第11讲：受控源

李国林

清华大学电子工程系

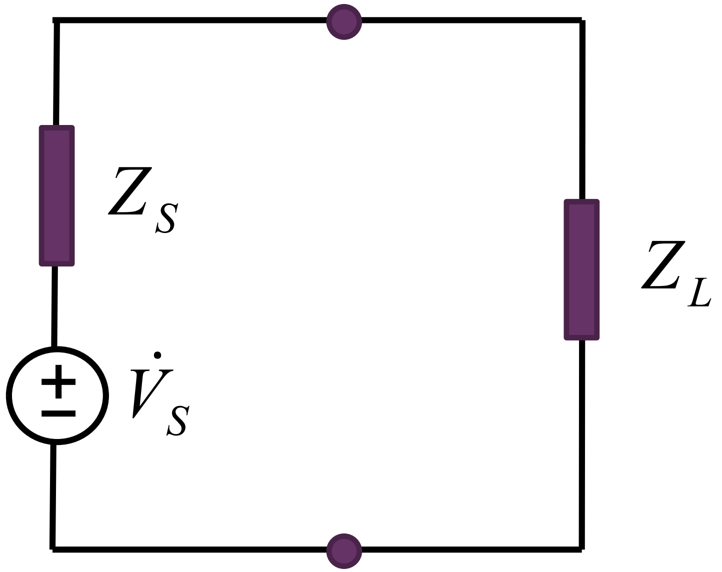
B班课程内容安排

第一学期：线性	序号	第二学期：非线性
电路定律	1	器件基础
电阻电源	2	二极管
电容电感	3	**MOSFET**
信号分析	4	**BJT**
分压分流	5	反相电路
正弦稳态	6	数字门
时频分析	7	放大器
期中复习	8	期中复习
RLC二阶	9	负反馈
二阶时频	10	差分放大
受控源	11	频率特性
网络参量	12	正反馈
典型网络	13	振荡器
作业选讲	14	作业选讲
期末复习	15	期末复习

受控源 内容

- 以激励电压为输入、以某元件的分压为输出，分压网络本身就可视为二端口网络
  - 除了分压网络，LC匹配网络也是二端口网络的典型案例
    - 最大功率传输匹配（相量域分析）：共轭匹配
    - LC匹配网络设计：阻抗变换网络
  - 受控源是描述二端口网络端口间作用关系的衍生元件
    - 受控源引入
    - 含受控源线性网络的戴维南定理
    - 复杂网络完备方程列写方法：结点电压法/回路电流法
  - 作业选讲
- 线性网络参量
- 典型线性网络
  - 变压器、回旋器、运放

最大功率传输匹配



$$R_L = R_S$$

电阻电路

$$P_L = P_{L,\max} = \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S} = P_{S,\max}$$

$$Z_S = R_S + jX_S \qquad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{Z_S + Z_L}$$

$$= \frac{\dot{V}_S}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)}$$

$$P_L = I_{rms}^2 R_L = \frac{V_{s,rms}^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} R_L$$

共轭匹配

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} V_{S,rms}^2$$

$$\boxed{X_L = -X_S}$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} V_{S,rms}^2$$

$$\boxed{R_L = R_S}$$

共轭匹配

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = Z_S^*}$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} V_{S,rms}^2 \le \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S} = P_{Smax}$$

共轭匹配内蕴谐振

- 电感的电抗是正的，电容的电抗是负的
  - 电感的电纳是负的，电容的电纳是正的
- 要想抵偿电感电抗，则需电容
- 要想抵偿电容电抗，则需电感

$$R_L = R_S$$ 相等：匹配

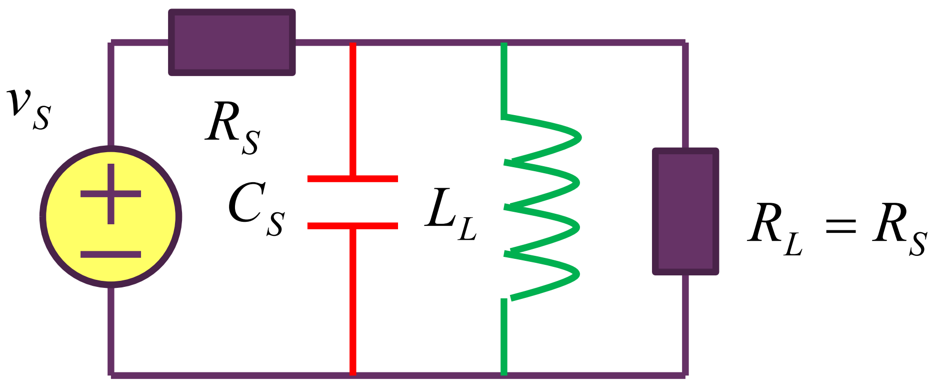
共轭匹配 $$Z_L = Z_S^*$$

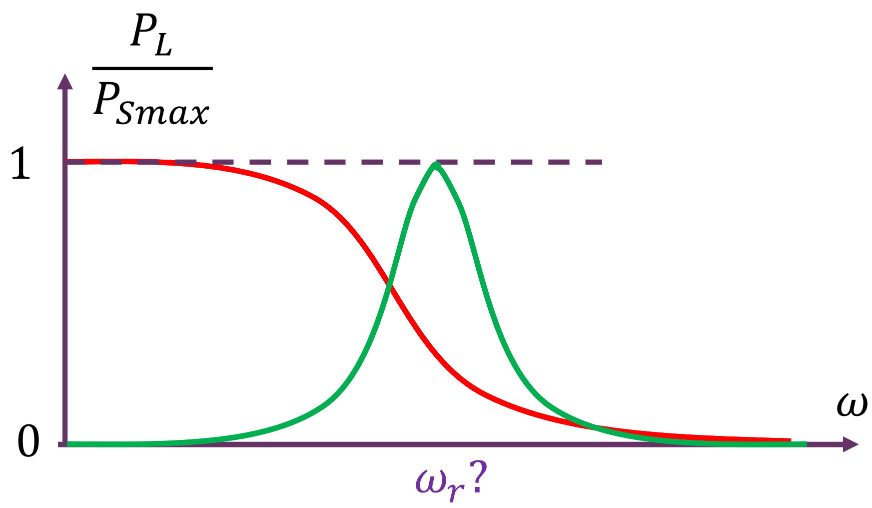
$$X_L + X_S = 0$$ 谐振：回路中的电抗正负抵消为**0**

$$P_L = P_{L,\max} = \frac{V_{S,rms}^2}{4R_S} = P_{S,\max}$$

例1 用谐振实现特定频点的匹配

- 已知某信源输出有寄生电容，如何使得负载获得最大功率传输匹配?





$Z_L = Z_S^*$　　$Y_L = Y_S^*$

共轭匹配

$G_L = G_S$　　$B_L + B_S = 0$

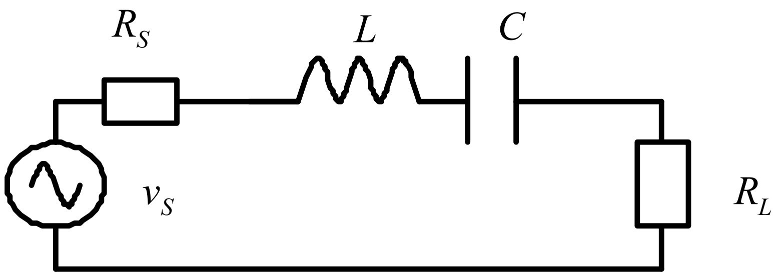
$$-\frac{1}{\omega_r L_L} + \omega_r C_S = 0$$

$$L_L = \frac{1}{\omega_r^2 C_S}$$

用感性负载抵偿容性负载，可在特定频点可实现共轭匹配：带通匹配特性

谐振匹配就存在匹配频点问题

LC带通传输网络不具阻抗匹配作用



$$|H|^2 = 4\frac{R_S}{R_L}\frac{V_{L,rms}^2}{V_{S,rms}^2} = \frac{\frac{V_{L,rms}^2}{R_L}}{\frac{V_{S,rms}^2}{4R_S}} = \frac{P_L}{P_{S,\max}}$$

定义：基于功率传输的电压传递函数

$$H(s) = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{V_L(s)}{V_S(s)} = 2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{R_L}{R_S + sL + \frac{1}{sC} + R_L} = H_0\frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$H_0 = \frac{2\sqrt{R_S R_L}}{R_S + R_L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \xi = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_S + R_L}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

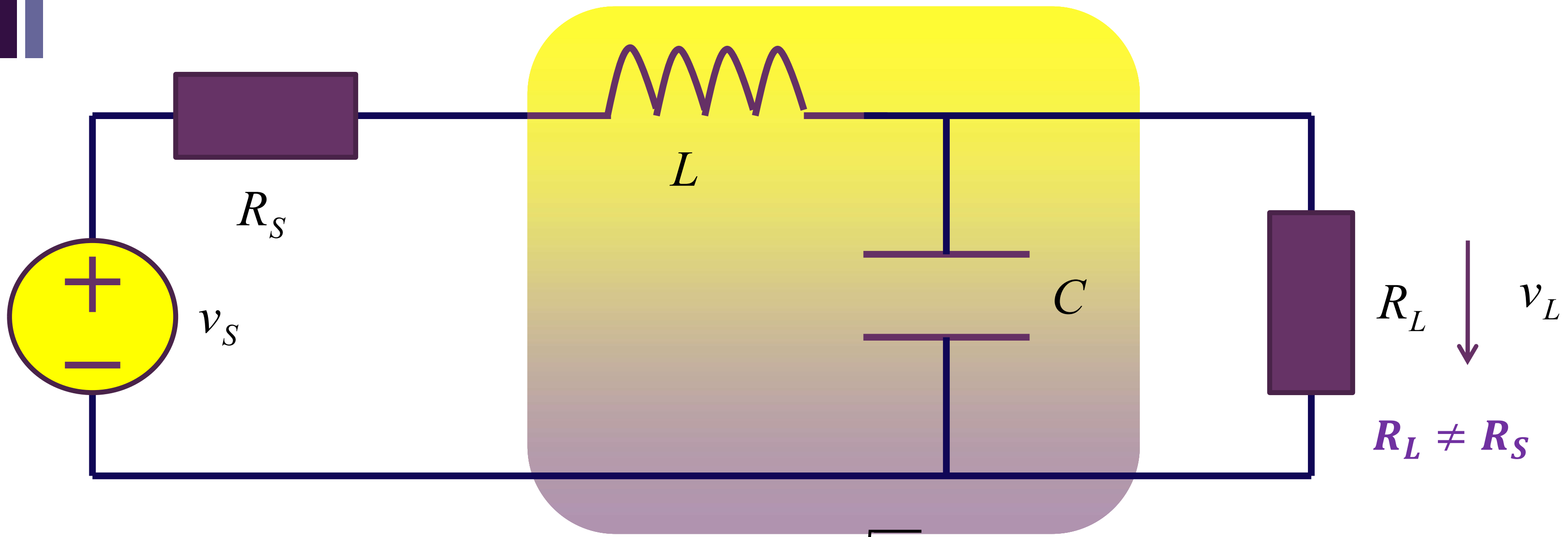
$$H_0 \le 1 \qquad H_0 = 1(R_L = R_S)$$

H_0^2谐振频点的功率增益

如果$R_L \neq R_S$，如何让负载获得最大功率?

