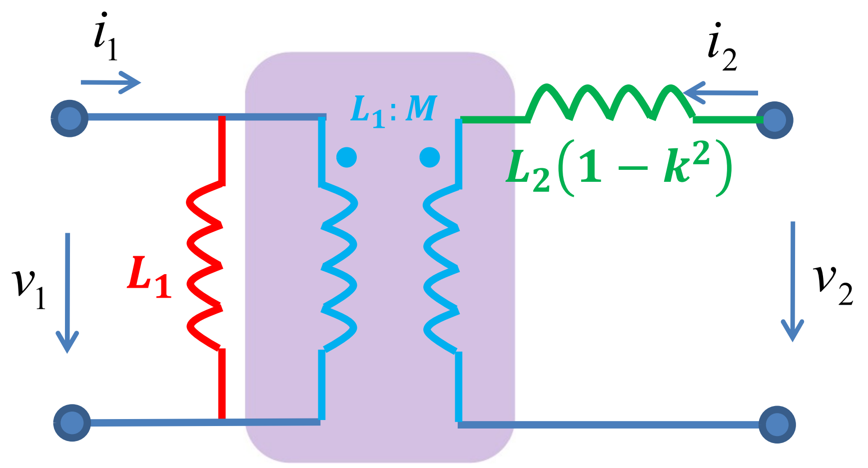
$$= L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{d}{dt} i_1 + \frac{M}{L_2} v_2$$

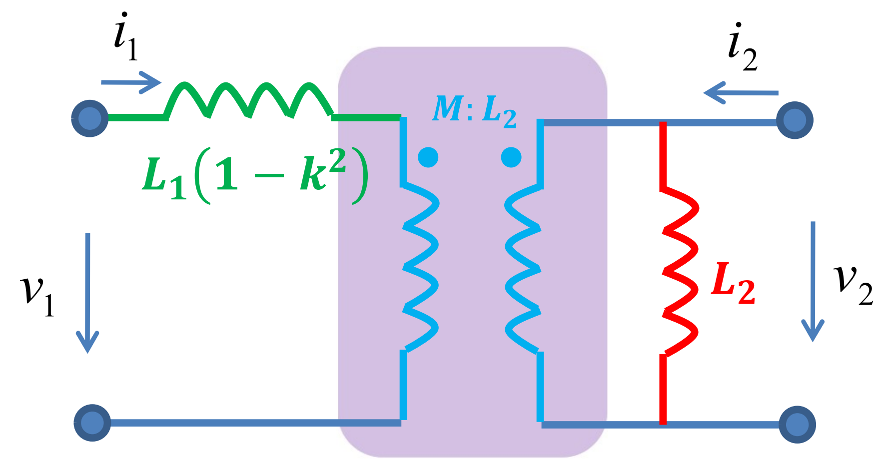
漏磁电感和励磁电感





h参量等效电路

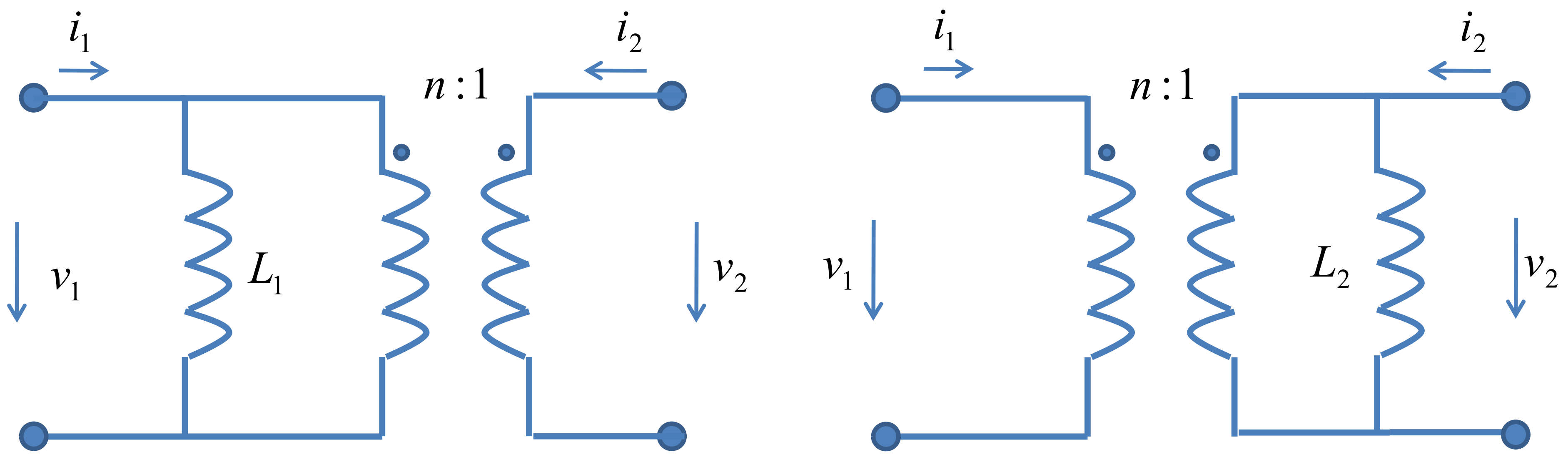




g参量等效电路

h参量等效电路

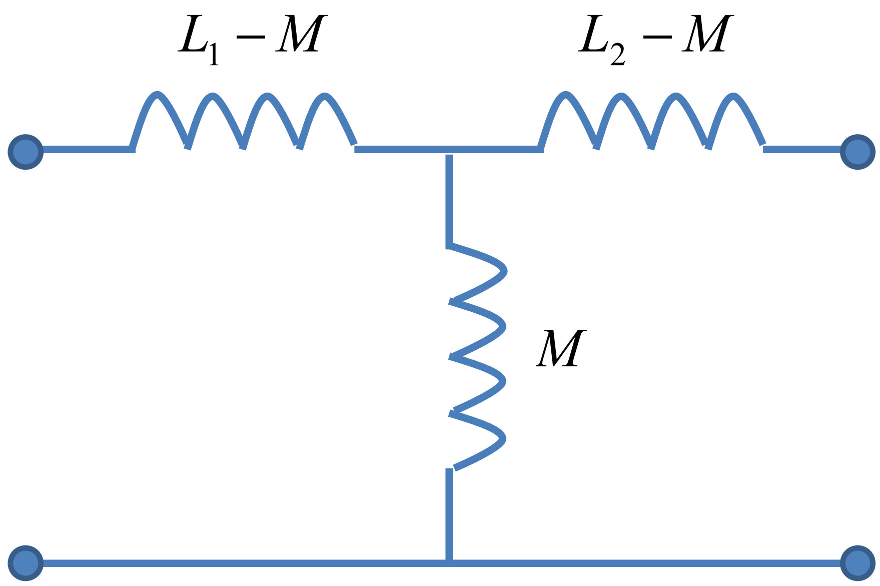
全耦合等效电路

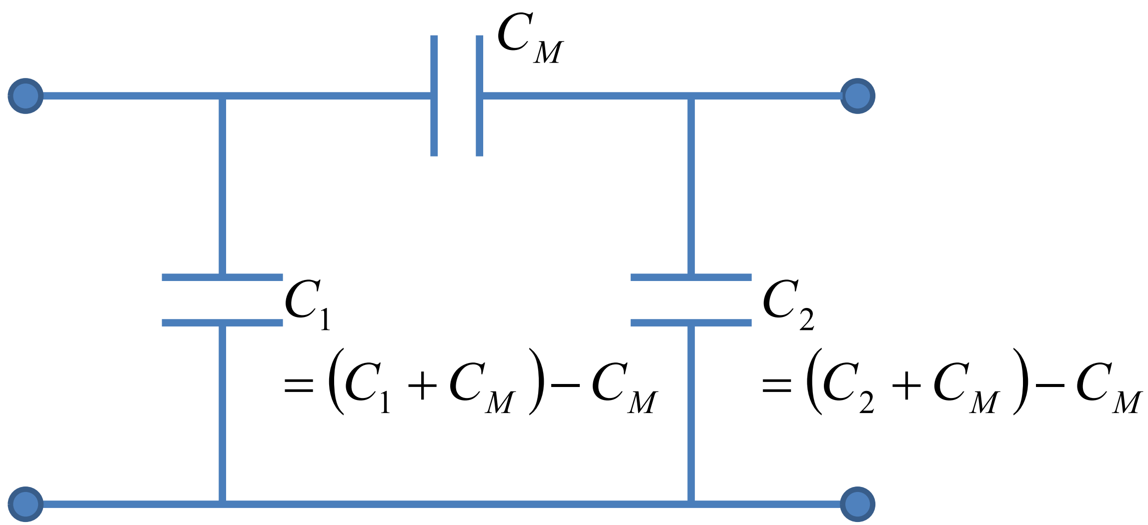


全耦合时，互感变压器退化为一阶电路
全耦合：一个回路产生的磁通全部被被第二个回路链接，没有任何泄露（漏磁为**0**）

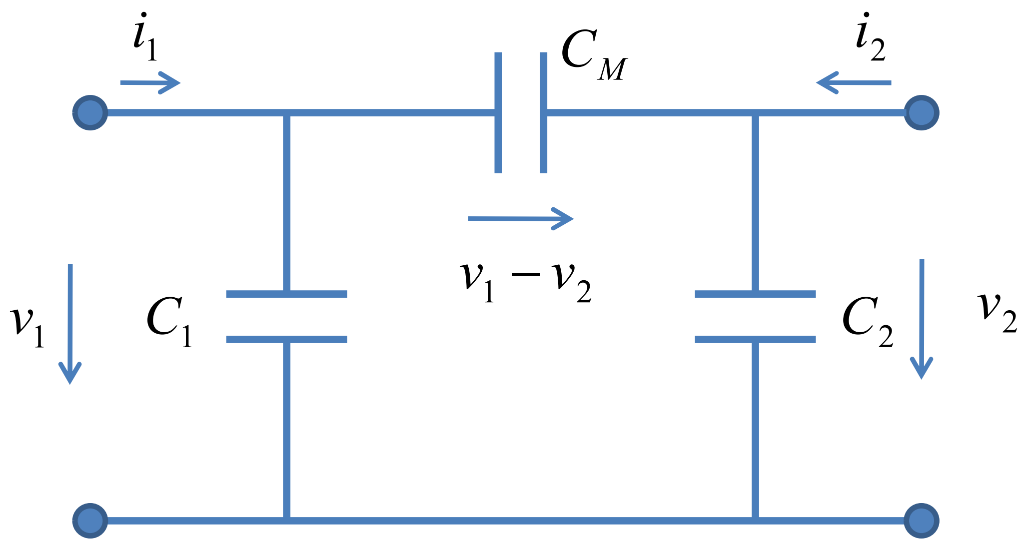
2.4

互感和互容





二端口电容描述方程



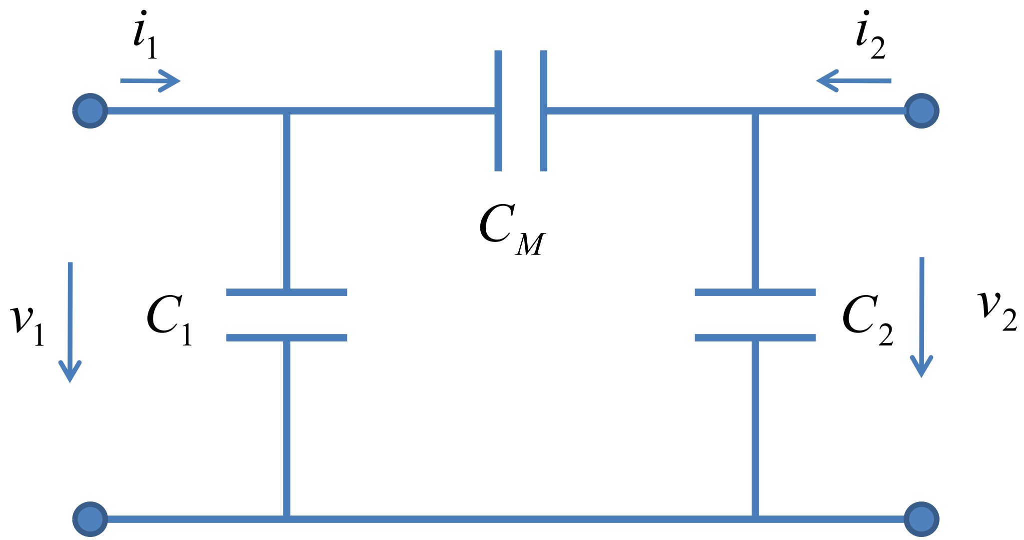
$$i_1 = C_1 \frac{d}{dt} v_1 + C_M \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = (C_1 + C_M)\frac{dv_1}{dt} - C_M \frac{dv_2}{dt}$$

$$i_2 = C_2 \frac{d}{dt} v_2 + C_M \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) = (C_2 + C_M)\frac{dv_2}{dt} - C_M \frac{dv_1}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_M & -C_M \\ -C_M & C_2 + C_M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

互容　　自容

耦合系数



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

二端口电感

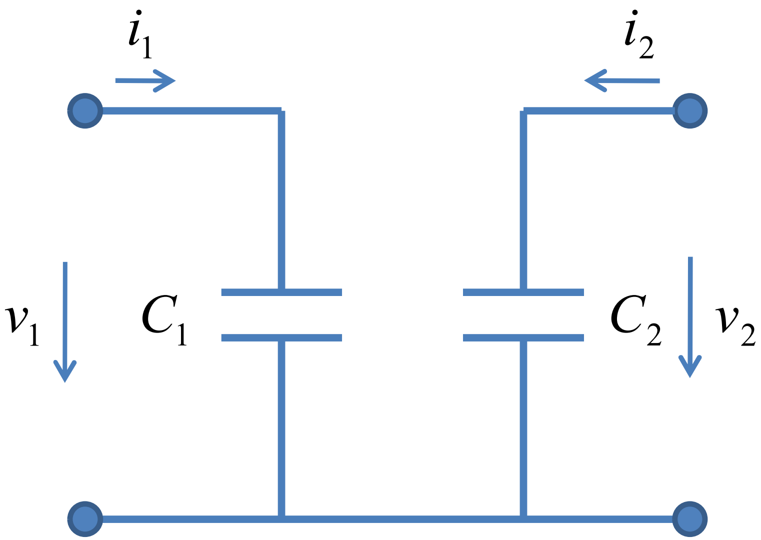
$$-1 \le k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1$$

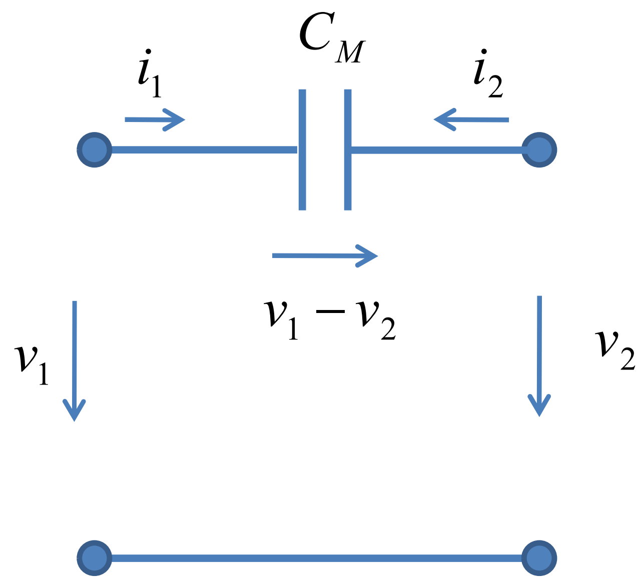
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_M & -C_M \\ -C_M & C_2 + C_M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

二端口电容

$$0 \le k = \frac{C_M}{\sqrt{(C_1 + C_M)(C_2 + C_M)}} \le 1$$

无耦合和全耦合





$k = 0$

$$k = \frac{C_M}{\sqrt{(C_1 + C_M)(C_2 + C_M)}}$$

$k = 1$

旁路电容

耦合电容

$i_2 = -i_1$

$C_M \to \infty$ 极致化的理想耦合电容

$v_2 = v_1$ 隔直通交

对偶：高频扼流圈：和理想耦合电容都是**1:1**的理想变压器

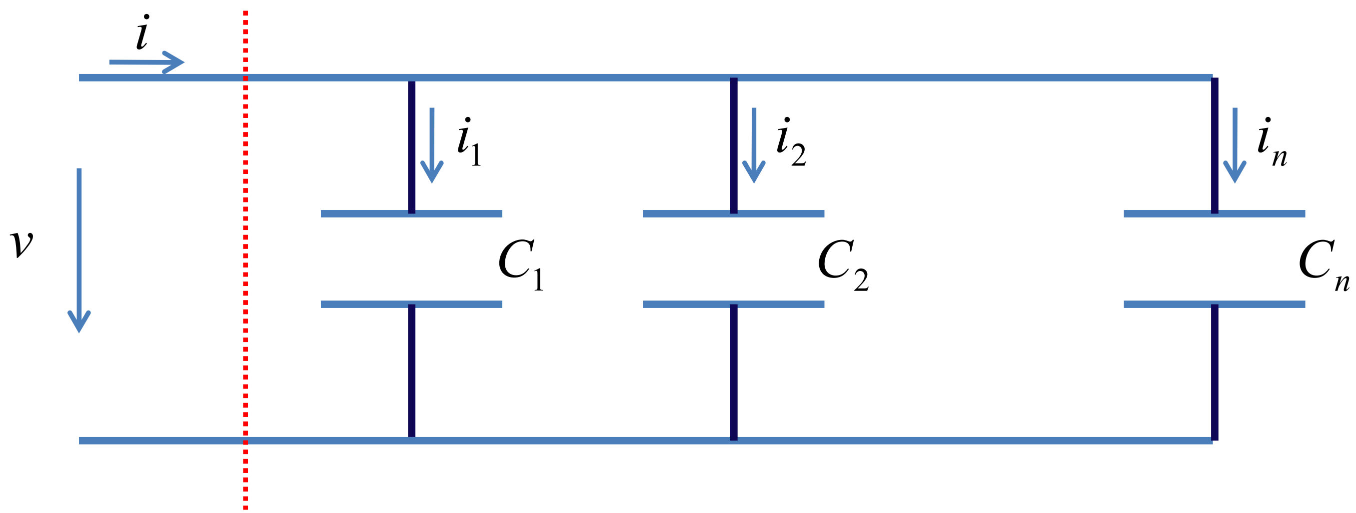
三、纯容、纯感的串并联

- 多个电容可以串联或并联在一起，它们则是非独立电容
  - 如果某个电容电压可以用其他电容电压的代数和表述，该电容则是非独立电容（多个电容构成闭环回路）
    - 或者某个电容的电容电流可以用其他电容电流表述，该电容也非独立（一个结点上所连元件均为电容）
  - 描述这样的电容网络，所用的微分方程数目**m**少于电容个数**n**，换句话说，仅有**m**个独立电容
    - **m=1**，则可等效为单端口电容
    - **m=2**，则可等效为二端口电容

- 电感同理：多个电感（包括二端口电感）的相互连接，其描述方程阶数为其独立电感数目

- 犹如纯阻网络的等效，纯容、纯感的串并联等效是为了简化分析或简化理解

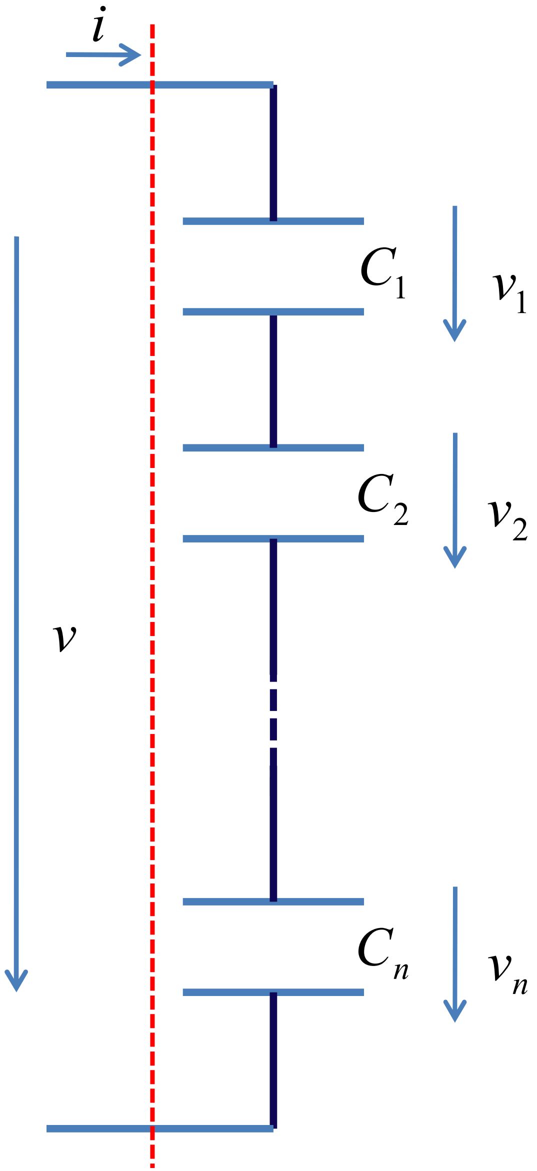
多电容并联



$$i=\sum_{k=1}^{n} i_k=\sum_{k=1}^{n}\left(C_k\cdot\frac{dv}{dt}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\right)\cdot\frac{dv}{dt}=C\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$C=\sum_{k=1}^{n} C_k$$