- LC带通网络
  - 传递函数最大值位于谐振频点，该点功率传递系数$\frac{4R_LR_S}{(R_L+R_S)^2}$只有在$R_L=R_S$时获得最大值100%
    - 串联LC和并联LC谐振腔本身不具阻抗变换作用，仅提供带通选频特性
- LC低通网络
  - 中心频点0频点上串臂电感短路，并臂电容开路，源直连负载，功率传递系数$\frac{4R_LR_S}{(R_L+R_S)^2}$只有在$R_L=R_S$时获得最大值100%
  - 但是，如果系统阻尼系数$\xi<0.707$，传递函数存在谐振峰频点，是否存在在谐振峰频点上达到功率传输100%的可能性？即使$R_L \neq R_S$
- LC高通网络
  - 中心频点∞频点上串臂电容短路，并臂电感开路，源直连负载，功率传递系数$\frac{4R_LR_S}{(R_L+R_S)^2}$只有在$R_L=R_S$时获得最大值100%
  - 但是，如果系统阻尼系数$\xi<0.707$，传递函数存在谐振峰频点，是否存在在谐振峰频点上达到功率传输100%的可能性？即使$R_L \neq R_S$

直观思路：谐振峰频点上强制匹配



1、求基于功率的传递函数 $H(s)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{V_L(s)}{V_S(s)}=\cdots=H_0\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$

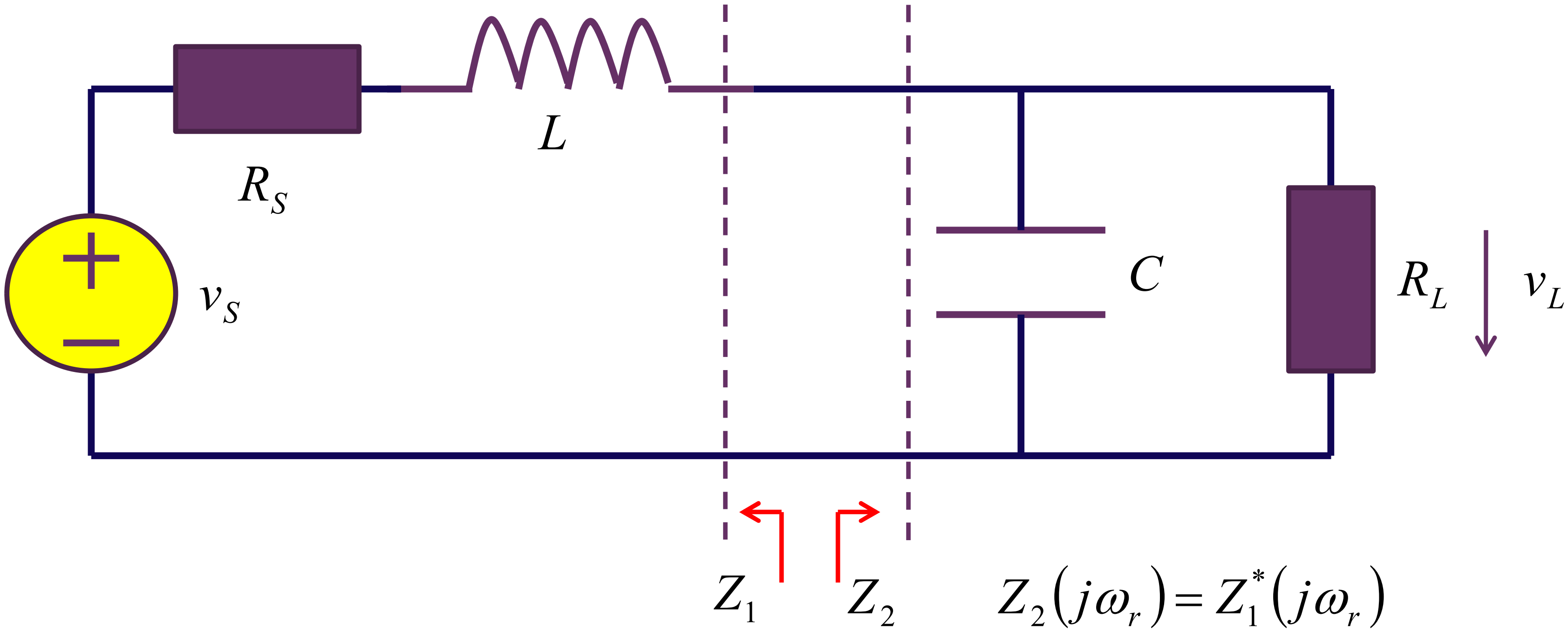
确定系统阻尼系数ξ、自由振荡频率ω_0、中心频点传递系数H_0和电路参量R_S、R_L(已知)、L、C(未知)之间的关系

2、令谐振峰频点 $\omega_e=\sqrt{1-2\xi^2}\omega_0$ 为匹配频点ω_r(已知)，令谐振峰值为1

$A(\omega_e)=H_0\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=1$ 由这两个方程求两个未知量 L、C ，

最终获得低通**LC**匹配网络，由于谐振峰频点上功率增益为1，故而在该频点上负载获得的是信源的额定功率：**LC**本身无损，结论无异议。

实现最大功率传输匹配的物理要求必须共轭匹配：基本思路



$$Z_2(j\omega_r)=Z_1^*(j\omega_r)$$

$$Z_1(j\omega_r)=R_S+j\omega_r L \qquad Z_2(j\omega_r)=\frac{R_L}{1+j\omega_r R_L C}=\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}$$

共轭匹配

$$Z_1(j\omega_r)=R_S+j\omega_r L \qquad Z_2(j\omega_r)=\frac{R_L}{1+j\omega_r R_L C}=\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}$$

$$Z_2(j\omega_r)=Z_1^*(j\omega_r) \qquad \frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}-\frac{j\omega_r R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}=R_S-j\omega_r L$$

$$\frac{R_L}{1+(\omega_r R_L C)^2}=R_S$$

$$\frac{R_L^2 C}{1+(\omega_r R_L C)^2}=L$$

$$\Rightarrow$$

$$C=\frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

$$L=\frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

只要**L**和**C**如是取值，即可在ω_r频点获得最大功率传输匹配

只解决了$\mathbf{R_L>R_S}$情况，如果$\mathbf{R_L<R_S}$呢？

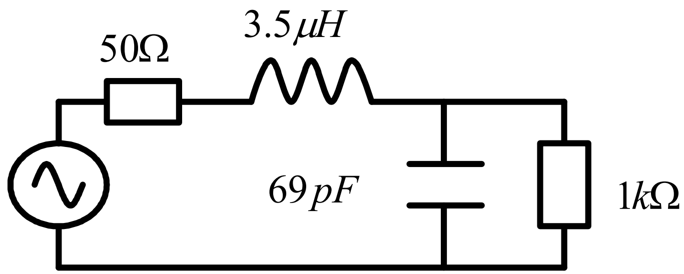
例2 用LC网络实现特定频点的匹配传输

- 已知R_S=50Ω,R_L=1kΩ,请设计一个LC低通匹配网络，在f_r=10MHz频点上实现最大功率传输匹配

L型低通网络

$$L_1=\frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{50}{2\pi\times10M}\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=3.469\mu H$$

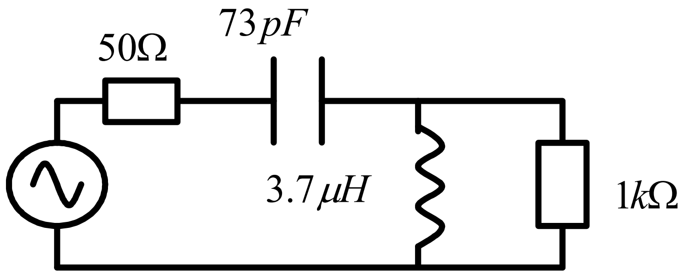
$$C_2=\frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1}{2\pi\times10M\times1k}\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=69.37pF$$



L型高通网络：用相同的思路，自行推导获得此公式

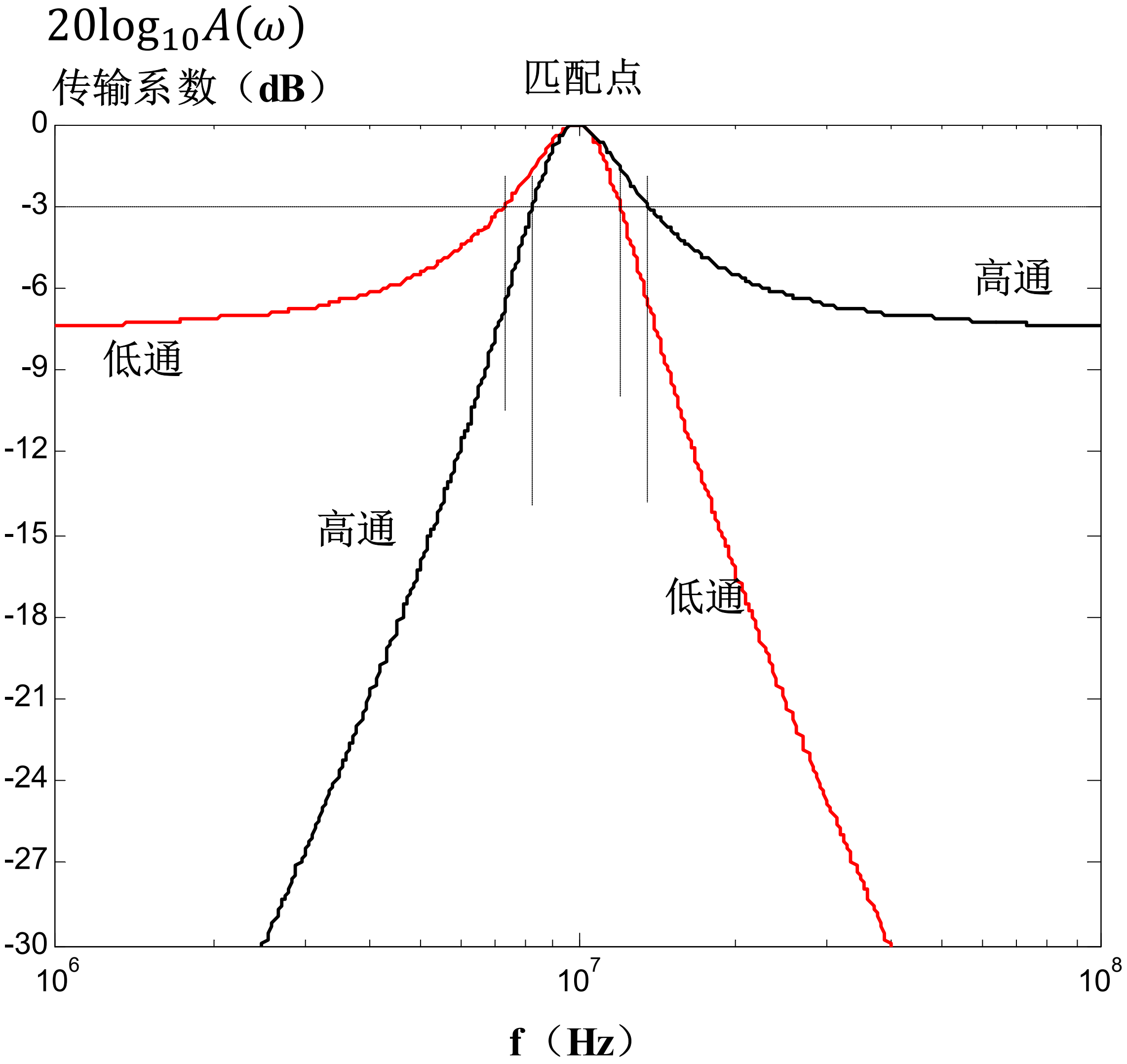
$$C_1=\frac{1}{\omega_r R_S}\Big/\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1}{2\pi\times10M\times50}\Big/\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=73.03pF$$

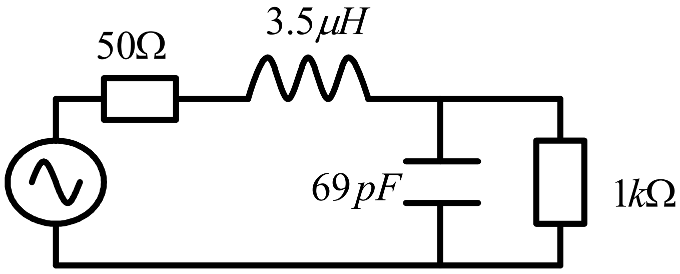
$$L_2=\frac{R_L}{\omega_r}\Big/\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}=\frac{1k}{2\pi\times10M}\Big/\sqrt{\frac{1k}{50}-1}=3.651\mu H$$

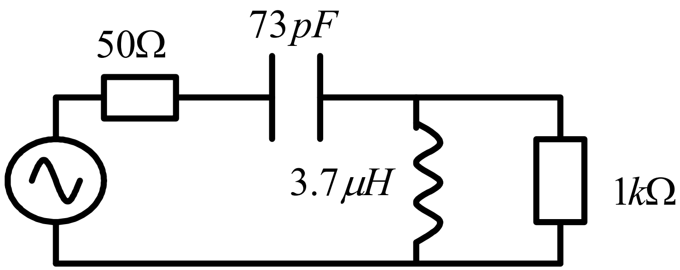


最大功率传输匹配

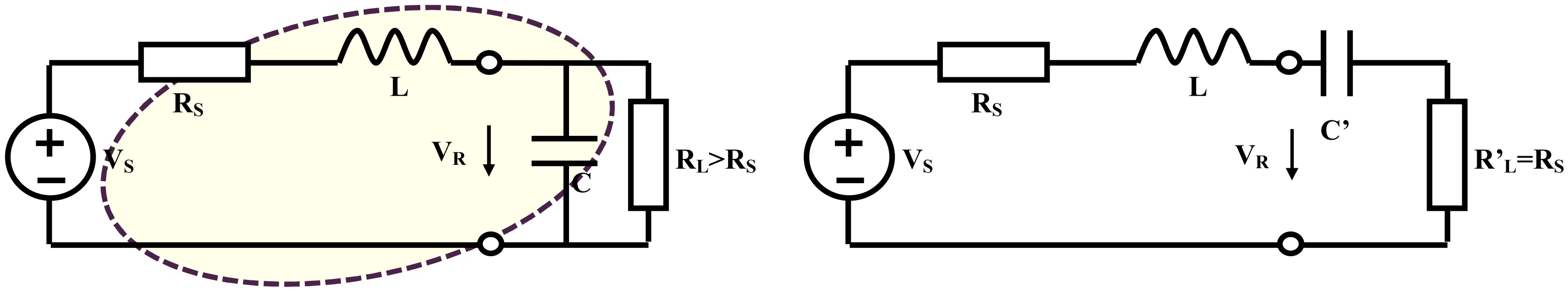
$$H(j\omega)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{V_L(j\omega)}{V_S(j\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



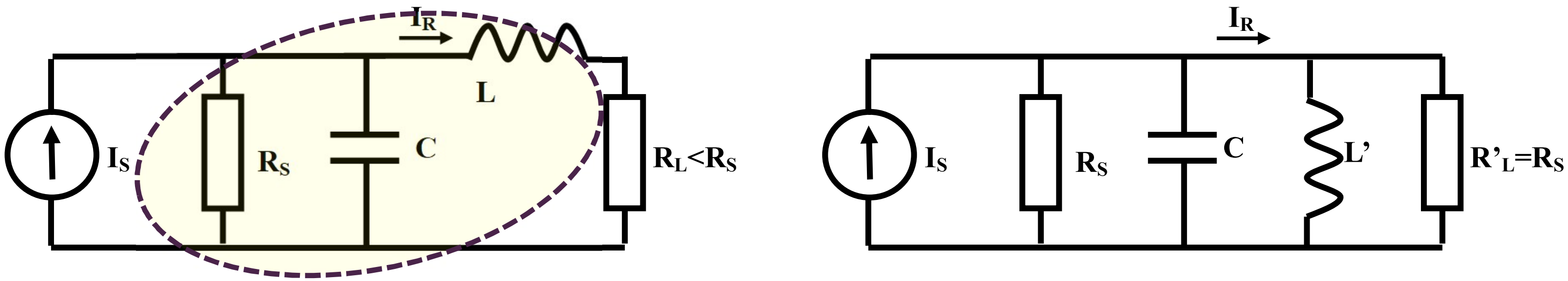




从谐振角度进行理解和设计

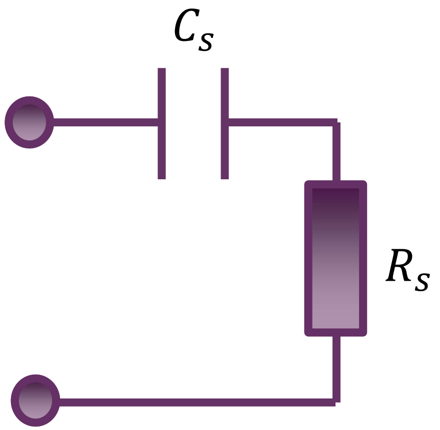


串联谐振是电压谐振



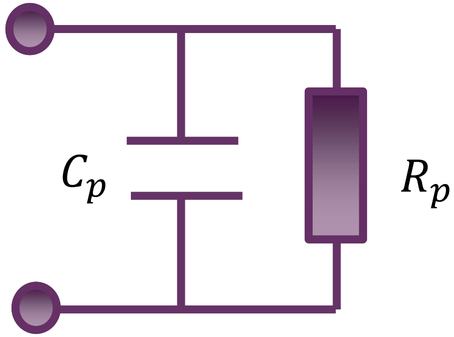
并联谐振是电流谐振

设计口诀：并大串小Q相等

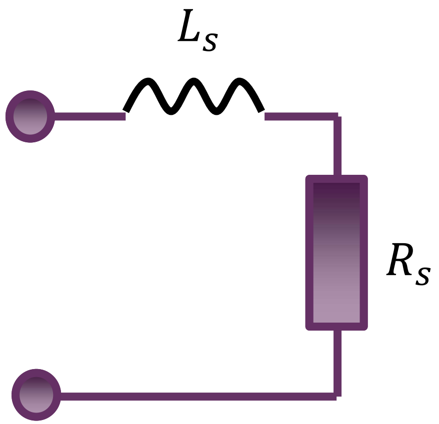


$$Q=\frac{\text{串联电抗}}{\text{串联电阻}}=\frac{\frac{1}{\omega C_s}}{R_s}=\frac{1}{\omega R_s C_s}$$

$$Q=\frac{\text{并联电纳}}{\text{并联电导}}=\frac{\omega C_p}{G_p}=\omega R_p C_p$$

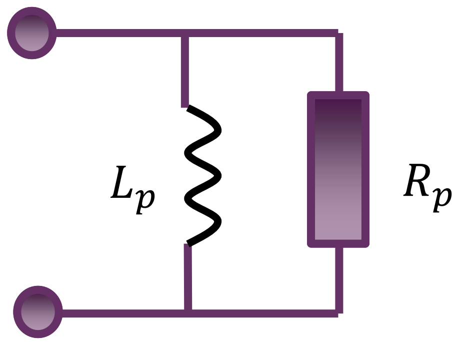


$$Q=\sqrt{\frac{R_p}{R_s}-1}$$

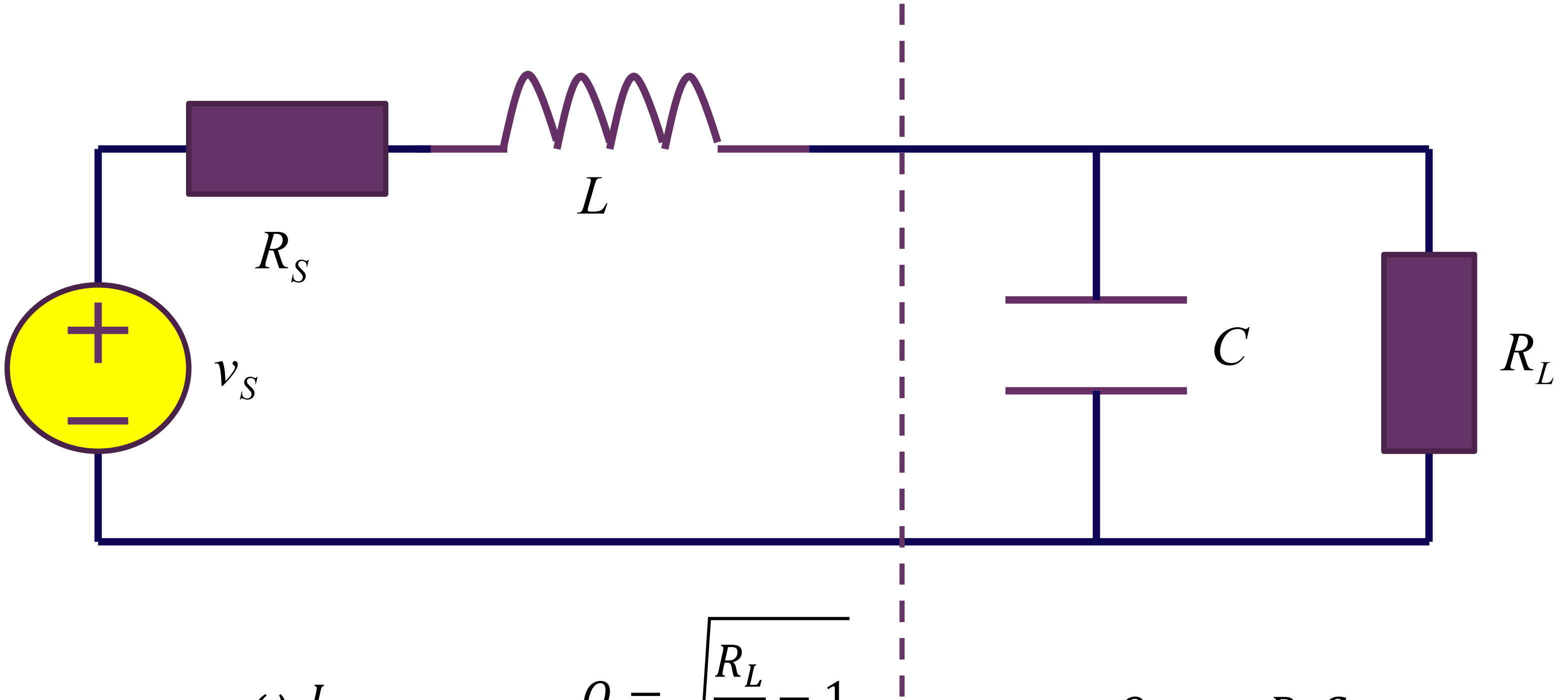


$$Q=\frac{\text{串联电抗}}{\text{串联电阻}}=\frac{\omega L_s}{R_s}$$

$$Q=\frac{\text{并联电纳}}{\text{并联电导}}=\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{G_p}=\frac{R_p}{\omega L_p}$$



用设计口诀进行匹配网络设计



$$Q=\frac{\omega_r L}{R_S}$$

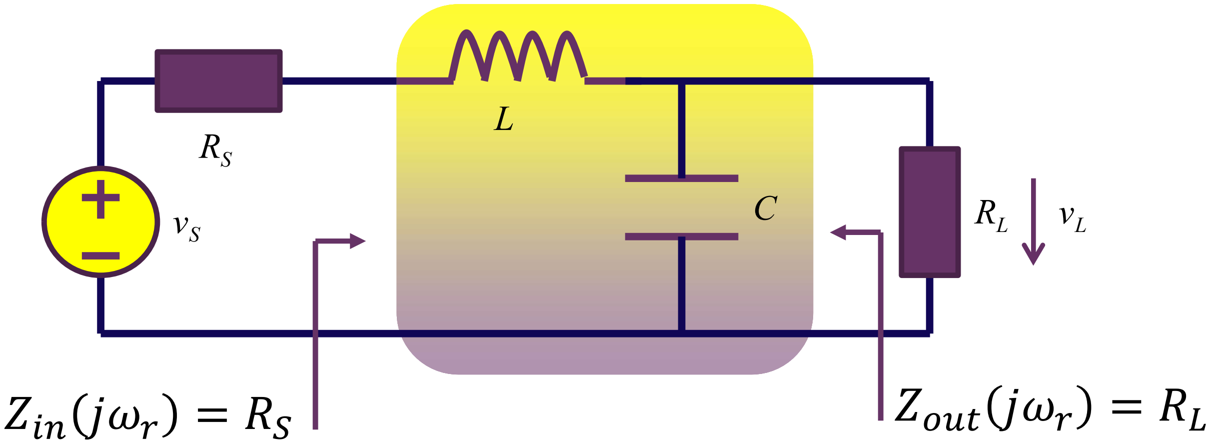
$$Q=\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

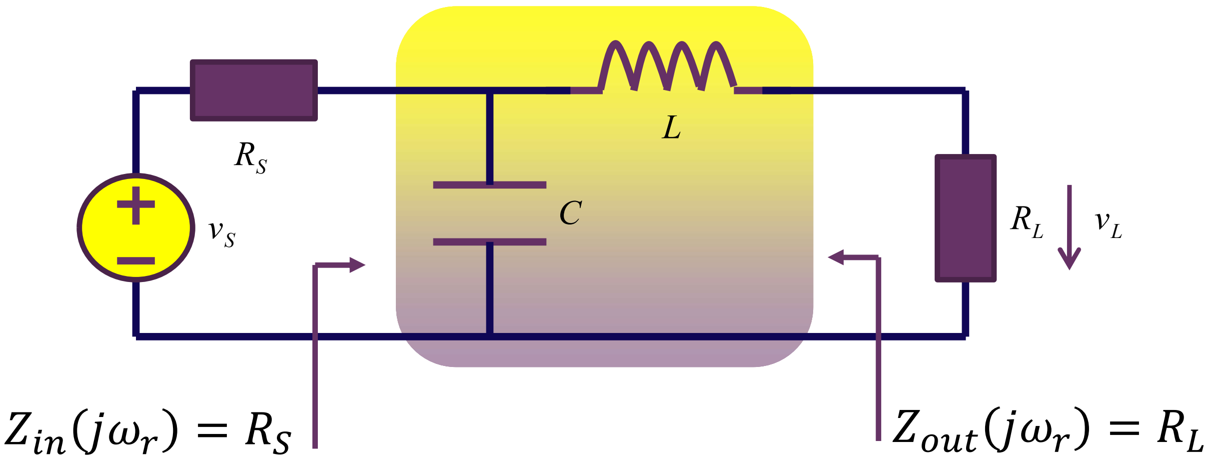
$$Q=\omega_r R_L C$$

$$L=\frac{R_S}{\omega_r}Q=\frac{R_S}{\omega_r}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

$$C=\frac{1}{\omega_r R_L}Q=\frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L}{R_S}-1}$$