多电容串联



$$v=\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}\left(V_{k0}+\frac{1}{C_k}\cdot\int_0^t idt\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}V_{k0}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}\right)\cdot\int_0^t idt$$

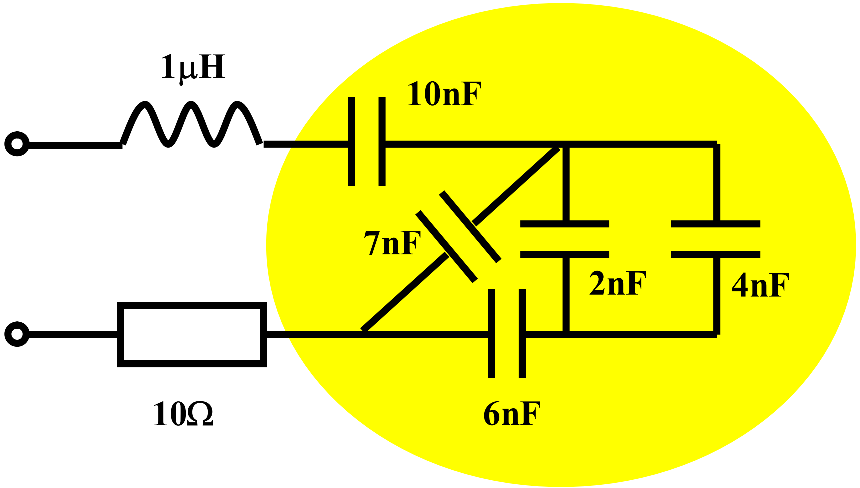
$$=V_0+\frac{1}{C}\cdot\int_0^t idt$$

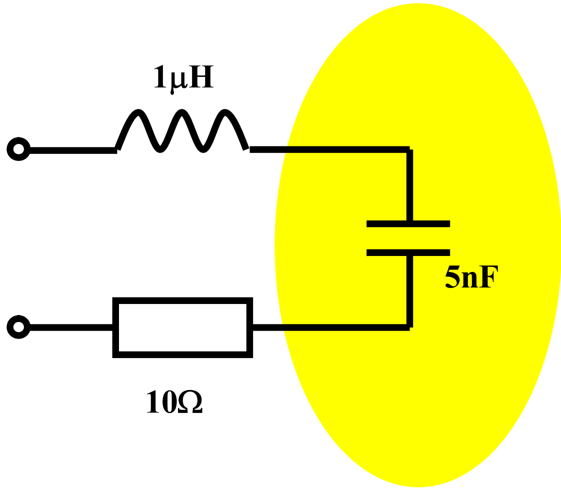
$$\frac{1}{C}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

电容和电导的串并联公式形式一致

$$n=2 \qquad \frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \qquad C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

例：画等效电路





虽然多个电容，但并非独立电容，它们等效为一个电容

$$
\begin{aligned}
C &= \left(\left(\left(2nF \parallel 4nF\right)\text{串}6nF\right)\parallel 7nF\right)\text{串}10nF \\
&= \left(\left(6nF\text{串}6nF\right)\parallel 7nF\right)\text{串}10nF = \left(3nF \parallel 7nF\right)\text{串}10nF \\
&= 10nF\text{串}10nF = 5nF
\end{aligned}
$$

电感和电容是对偶元件

$Q = CV$

$\Phi = LI$

线性时不变

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

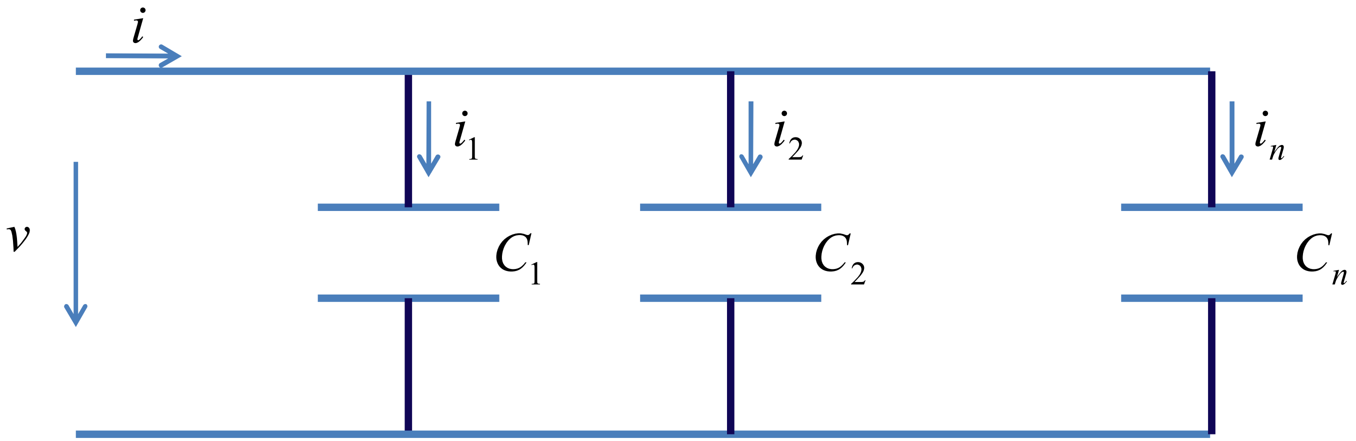
$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$E_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

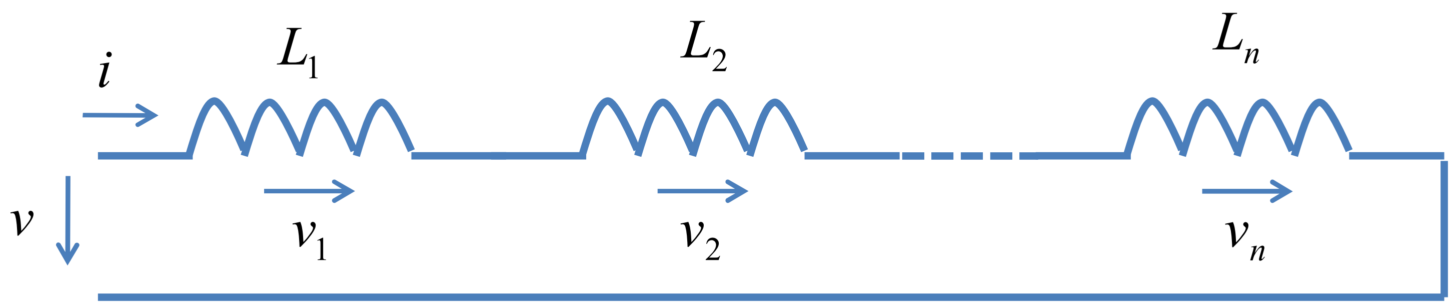
$$E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