阻抗匹配网络是一个阻抗变换网络





- LC阻抗匹配网络具有阻抗变换作用，为何这类的二端口网络具有阻抗变换能力能力，则需要对二端口网络做更深入的探讨
- 受控源：描述二端口网络端口间作用关系的衍生元件

受控源在哪里?

$$\sum_k i_k = 0$$

KCL

$$v = v_S$$
$$i = i_S$$

电源

欧姆定律

$$i = Gv$$

电阻

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$v_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$i = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$d_{AB} << \lambda$$

基尔霍夫定律

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_S$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_S + \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \varepsilon \vec{E}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

电容

麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\sum_k v_k = 0$$

KVL

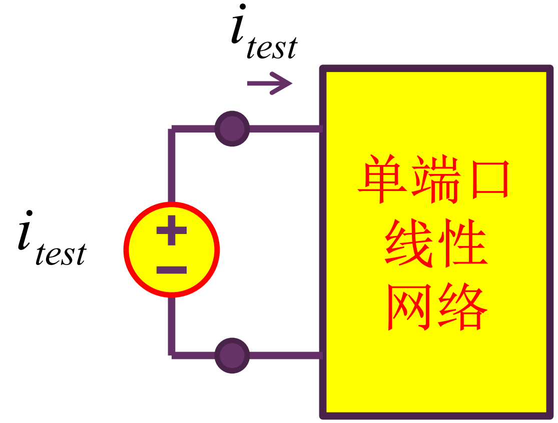
$$v = L \frac{d}{dt} i$$

电感

广义欧姆定律

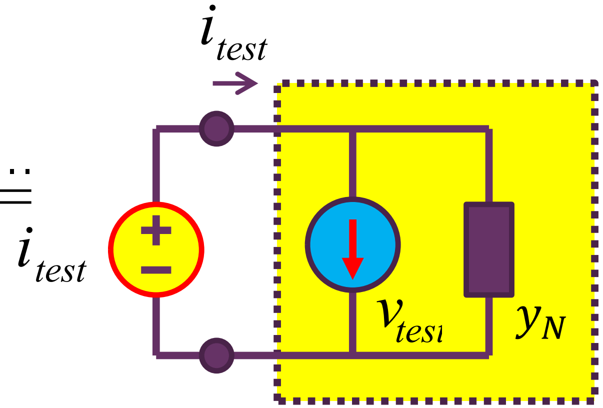
单端口网络的端口测量

可获得戴维南等效、诺顿等效



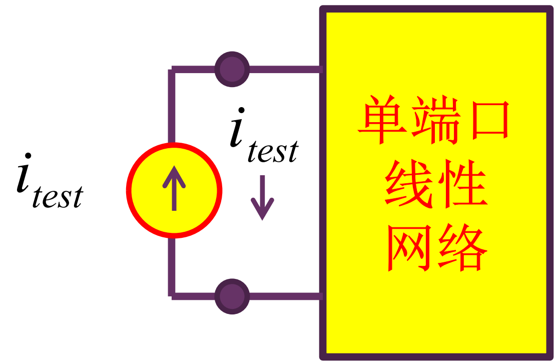
加压求流

$$\dot{I}_{test} = \underline{\alpha_v \cdot \dot{V}_{test}} + \underline{\underline{\beta_v \cdot \dot{V}_{s1} + \gamma_v \cdot \dot{I}_{s2} + \ldots}}$$
$$= \underline{Y_N \cdot v_{test}} + \underline{\underline{\dot{I}_N}}$$



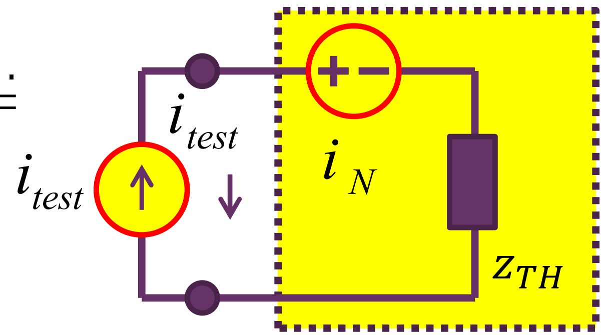
加压测试获得压控形式的等效电路

加流测试获得流控形式的等效电路



加流求压

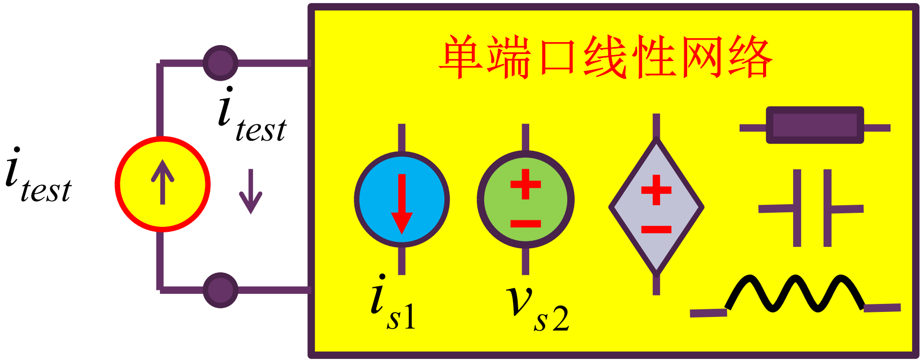
$$\dot{V}_{test} = \underline{\alpha_i \cdot \dot{I}_{test}} + \underline{\underline{\beta_i \cdot \dot{V}_{s1} + \gamma_i \cdot \dot{I}_{s2} + \ldots}}$$
$$= \underline{Z_{TH} \cdot \dot{I}_{test}} + \underline{\underline{\dot{V}_{TH}}}$$

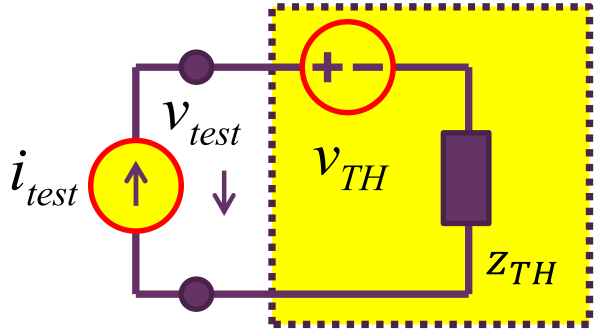


$$v_{test} = \frac{1}{C}\int_0^t i_{test}\,dt + V_0$$

对具有$\mathbf{V_0}$初始电压的电容加流求压，其端口电压表述结果表明，其戴维南等效为$\mathbf{V_0}$直流电压源和一个无初始电荷电容的串联

单端口网络的戴维南定理





$$\dot{V}_{test}=\alpha\cdot\dot{I}_{test}+\lambda_1\cdot\dot{I}_{s1}+\lambda_2\cdot\dot{V}_{s2}+\ldots$$

$$=Z_{TH}\cdot\dot{I}_{test}+\dot{V}_{TH}$$

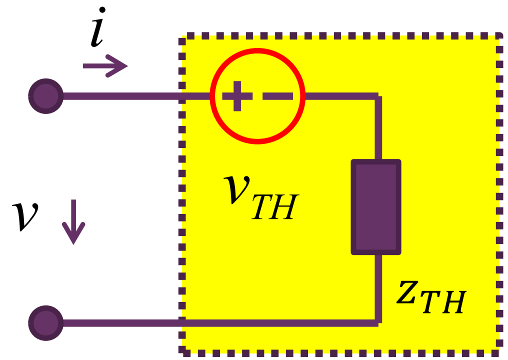
戴维南定理：

（1）端口开路电压$\mathbf{v_{TH}}$为网络内部独立源在端口的表现

（2）$\mathbf{Z_{TH}}$为网络内部独立源置零时的输入阻抗

$$\dot{V}_{TH}=\dot{V}_{test}\Big|_{\dot{I}_{test}=0}$$

$$Z_{TH}=\frac{\dot{V}_{test}}{\dot{I}_{test}}\Bigg|_{\dot{V}_{TH}=0}$$

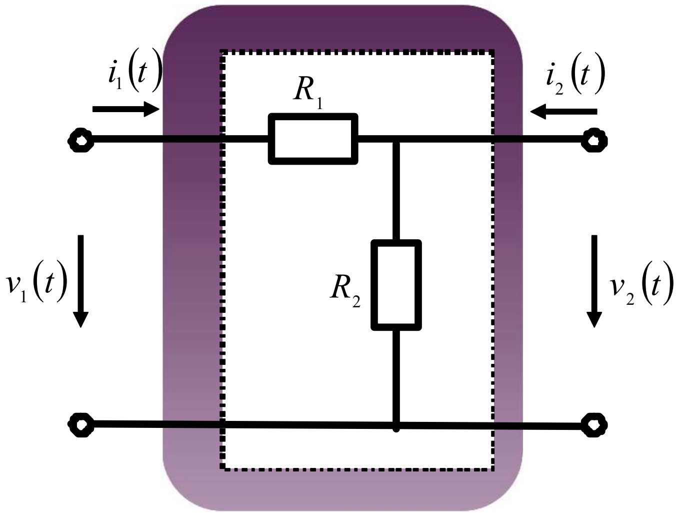


$$v=z_{TH}\cdot i+v_{TH}$$

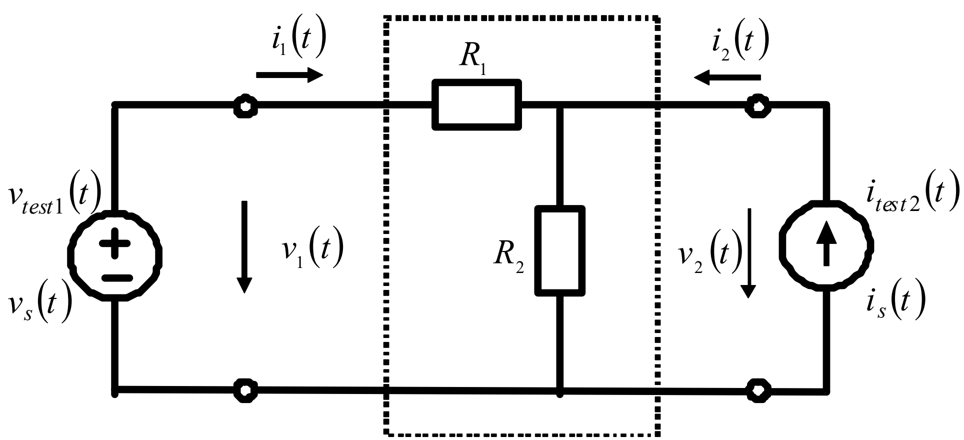
例：有初始电压$\mathbf{V_0}$的电容**C**，其端口开路电压为$\mathbf{V_0}$，此为其戴维南源电压，其内部独立源置零，就是将电容初始电荷清空，因而其内阻为无初始电荷电容**C**：其戴维南等效电路为直流源$\mathbf{V_0}$和无初始电荷**C**的串联

二端口网络也可在端口加压加流进行测试

- 单端口网络的端口伏安特性关系可以通过在端口加压加流测试获得，并因此给出其戴维南等效或诺顿等效，二端口网络的端口伏安特性同样可以通过在端口加压加流测试获得
  - 二端口网络有两个端口，因而需要两个测试源
    - 6种测量方案：(1)两端同时加压，(2)两端同时加流，(3)两端一压一流，(4)两端一流一压，(5)端口1先压再流，(6)端口2先压再流
    - 这里研究端口1加压、端口2同时加流的测试结果
      - 以最简单的电阻分压网络为例说明如何对网络进行测试、对测试结果又是如何解释的

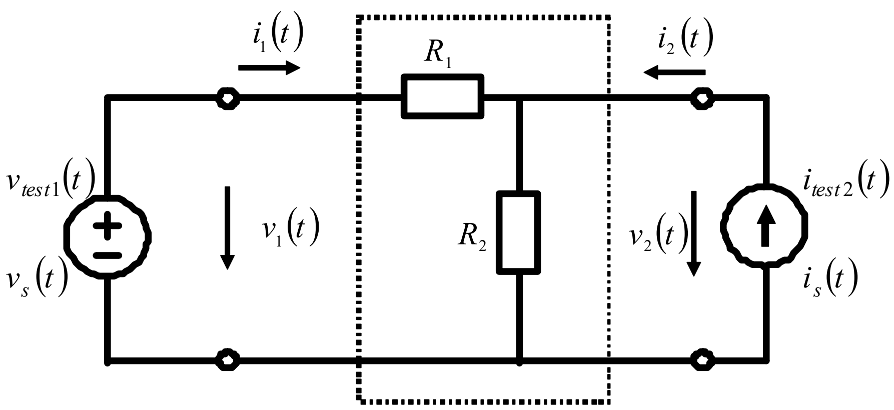


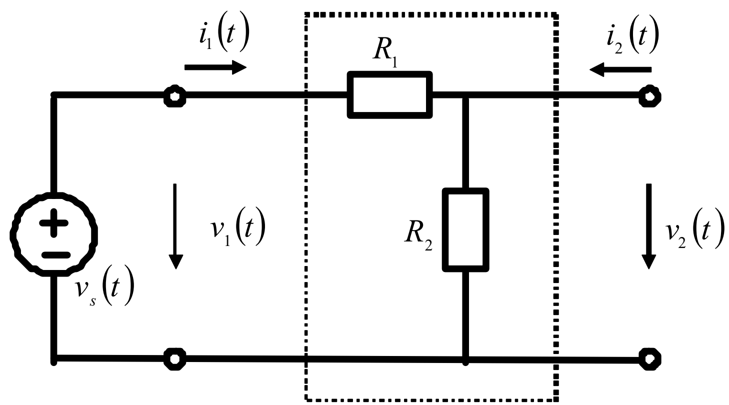
二端口网络端口关联参考方向的一般性定义



二端口网络的同时加压加流测试方案

叠加定理：端口1测试电压单独作用的分响应





$$v_1(t)=v_s(t)$$

端口**1**加测试电压

$$i_1(t)=\frac{1}{R_1+R_2}v_s(t)$$

测得端口**1**看入电阻为$\mathbf{R_1+R_2}$

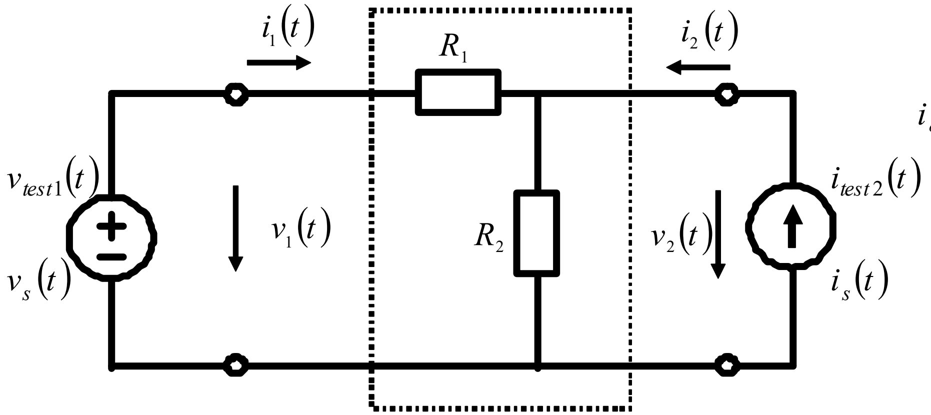
$$v_2(t)=\frac{v_s(t)}{R_1+R_2}R_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}v_1(t)$$

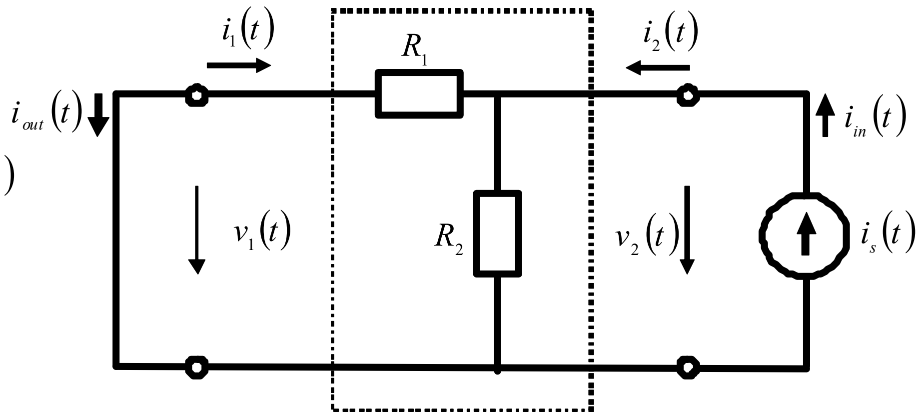
$$i_2(t)=0$$

测得端口**2**开路电压为端口**1**电压的分压；端口**1**电压对端口**2**电压的影响因子为分压系数

（条件：端口**2**开路）

叠加定理：端口2测试电流单独作用的分响应





$$i_2(t)=i_s(t)$$

端口2加测试电流

$$v_2(t)=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_s(t)=\frac{i_2(t)}{G_1+G_2}$$

测得端口2看入电阻为$R_1||R_2$

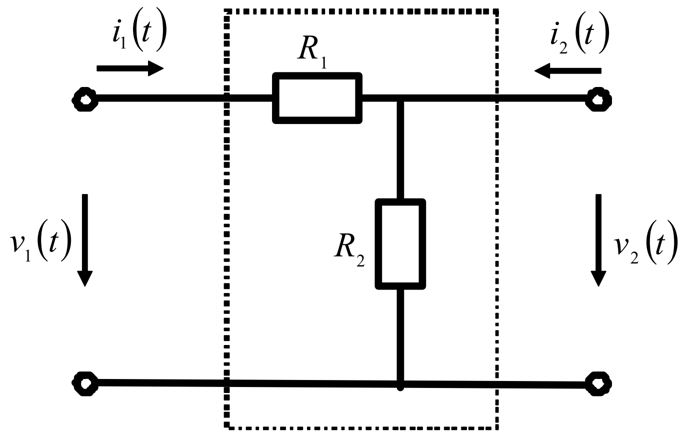
$$-i_1(t)=G_1v_2(t)=G_1\frac{i_2(t)}{G_1+G_2}=\frac{G_1}{G_1+G_2}i_2(t)$$

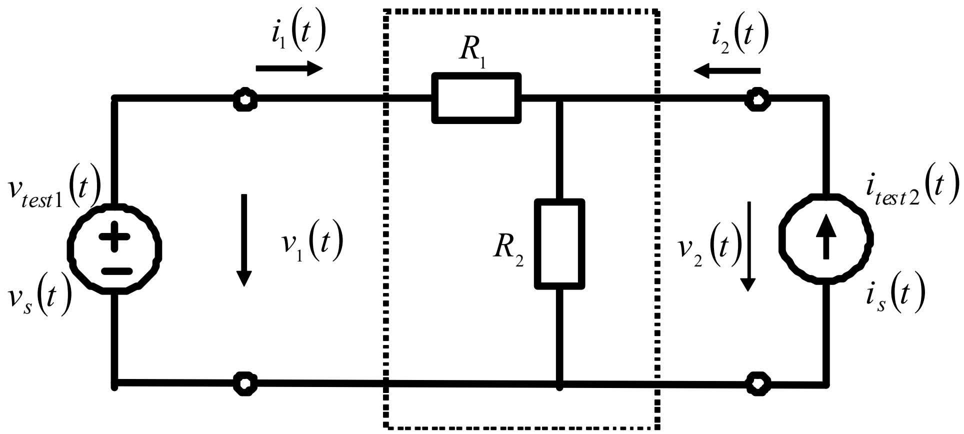
$$v_1(t)=0$$

测得端口1短路电流为端口2电流的分流；端口2电流对端口1电流的影响因子为分流系数

（条件：端口1短路）

叠加定理
同时作用总响应为单独作用分响应之和





$$v_1(t)=v_s(t)$$

$$i_1(t)=-\frac{G_1}{G_1+G_2}i_2(t)+\frac{1}{R_1+R_2}v_1(t)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{G_1+G_2}i_2(t)+\frac{R_2}{R_1+R_2}v_1(t)$$

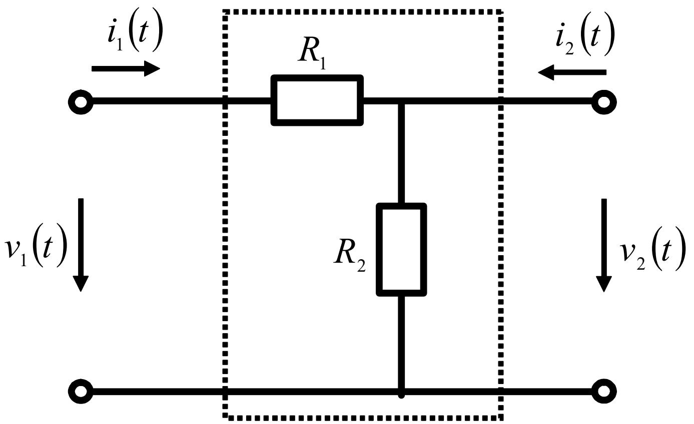
$$i_2(t)=i_s(t)$$

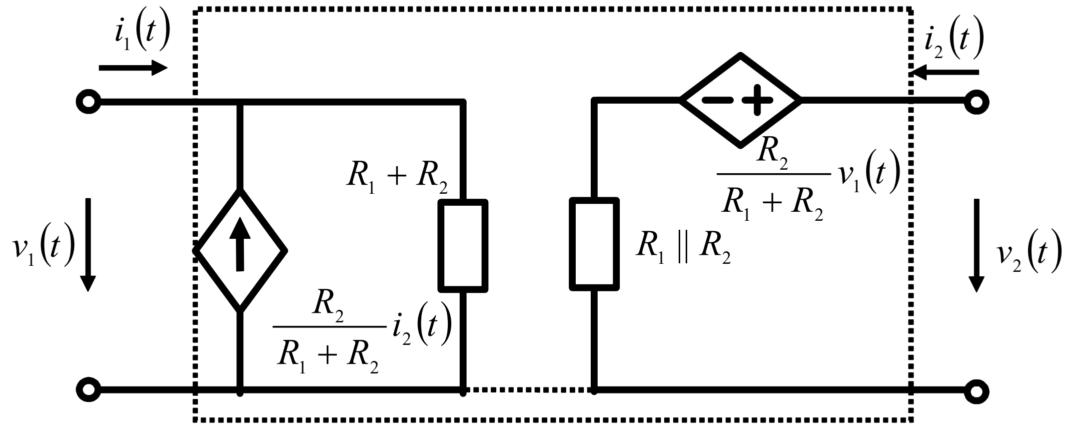
表达式中的$\mathbf{v_s}$用$\mathbf{v_1}$表述，$\mathbf{i_s}$用$\mathbf{i_2}$表述

受控源的引入

端口1加压测试，获得诺顿等效

端口2加流测试，获得戴维南等效





$$i_1(t)=-\frac{G_1}{G_1+G_2}i_2(t)+\frac{1}{R_1+R_2}v_1(t)$$

此为恒流源，
但不是独立源，
是流控流源

$$v_2(t)=\frac{1}{G_1+G_2}i_2(t)+\frac{R_2}{R_1+R_2}v_1(t)$$

此为恒压源，
但不是独立源，
是压控压源

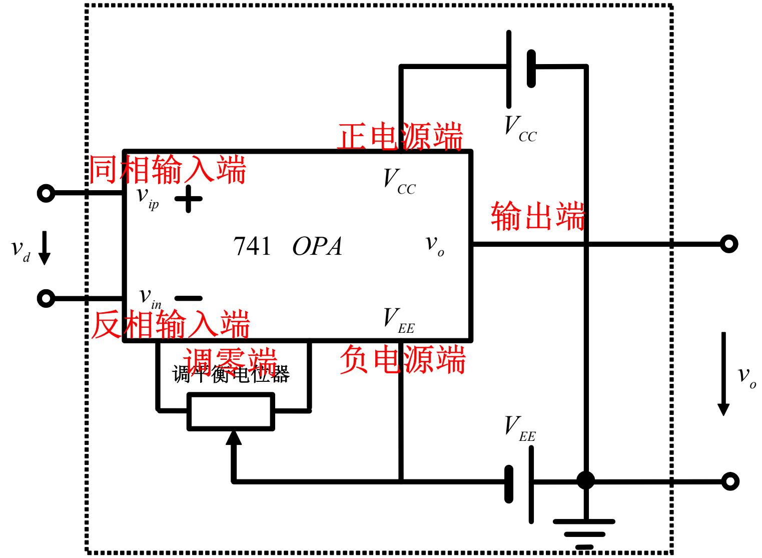
这是对描述方程的等效电路表述

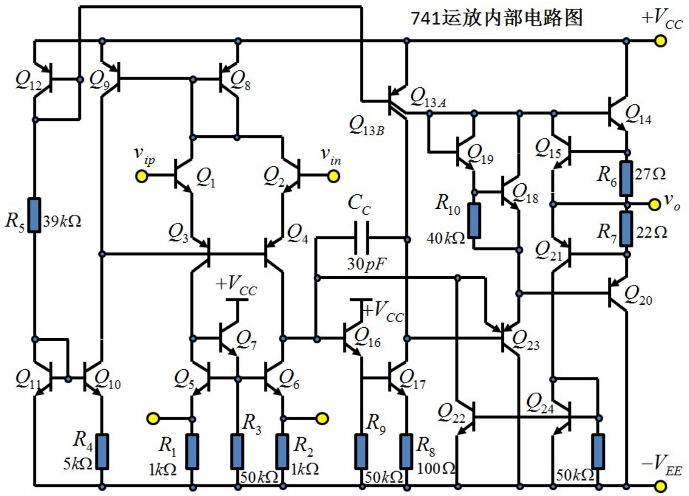
端口2开路时，端口1看入电阻为R_1+R_2，端口2开路电压为端口1电压的分压，分压系数为$R_2/(R_1+R_2)$