所有电路处理均可从对偶量关系，知道了电容关系，电感关系自然写出

电容并联 对偶 电感串联

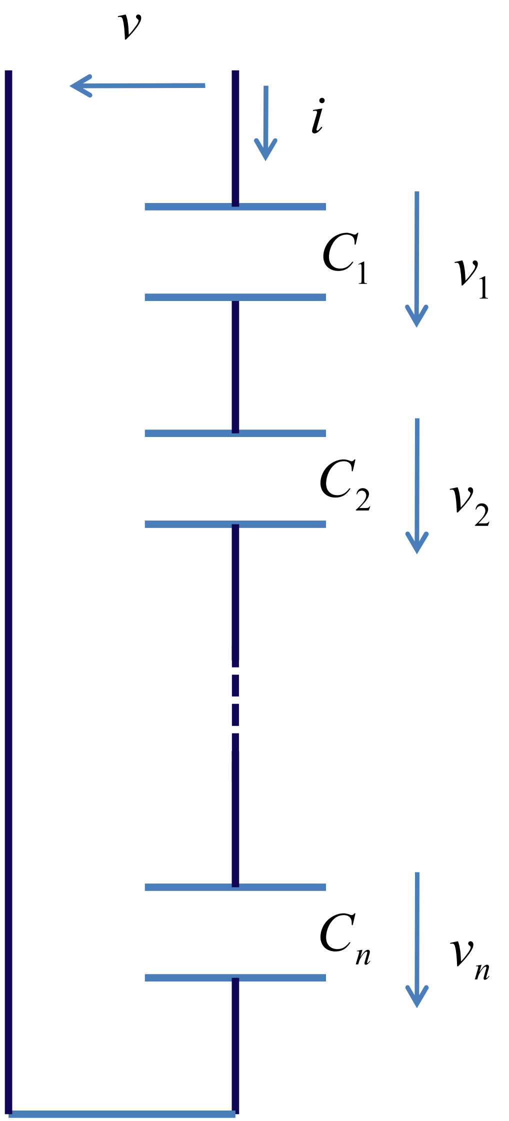


$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k$$



$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

电容串联　对偶　电感并联

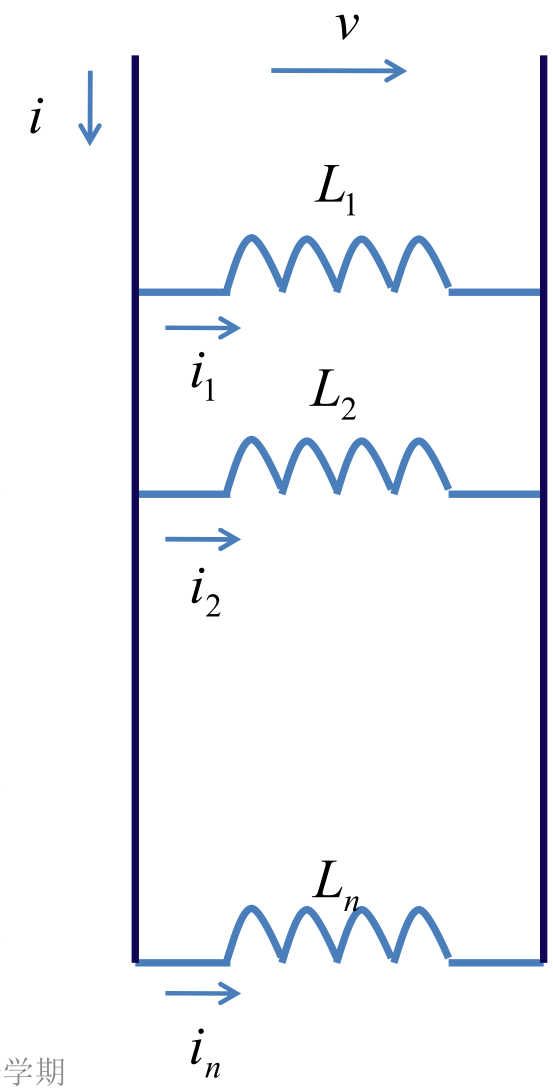


$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

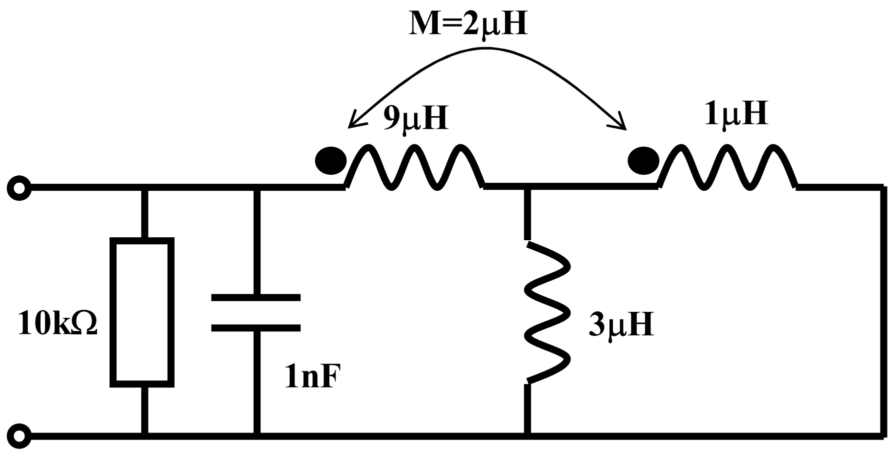
上述电感、电容串并联公式没有考虑空间互容、互感效应。

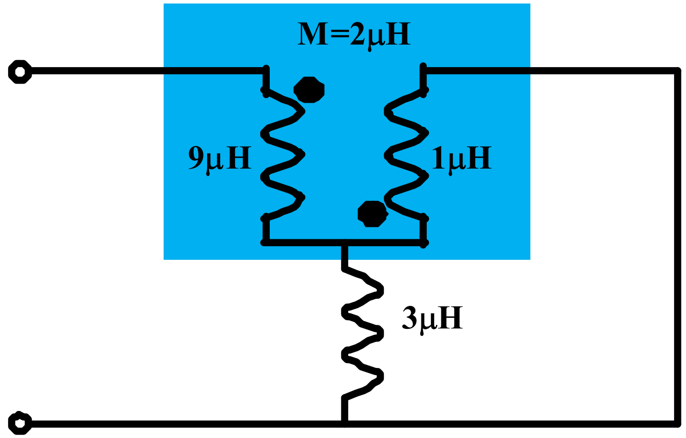
存在空间互容、互感效应时，不能用简单的串并联关系描述，可以通过加压求流或加流求压法获得等效电容、电感



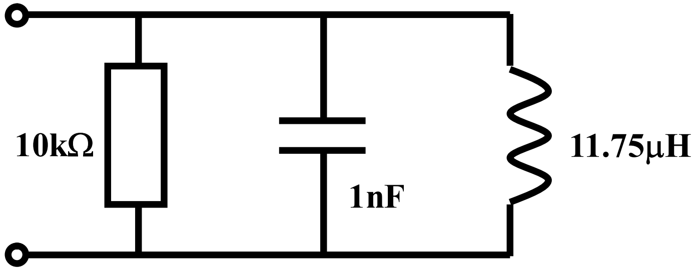
例：存在空间互感耦合的分析

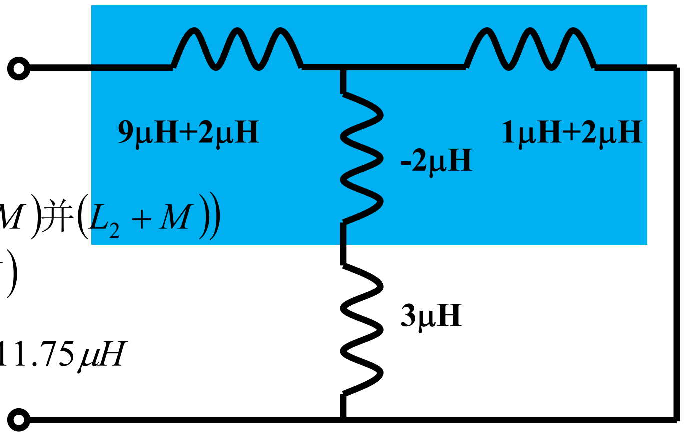
加流求压法见讲义，这里给出T型等效方法





虽然多个电感，但并非独立电感，
它们等效为一个电感：和独立电
容共同形成一个二阶动态系统





$$L=(L_1+M)\text{串}\big((L_3-M)\text{并}(L_2+M)\big)$$
$$=11\mu H\text{串}(1\mu H\text{并}3\mu H)$$
$$=11\mu H+\frac{3\cdot 1}{3+1}\mu H=11.75\mu H$$

电容与电感 大纲

- 电容与电感
- 二端口电感和电容
- 电容串并联
- 动态电路状态方程数值解方法
  - 前向欧拉法
  - 后向欧拉法

动态系统的数值解

- 如果动态系统含有n个独立动态元件，列写的电路方程微分阶数为n阶
  - 也可用n个独立的一阶微分方程联立表述，一般称之为状态方程
    - 状态方程往往以n个独立电容的电容电压和独立电感的电感电流为状态变量
      - 电路中任意变量均可用n个独立的状态变量表述，包括非独立的电容电压和电感电流
      - n个状态变量已经把该动态系统的所有特征全面表述清楚：替代定理
- 线性时不变动态系统是本课程重点，原则上可以给出解析解
  - 非线性则通过分段线性化、局部线性化、准线性化方法线性化处理
  - 开关引入的时变性则通过分时时不变处理
- 在进行理论分析之前，先考察数值解，从而对动态系统的行为有一个直观了解
  - 犹如非线性先考察牛顿拉夫逊迭代法给出线性化处理思想一样，动态系统先考察欧拉法则给出状态转移概念，系统从一个状态转移到另外一个状态需要时间，这是动态的要义：非即时，有记忆
    - 前向欧拉法、后向欧拉法
      - 把连续时间的状态转移离散化为离散时间的转移

状态方程的一般形式

- 为了数值法的简单处理，电路方程一般采用状态方程形式表述

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t),t\right)$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ \cdot \\ v_{Cn}(t) \end{bmatrix}$$

n个联立代数方程：全线性则线性动态系统，有一个非线性则非线性动态系统

时变性，可以是外加激励源导致的时变性

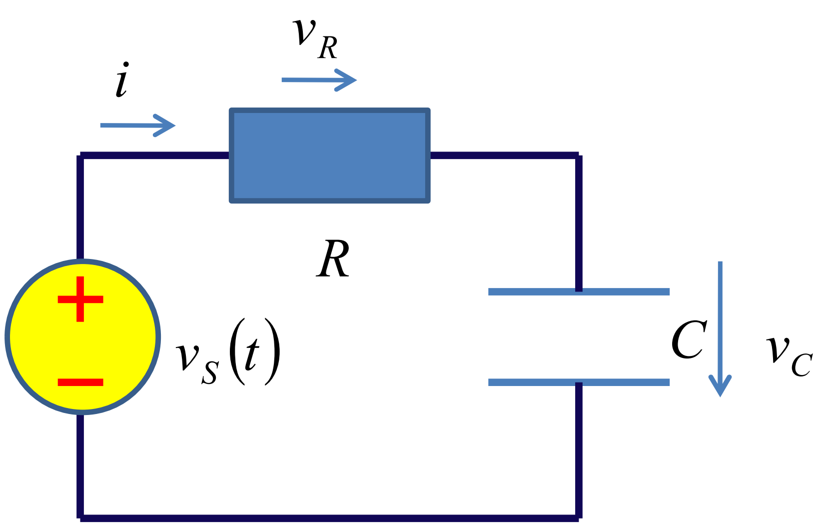
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{s}(t)$$

线性时不变系统的状态方程：A为常量矩阵

状态变量：独立的电容电压、电感电流

所谓独立：就是不可能用其他状态变量的线性叠加来表述

一阶例



$$v_S = v_R + v_C$$

$$v_S = iR + v_C$$

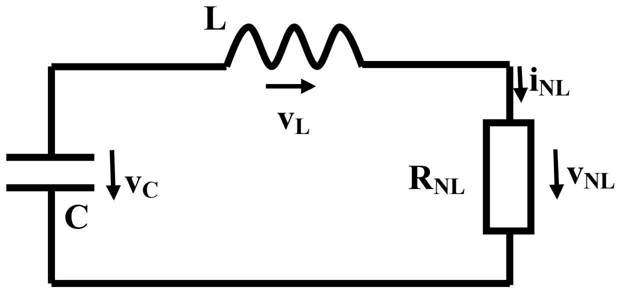
$$v_S = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

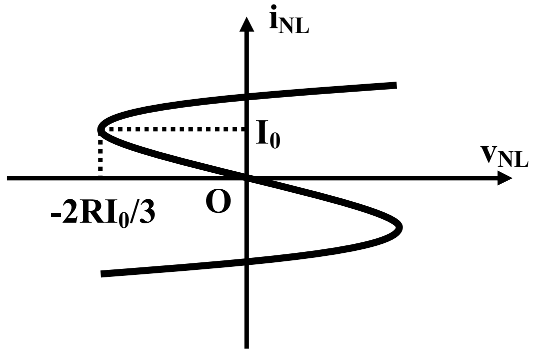
$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{RC}v_S$$

$x(t) = v_C(t)$ 状态变量

$a = -\frac{1}{RC}$ 常数：线性时不变系统 $\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t) + s(t) = f(x(t), t)$

$s(t) = \frac{1}{RC}v_S(t)$ 外加激励的体现
如果是系统内部部件，则为时变系统





S型负阻元件约束条件

$$v_{NL}=-Ri_{NL}+\frac{R}{3I_0^2}i_{NL}^3$$

$$\frac{dv_{NL}}{di_{NL}}=-R\left(1-\frac{i_{NL}^2}{I_0^2}\right)$$

$$v_C=v_L+v_R=L\frac{di_L}{dt}+v_{NL}=L\frac{di_L}{dt}-Ri_L+\frac{R}{3I_0^2}i_L^3$$

二阶例

$$i_L=-i_C=-C\frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C}i_L(t)\\ \frac{1}{L}v_C(t)+\frac{R}{L}i_L(t)-\frac{R}{3I_0^2L}i_L^3(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\frac{R}{3I_0^2L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C^3(t)\\ i_L^3(t)\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

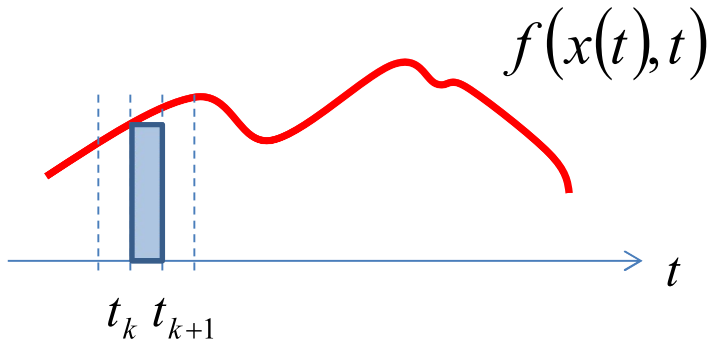
$\mathbf{f}_1$是线性的

$\mathbf{f}_2$是非线性的

非线性时不变动态系统

无外加激励源

数值解：欧拉法



$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t)$$

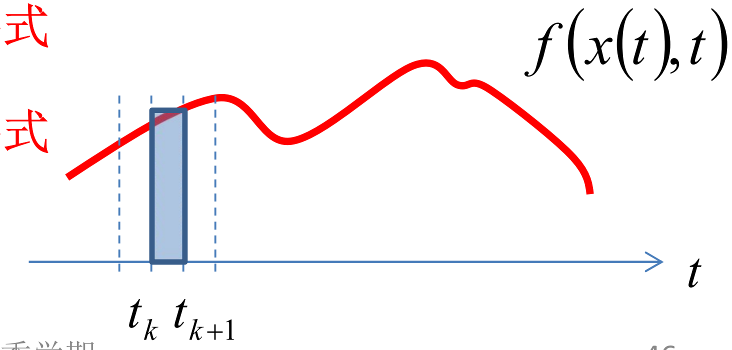
数值解：时间离散化 $\qquad t_k=t_{k-1}+\Delta t=t_0+k\Delta t$

$$\mathbf{x}(t_{k+1})-\mathbf{x}(t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t)\cdot dt\approx\begin{cases}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k),t_k)\cdot\Delta t\\ \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}),t_{k+1})\cdot\Delta t\end{cases}$$

前向欧拉法：取**k**时刻函数值为**k**段积分离散矩形高度

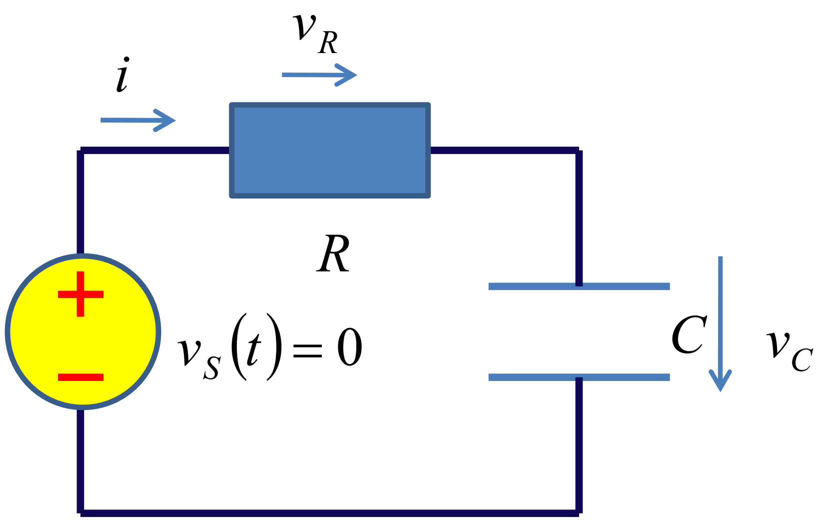
后向欧拉法：取**k+1**时刻函数值为**k**段积分离散矩形高度

$$\mathbf{x}(t_{k+1})=\begin{cases}\mathbf{x}(t_k)+\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k),t_k)\cdot\Delta t & \text{显式步进格式}\\ \mathbf{x}(t_k)+\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}),t_{k+1})\cdot\Delta t & \text{隐式步进格式}\end{cases}$$



后一时刻状态是从前一时刻状态转移而来

零输入分析



$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}v_C(t)+\frac{1}{RC}v_S(t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=f(v_C(t))=-\frac{1}{\tau}v_C(t)$$

$\tau=RC$

时间常数

理论解： $v_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad t\ge 0$

$$V_0=v_C(0)$$

前向欧拉数值解：

$$v_C(t_{k+1})=v_C(t_k)+\Delta t\cdot f(v_C(t_k))=v_C(t_k)-\frac{\Delta t}{\tau}v_C(t_k)=v_C(t_k)\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)=\ldots=V_0\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{k+1}$$

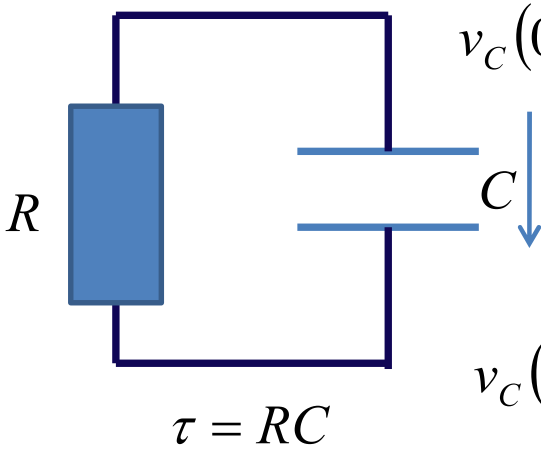
后向欧拉数值解：

$$v_C(t_{k+1})=v_C(t_k)+\Delta t\cdot f(v_C(t_{k+1}))$$

$$=v_C(t_k)-\frac{\Delta t}{\tau}v_C(t_{k+1})$$

$$v_C(t_{k+1})=\frac{v_C(t_k)}{1+\frac{\Delta t}{\tau}}=\ldots=\frac{V_0}{\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{k+1}}$$

零输入响应



$$v_C(0) = V_0$$

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C(t_k) = V_0\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^k$$

前向欧拉法

$$v_C(t_k) = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right)^k}$$

后向欧拉法

$$v_C(t_k) = V_0 e^{-\frac{t_k}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{k\Delta t}{\tau}} = V_0\left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)^k = \frac{V_0}{\left(e^{\frac{\Delta t}{\tau}}\right)^k}$$

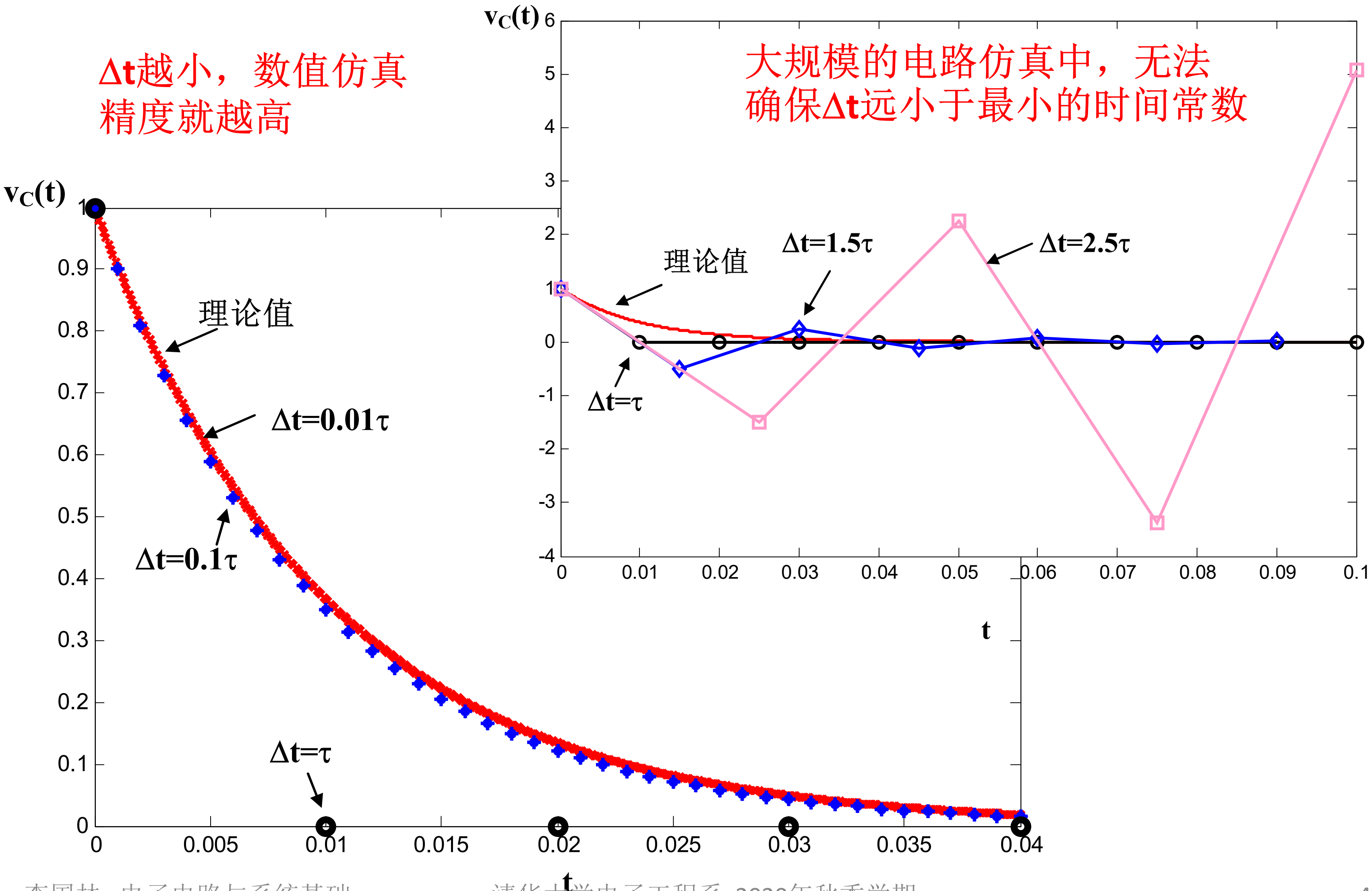
$$\approx \begin{cases} V_0\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^k \\ \dfrac{V_0}{\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right)^k} \end{cases}$$