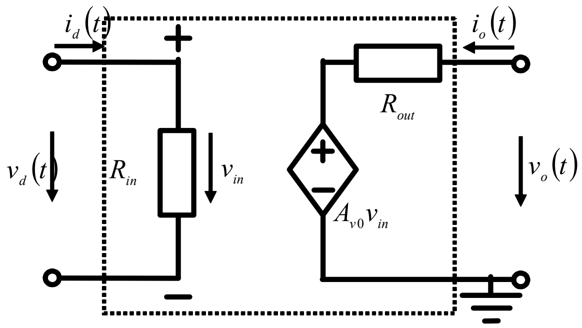
端口1短路时，端口2看入电阻为$R_1||R_2$，端口1电流为端口2电流的分流，分流系数为$-G_1/(G_1+G_2)$

受控源是端口间作用关系的抽象描述

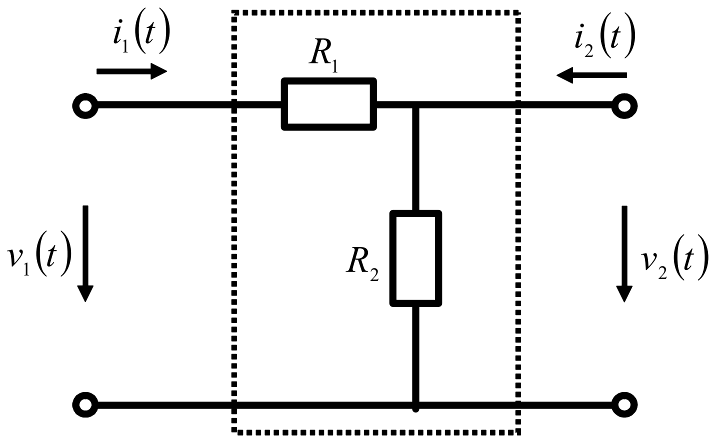
- 只要多端口网络端口间存在作用关系，多端口网络端口描述方程中就存在对这种关系的描述，这个关系描述用等效电路描述就是受控源
  - 受控源的引入规范了对多端口网络的电路研究，是否把简单问题复杂化?
    - 不，大多是复杂问题简单化!

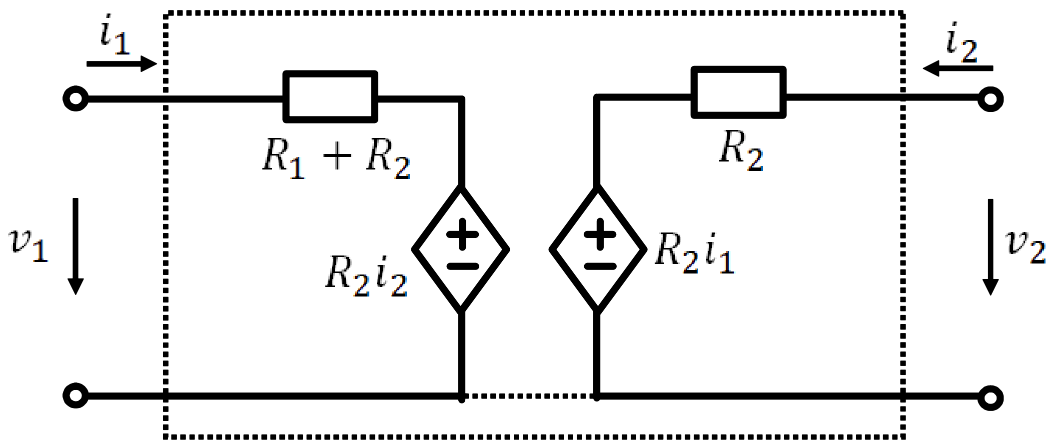






同一电路，多种等效





$$i_1 = -\frac{R_2}{R_1+R_2} i_2 + \frac{1}{R_1+R_2} v_1$$

$$v_1 = (R_1+R_2) i_1 + R_2 i_2$$

$$v_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i_2 + \frac{R_2}{R_1+R_2} v_1$$

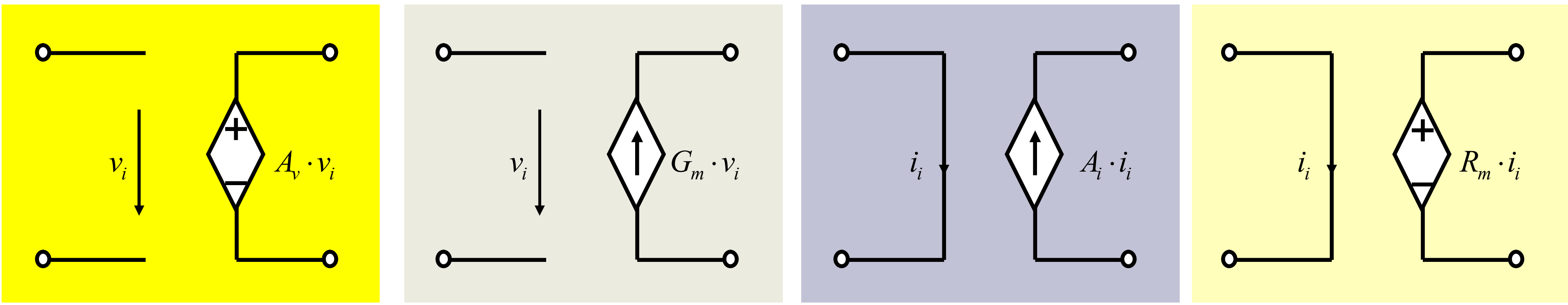
$$v_2 = R_2 i_1 + R_2 i_2$$

以$v_1 i_2$为自变量，$i_1 v_2$为因变量的端口伏安特性描述

可以很方便地转化为以$i_1 i_2$为自变量，$v_1 v_2$为因变量的端口伏安特性描述

四种理想受控源

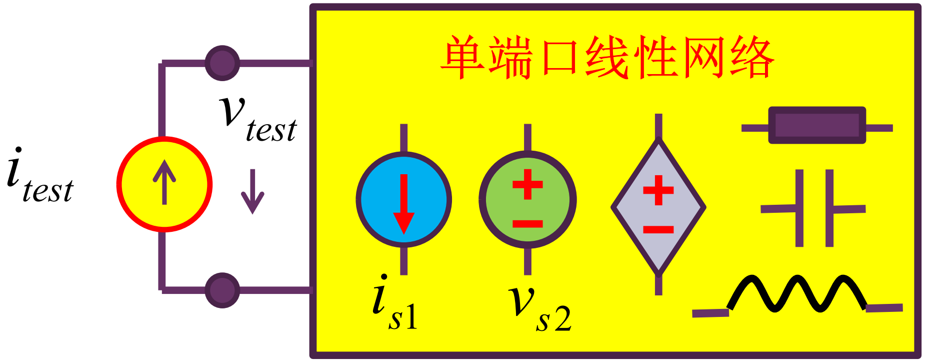
- 压控压源（VCVS，voltage controlled voltage source）
  - A_v　电压控制系数；电压增益/放大倍数
- 压控流源（VCCS， voltage controlled current source ）
  - G_m　跨导控制系数；跨导增益/放大倍数
- 流控流源（CCCS， current controlled current source ）
  - A_i　电流控制系数；电流增益/放大倍数
- 流控压源（CCVS， current controlled voltage source ）
  - R_m　跨阻控制系数；跨阻增益/放大倍数



VCVS　**VCCS**　**CCCS**　**CCVS**

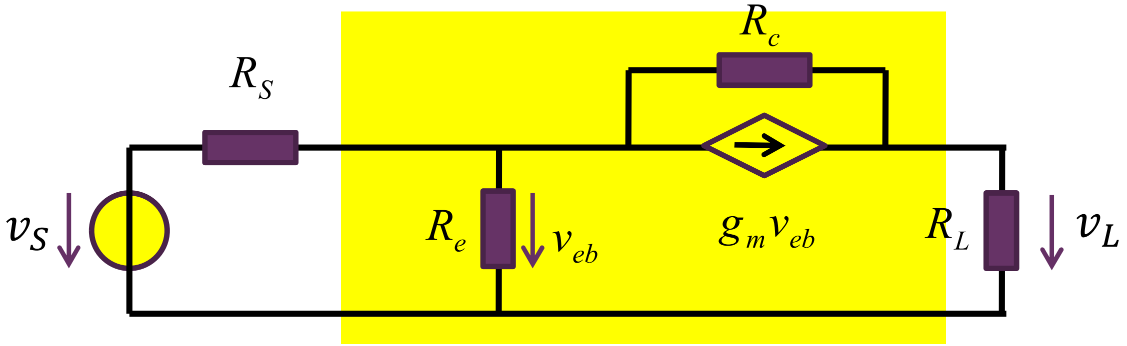
含受控源线性网络的戴维南-诺顿定理

- 求单端口网络的戴维南等效内阻时，要求内部独立源不起作用（置零），受控源该如何处理呢?
- 线性受控源是描述端口之间的线性作用关系的，因而求戴维南内阻时，独立源作用直0，但受控源代表的端口（支路）间的作用关系并不会消失，必须保留受控源的作用
  - 受控源代表的端口之间的作用关系（内在的联系）不会因内部独立源消失而消失，外端口加压求流或加流求压时，这些受控源的作用关系就会显现出来



例3 放大器的电压增益

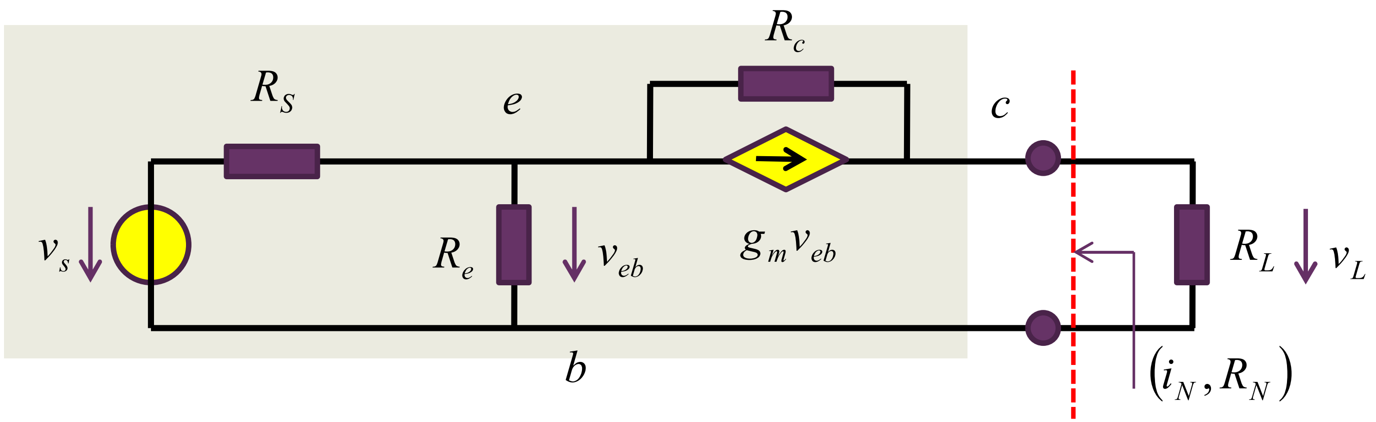
- 已知R_S=50Ω，R_e=1kΩ，R_c=100kΩ，R_L=1kΩ，g_m=100mS
- 求电压增益