前向欧拉法近似：存在不收敛的可能性

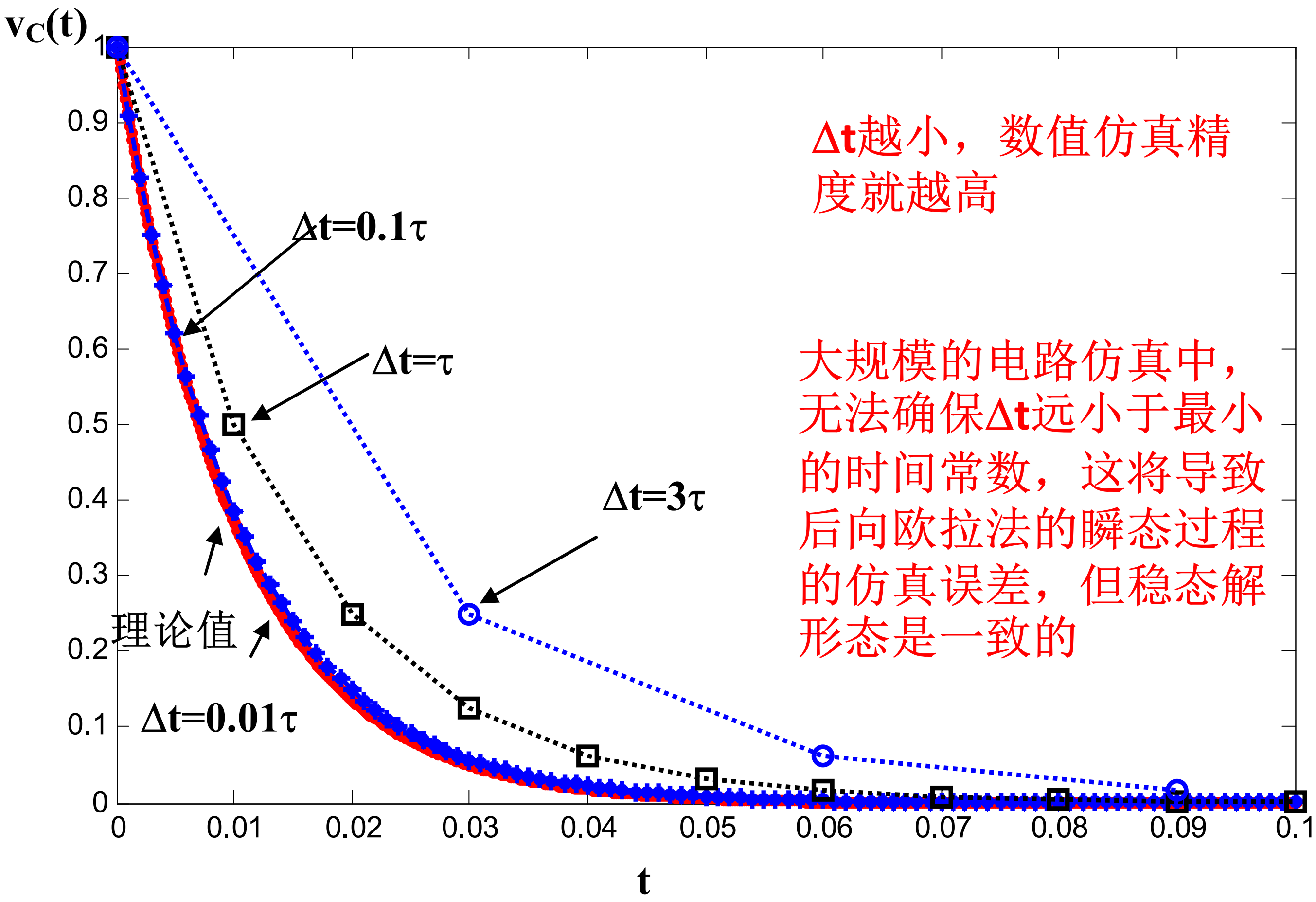
$(\Delta t << \tau)$ 足够高的精度

后向欧拉法近似：具有内在收敛性

前向欧拉法：存在不收敛的可能性



后向欧拉法：内在收敛

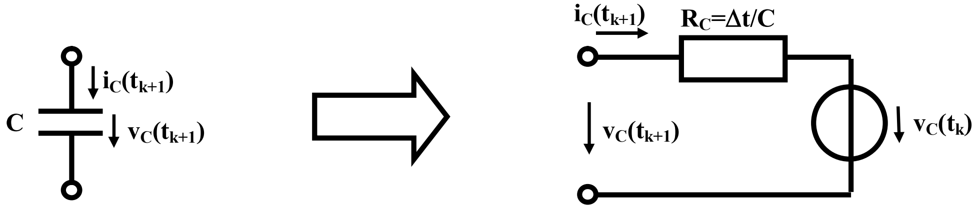


$v_C(t)$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
t
Δt=0.1τ
Δt=τ
Δt=3τ
理论值
Δt=0.01τ
Δt越小，数值仿真精度就越高
大规模的电路仿真中，无法确保Δt远小于最小的时间常数，这将导致后向欧拉法的瞬态过程的仿真误差，但稳态解形态是一致的

后向欧拉法的电路理解

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=\frac{1}{C}i_C(t)=f\left(v_C(t),t\right)=f(t)$$

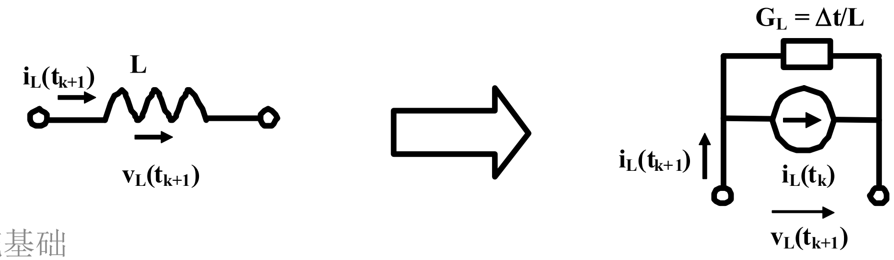
$$v_C(t_{k+1})=v_C(t_k)+\Delta t\cdot f(t_{k+1})=v_C(t_k)+\frac{\Delta t\cdot i_C(t_{k+1})}{C}=v_C(t_k)+R_C\cdot i_C(t_{k+1})$$



时间间隔Δt足够小时，电容犹如恒压源：电容电压连续变化

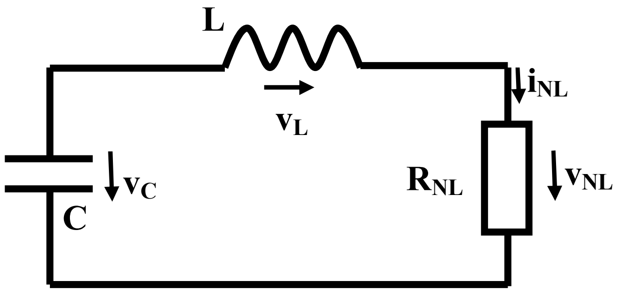
$$\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{L}v_L(t)=f\left(i_L(t),t\right)=f(t)$$

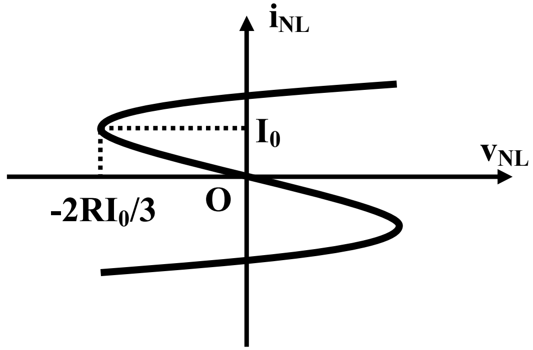
$$i_L(t_{k+1})=i_L(t_k)+\Delta t\cdot f(t_{k+1})=i_L(t_k)+\frac{\Delta t\cdot v_L(t_{k+1})}{L}=i_L(t_k)+G_L\cdot v_L(t_{k+1})$$



时间间隔Δt足够小时，电感犹如恒流源：电感电流连续变化

二阶非线性动态仿真例：后向欧拉法

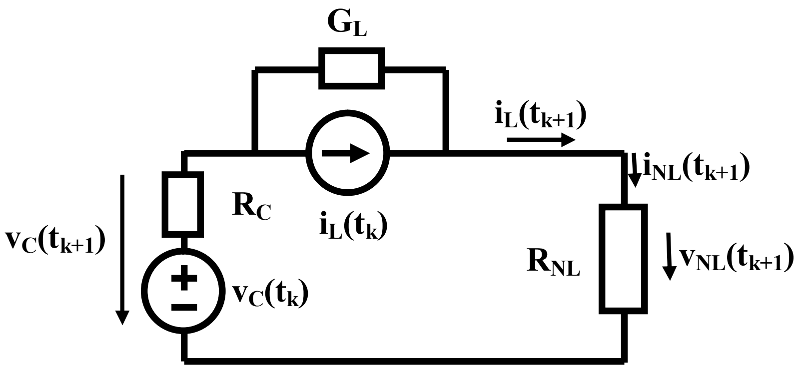




$$v_{NL} = -Ri_{NL} + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3$$

L=100μH， C=20pF， R=100Ω， I_0=1mA， $v_C(0)$=10mV， $i_L(0)$=0

$$t_k = k \cdot \Delta t \Rightarrow t_{k+1} = (k+1) \cdot \Delta t$$



$$-Ri_{NL}(t_{k+1}) + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3(t_{k+1})$$

$$= v_{NL}(t_{k+1})$$

$$= \left(v_C(t_k) - R_C i_{NL}(t_{k+1})\right) - \left(\frac{i_{NL}(t_{k+1}) - i_L(t_k)}{G_L}\right)$$

$$i_L(t_{k+1}) = i_{NL}(t_{k+1})$$

$$v_C(t_{k+1}) = v_C(t_k) - R_C i_{NL}(t_{k+1})$$

牛顿拉夫逊迭代法求解非线性

$$-Ri_{NL}(t_{k+1})+\frac{R}{3I_0^2}i_{NL}^3(t_{k+1})=\left(v_C(t_k)-R_Ci_{NL}(t_{k+1})\right)-\left(\frac{i_{NL}(t_{k+1})-i_L(t_k)}{G_L}\right)$$

$$f\left(i_{NL}(t_{k+1})\right)=(R-R_C-R_L)i_{NL}(t_{k+1})-\frac{R}{3I_0^2}i_{NL}^3(t_{k+1})+v_C(t_k)+R_Li_L(t_k)=0$$

通过后向欧拉法的时间离散化，非线性动态电路分析转换为非线性电阻电路分析

$$i_{NL}^{(0)}(t_{k+1})=i_{NL}(t_k)=i_L(t_k)$$

以前一个时间点的电流为初始值

$$i_{NL}^{(j+1)}(t_{k+1})=i_{NL}^{(j)}(t_{k+1})-\frac{f\left(i_{NL}^{(j)}(t_{k+1})\right)}{f'\left(i_{NL}^{(j)}(t_{k+1})\right)}$$

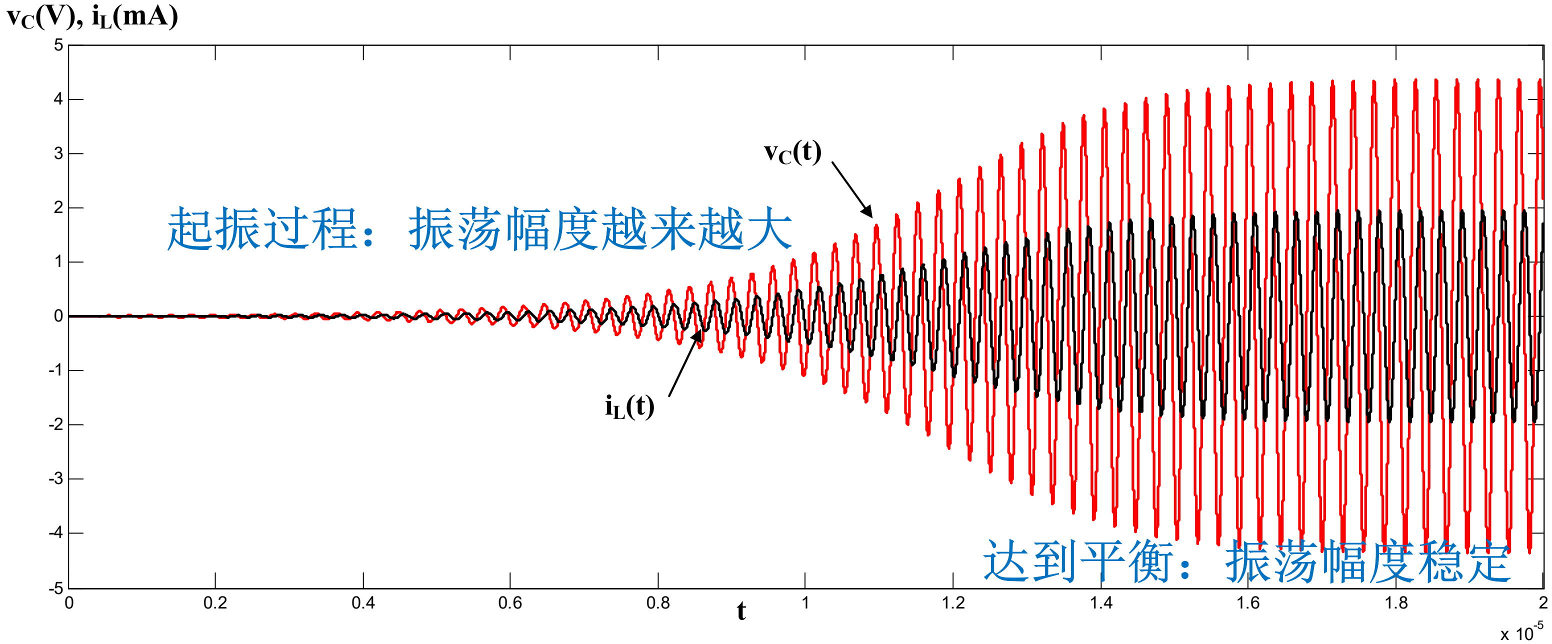
牛顿拉夫逊迭代

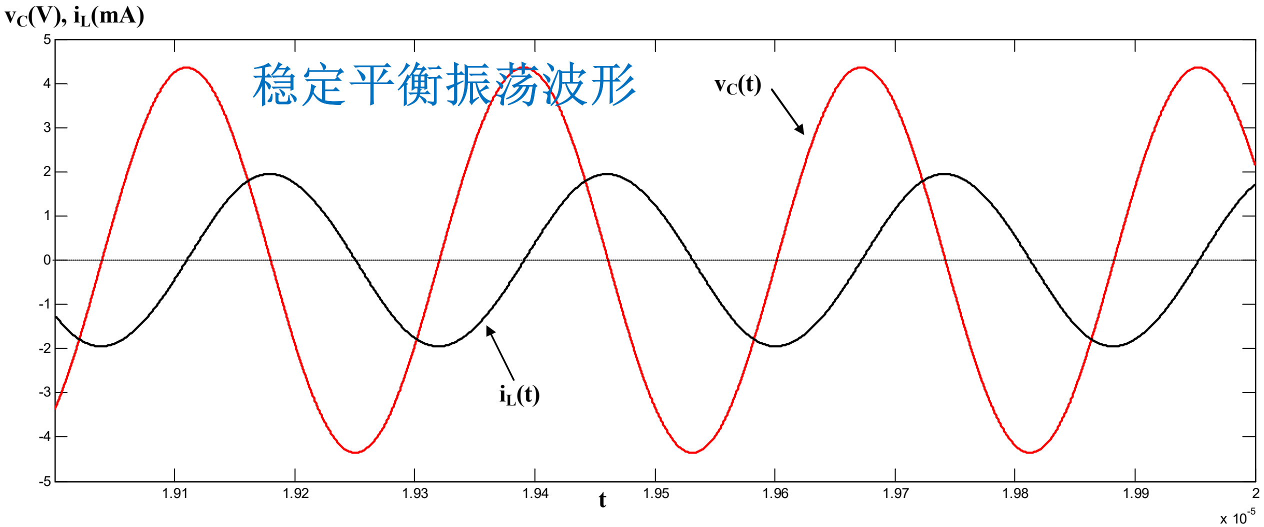
$$f'\left(i_{NL}^{(j)}(t_{k+1})\right)=R-R_C-R_L-R\cdot\left(\frac{i_{NL}^{(j)}(t_{k+1})}{I_0}\right)^2$$

牛顿拉夫逊迭代实质是非线性的线性化

数值分析：正弦振荡的起振过程

$\Delta t = 0.1ns$





$$f_0 = \frac{1}{281ns} = 3.56MHz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\times3.14\times\sqrt{100\mu H\times20pF}}$$

$$I_{Lm} = 2mA = 2I_0$$

$$V_{Cm} = 4.47V = \frac{2I_0}{2\pi f_0 C}$$

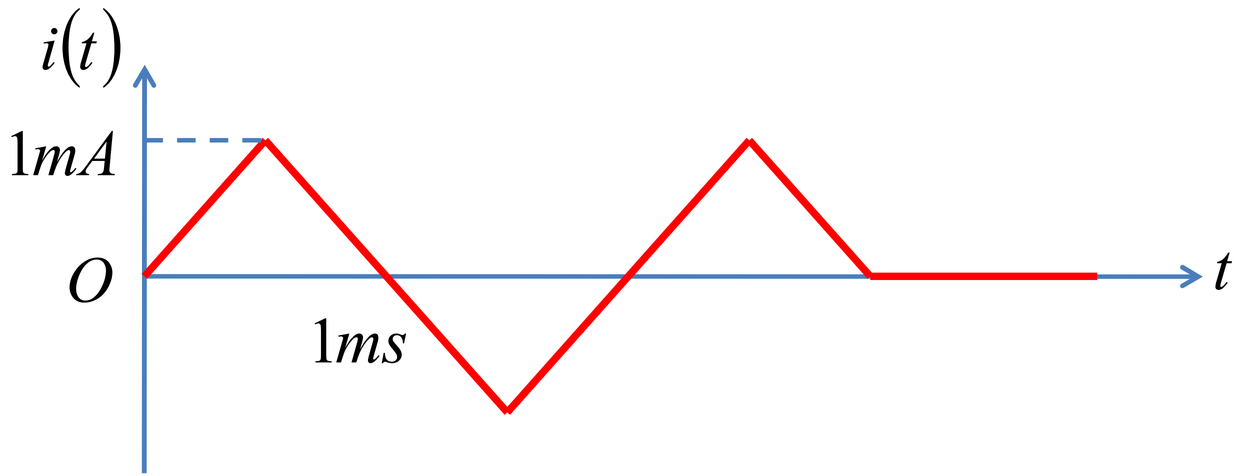
仿真结果和理论分析相符

电容和电感小结

- 电容和电感具有三个基本特性---记忆性、连续性和无损性
- 互感变压器（二阶元件）在全耦合(k=1)情况下退化为一阶元件，在电感量趋于无穷大时，可进一步抽象为零阶元件---理想变压器
  - T型网络是互感变压器的基本等效电路，可用于电路化简
  - 互感变压器电路模型可用理想变压器附加励磁/漏磁电感的形式，全耦合变压器可用理想变压器附加励磁电感的形式
- 电容电压和电感电流是状态变量，动态系统中的独立状态变量可以描述该系统的动态行为
  - 电路中所有变量均可用状态变量和外部激励源的某种代数组合来表述：替代后处理为电阻电路
- 线性时不变动态系统原则上具有解析解，其他类型动态系统的解析求解可能有困难，可以利用状态方程进行数值求解获得动态系统的行为
  - 前向欧拉法在时间步长较大时存在不收敛的可能性
  - 后向欧拉法具有内在的收敛性
    - 后向欧拉法转换后，动态电路可以用电阻电路分析，电阻电路分析是动态电路分析的基础

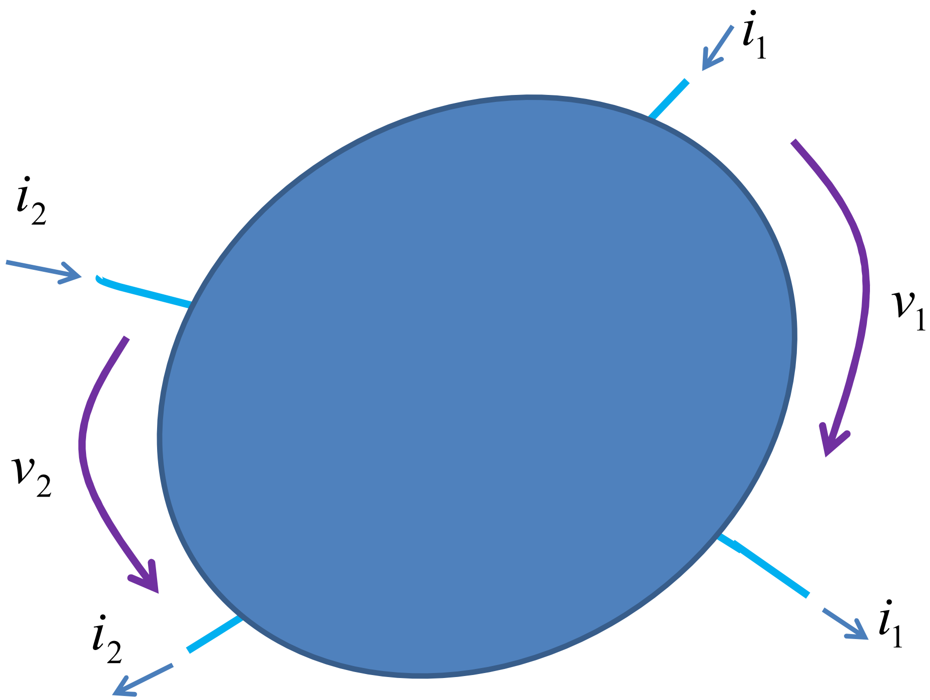
作业1　电容电压、电荷与电能存储

- 某电容器电容容值为**1μF**，电容初始电压为**5V**，加在电容两端电流源的电流变化规律如图所示
  - （**1**）求电容上最终存储的电荷量为多大
  - （**2**）列写电流、电容电压、电荷量、电容存储电能随时间变化的表达式（教材例题缺）
  - （**3**）画出电流、电压、电荷、电能时域波形