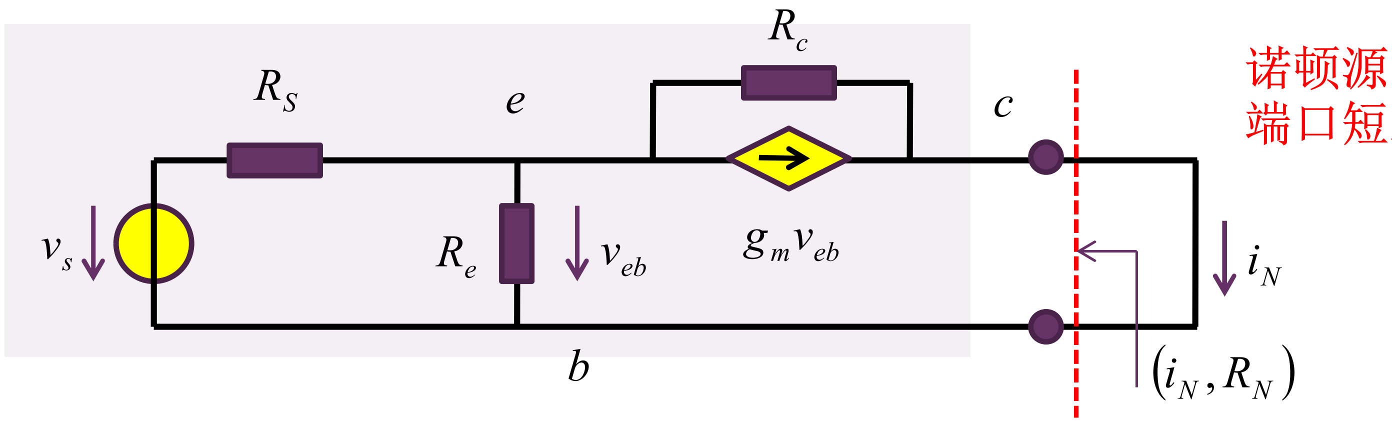


某晶体管放大器的交流小信号分析基本电路模型

$$A_v = \frac{v_L}{v_S}$$

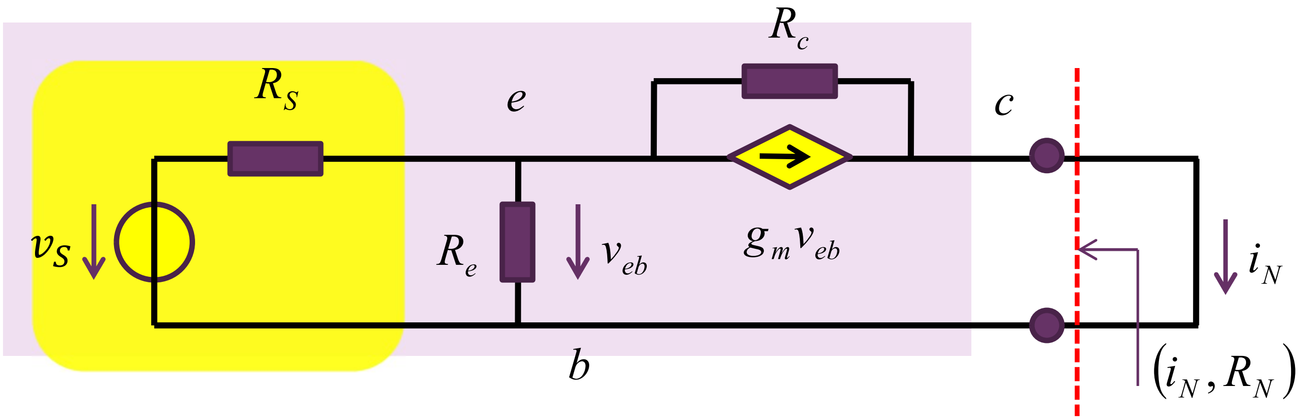
采用诺顿源等效进行分析

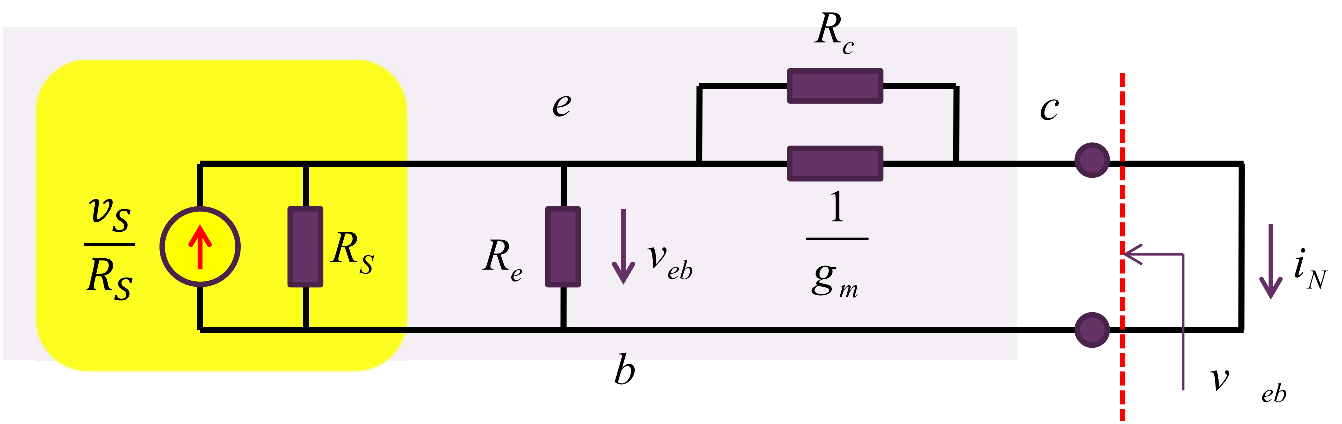




诺顿源电流为
端口短路电流

诺顿源电流

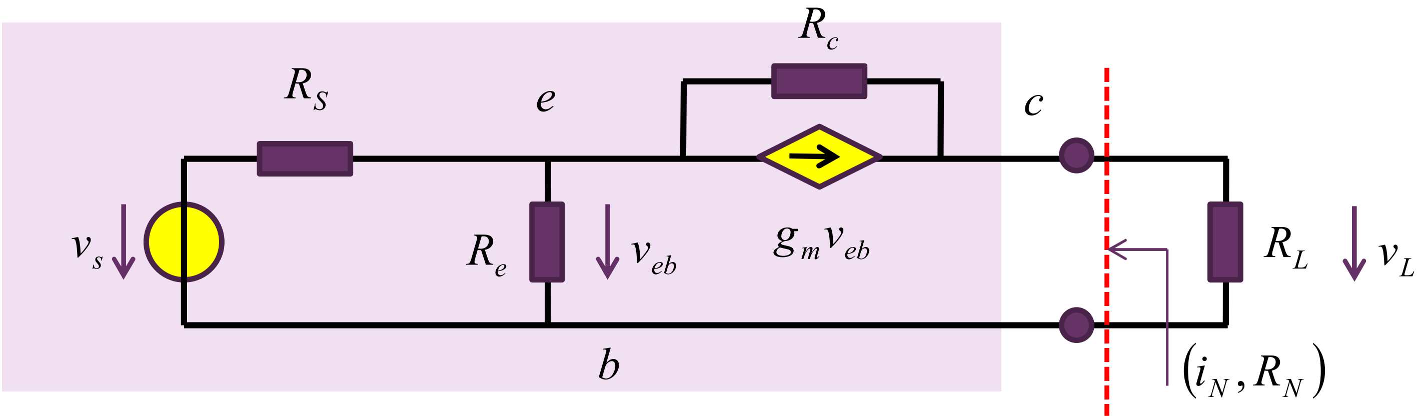


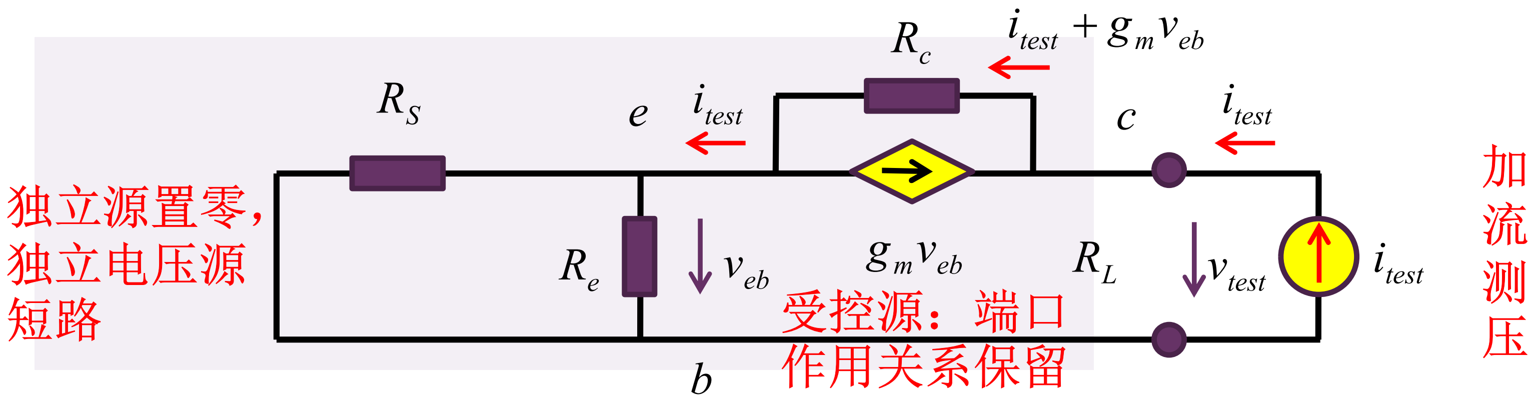


$$i_N = \frac{g_m + G_c}{G_s + G_e + g_m + G_c} G_s v_s = \frac{100 + 0.01}{20 + 1 + 100 + 0.01} 20 v_s = 16.53 v_s$$

mS **mS**

诺顿源内阻

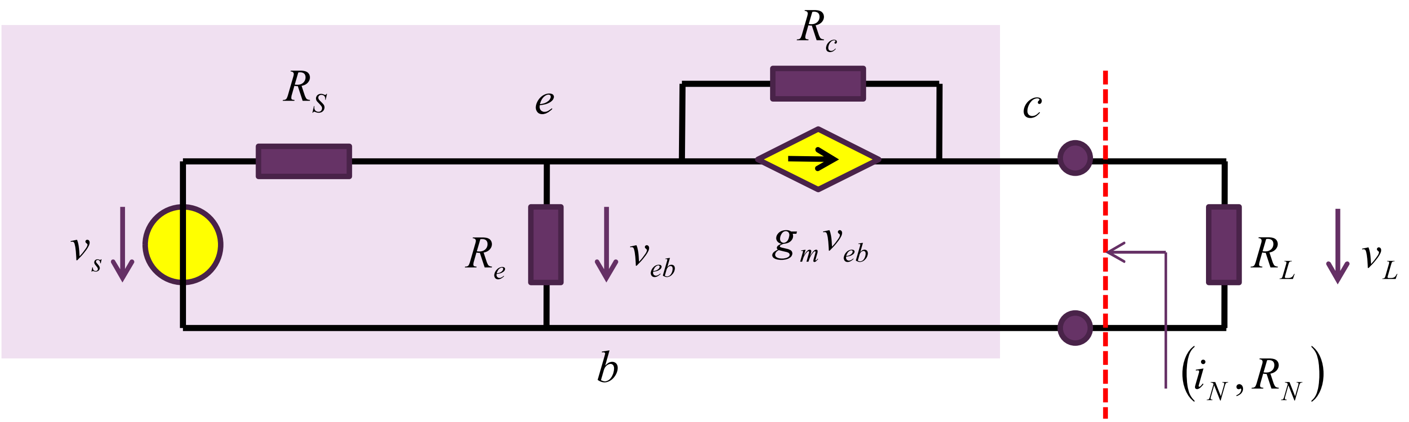




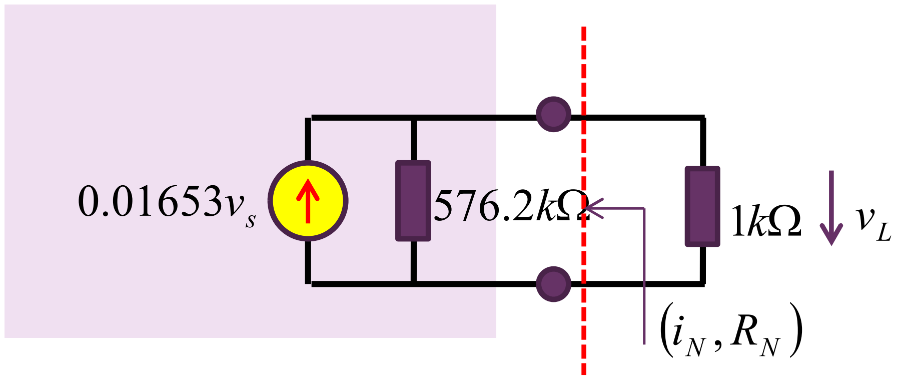
$$v_{test} = (i_{test} + g_m v_{eb})R_c + v_{eb} = i_{test}R_c + (g_m R_c + 1)v_{eb} = i_{test}R_c + (g_m R_c + 1) \cdot i_{test}(R_s||R_e)$$

$$R_N = \frac{v_{test}}{i_{test}} = R_c + (g_m R_c + 1) \cdot (R_s||R_e) = 100000 + (0.1 \times 100000 + 1) \cdot (50||1000) = 576.2k\Omega$$