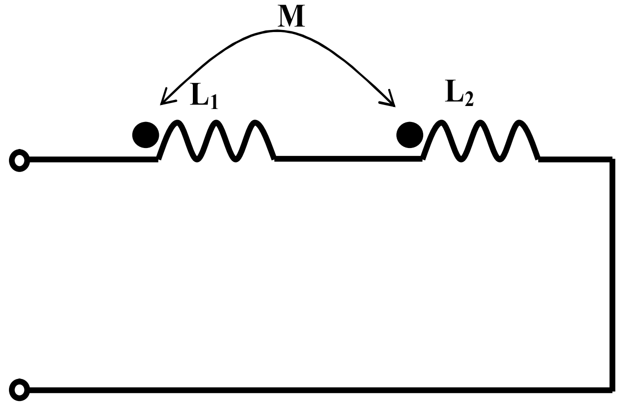


作业2：同名端判定

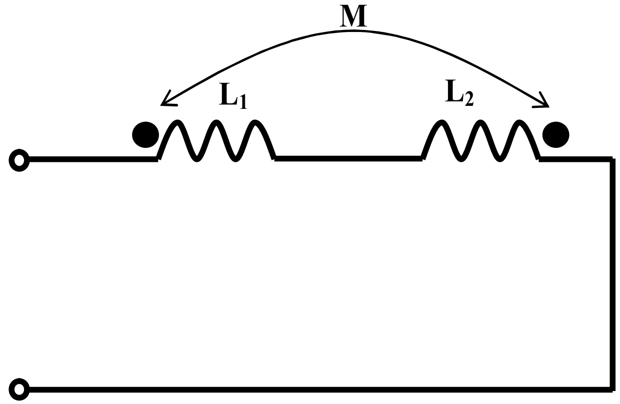
- 如果知道线圈绕向，可以判定同名端
- 如果被封装为黑匣子，内部绕向未知，请设计一个测试方案，判定同名端



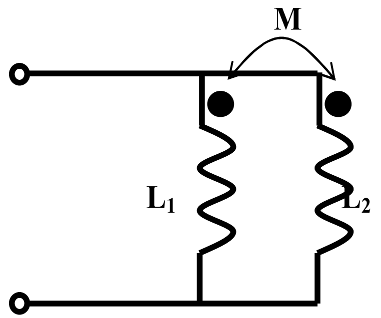
作业3：等效电感计算



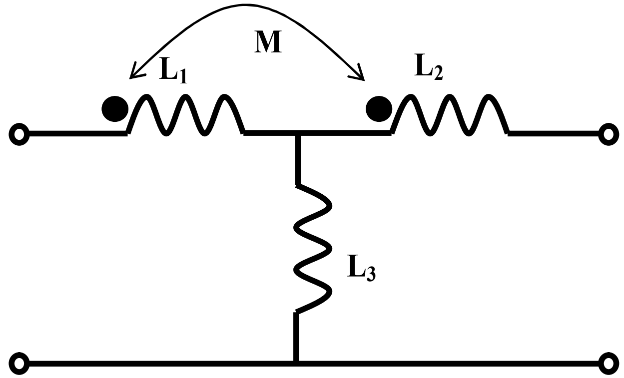
（a）电感串联：带互感



（b）电感串联：带互感，绕线反向



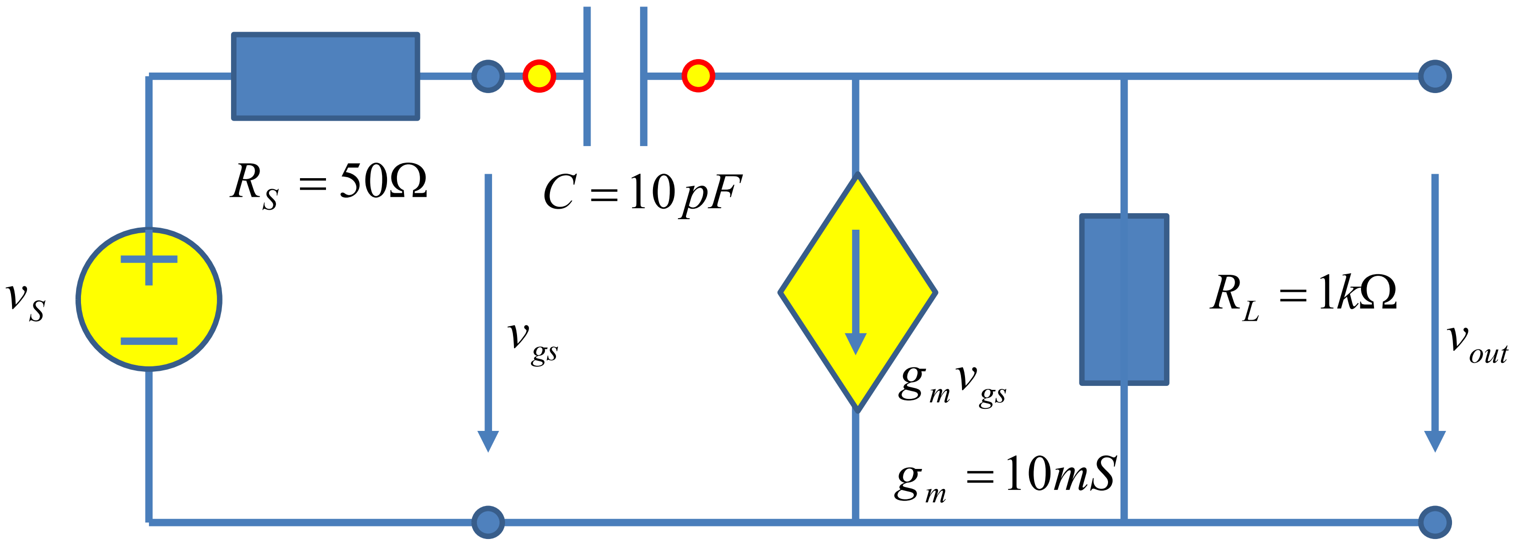
（c）电感并联：带互感



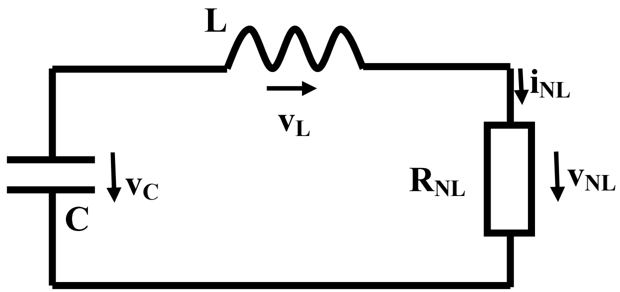
（d）二端口电感等效

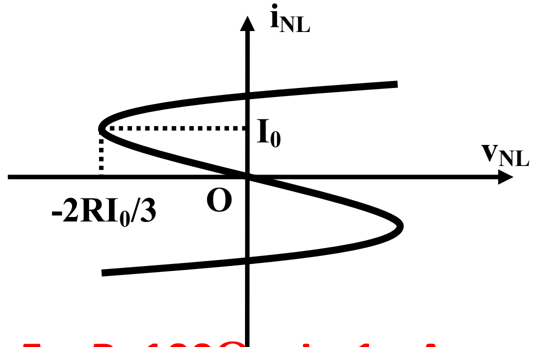
作业4 列写电路方程

- 带跨接电容的跨导放大器
  - 将电容之外的电阻电路等效为戴维南源，列写关于电容电压v_c的电路方程（v_c为未知量x）
  - 列写关于v_{out}的电路方程（v_{out}为未知量x）



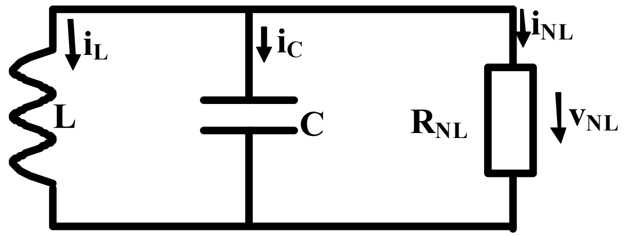
作业5（选作）：后向欧拉法仿真

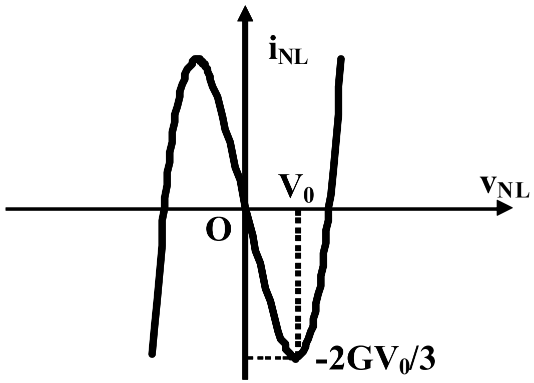




$$v_{NL} = -Ri_{NL} + \frac{R}{3I_0^2} i_{NL}^3$$

课堂仿真例：**L=100μH， C=20pF， R=100Ω， I_0=1mA， $v_C(0)$=10mV， $i_L(0)$=0**





$$i_{NL} = -Gv_{NL} + \frac{G}{3V_0^2} v_{NL}^3$$

作业仿真例：**C=100pF， L=20μH， G=100μS， V_0=1V， $v_C(0)$=0， $i_L(0)$=10mA**

无计算机，则给出数值法推导过程，到牛顿拉夫逊迭代方程为止

有计算机，（**1**）编写**matlab**程序，给出仿真结果，确认是否为正弦振荡波形？

或（**2**）直接用**SPICE**进行仿真，给出仿真结果，确认振荡波形形态。

CAD作业

- 仿真获得**S**型负阻正弦波振荡器振荡波形
  - **S**型负阻如何描述？
    - 如果无法描述，是否可以构造？
      - 如果用理想运放构造，则无频率限制，如果是真实运放，工作频率将受限
        - » **L**、**C**的选择受到限制

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

        - » 某个**L**、**C**取值下已获得正弦波形
          - 改变时间步长，观察振荡波形是否发生变化
          - 保持**LC**不变，改变**L/C**，通过仿真观察振荡波形是否发生变化