源驱动负载



- 这是一个24.35dB电压增益的同相放大电路
- 这里的分析采用的是源驱动负载的一般模型，其中源是等效诺顿电流源



$$v_L = i_N \cdot (R_N || R_L) = 16.53mS \times v_S \times \frac{576.2k\Omega \times 1k\Omega}{576.2k\Omega + 1k\Omega}$$

$$= 16.53mS \times 0.9983k\Omega \times v_S = 16.50v_S$$

$$A_v = \frac{v_L}{v_S} = 16.50 = 24.35dB$$

如果希望直接列写电路方程求解
问题：复杂网络结构如何列写完备方程

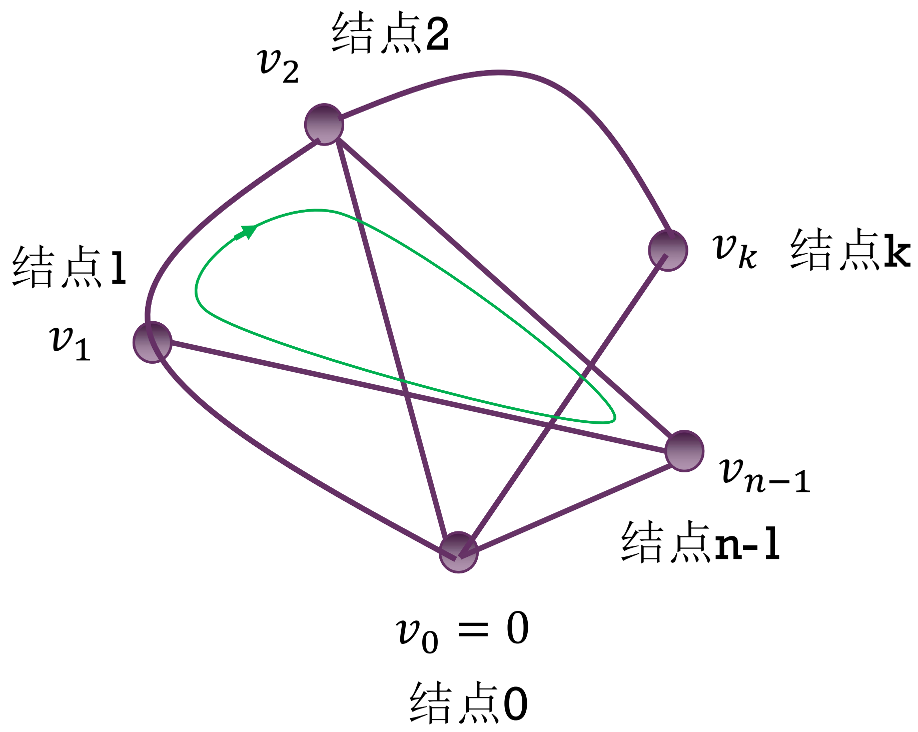
- 电路分析过程就是列写电路方程、求解电路方程、对解进行解析的过程
  - 列写电路方程：就是列写KVL、KCL、GOL方程
    - 在本节课之前，所有电路都是简单的分压分流电路，因此电路方程列写不存在问题：电路结构过于简单，无论怎样列写也不会出错

- 对于复杂结构的电路网络，如何确保列写的电路方程是完备的？
  - 方程列少了不行，列多了不行，方程不独立不行
  - 正确的方程列写：确保n个未知量有n个独立方程对应

- 结点电压法是列写完备电路方程的一种常用方法，如CAD工具中采用的电路方程列写方法就是结点电压法
  - 分析电路拓扑结构，确定电路有n个结点
  - 指定一个结点为参考地结点，以其他结点相对参考地的结点电压为未知量，共有n-1个结点电压未知量
    - 如果两个结点之间存在恒压源连接关系，那么这两个结点可被处理为一个结点
      - 只需定义一个结点电压，另外一个结点电压等于该结点电压加恒压源电压
      - 实际处理时，可把该恒压源以及与其串联的支路共同转化为一个诺顿源形式，从而消除串联点的结点（消除了中间结点的结点电压）
  - 列写n-1个结点的KCL方程，方程列写同时，把和结点相连的支路（端口）约束方程（广义欧姆定律）自动代入
    - 这样n-1个结点电压未知量，n-1个独立KCL方程，方程是完备的

方程完备？KVL方程呢？

拓扑图：结点间连线代表两个结点之间存在支路（电路元件），或者端口（网络端口）



结点电压定义确保**KVL**方程自动满足

例：电路中随意找一个回路，如图所示的**v_1-v_2-v_{n-1}-…**回路，该回路**KVL**方程自动满足

$$v_{1,2} + v_{2,n-1} + v_{n-1,1}$$

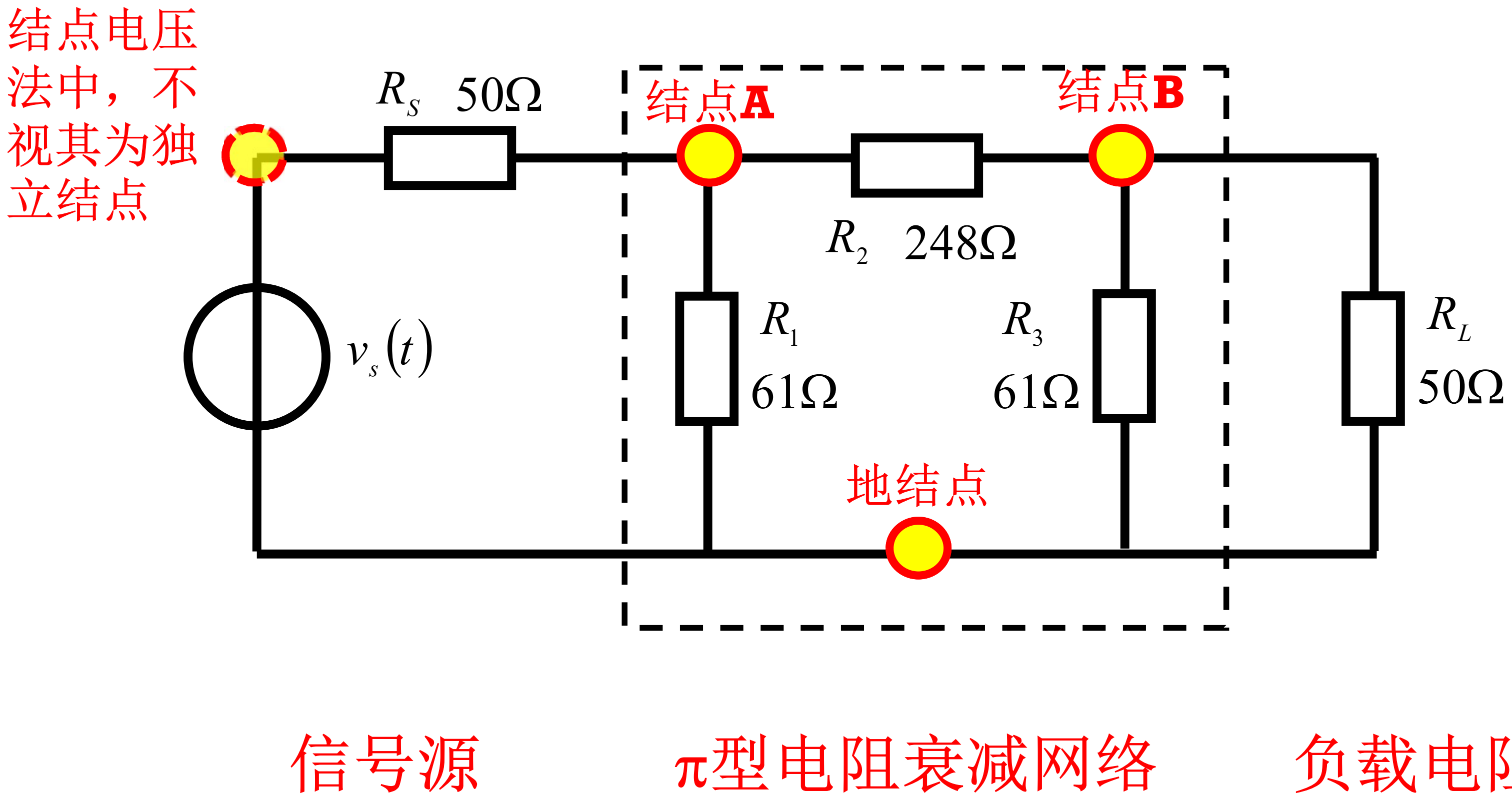
$$= (v_1 - v_2) + (v_2 - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_1)$$

$$= 0$$

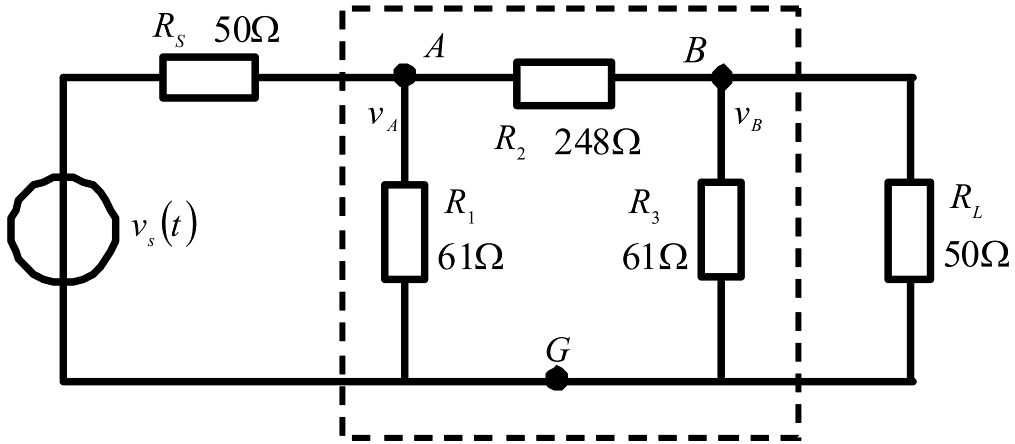
因此只需列写**KCL**方程和**GOL**方程即可

例4 π型电阻衰减器

- 请用结点电压法分析如下π型电阻衰减网络的衰减系数



列写n-1个KCL方程，代入GOL方程



KCL： 流出结点电流之和为零

$$\frac{v_A - v_S}{R_S} + \frac{v_A}{R_1} + \frac{v_A - v_B}{R_2} = 0$$

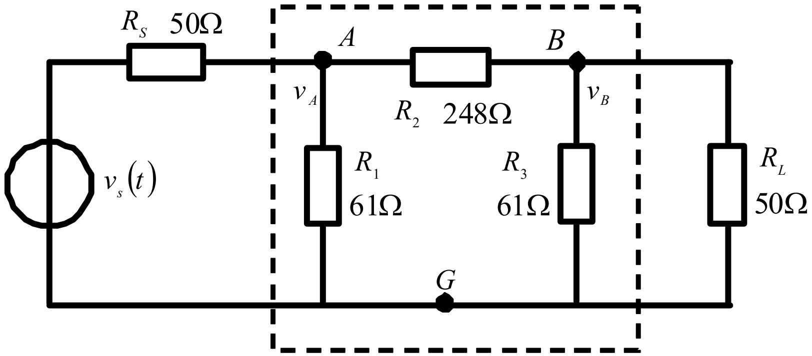
$$\frac{v_B - v_A}{R_2} + \frac{v_B}{R_3} + \frac{v_B}{R_L} = 0$$

KCL:流出结点电流等于流入结点电流

$$v_A\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + v_B\left(-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{v_s}{R_S}$$

$$v_A\left(-\frac{1}{R_2}\right) + v_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_L}\right) = 0$$

线性电路的结点电压法规则



$$v_A\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+v_B\left(-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{v_s}{R_S}$$

$$v_A\left(-\frac{1}{R_2}\right)+v_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_L}\right)=0$$

列写电路方程

$$\begin{bmatrix} G_S+G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_S v_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

KCL方程：流出此结点的电流等于流入此结点的电流

求解电路方程

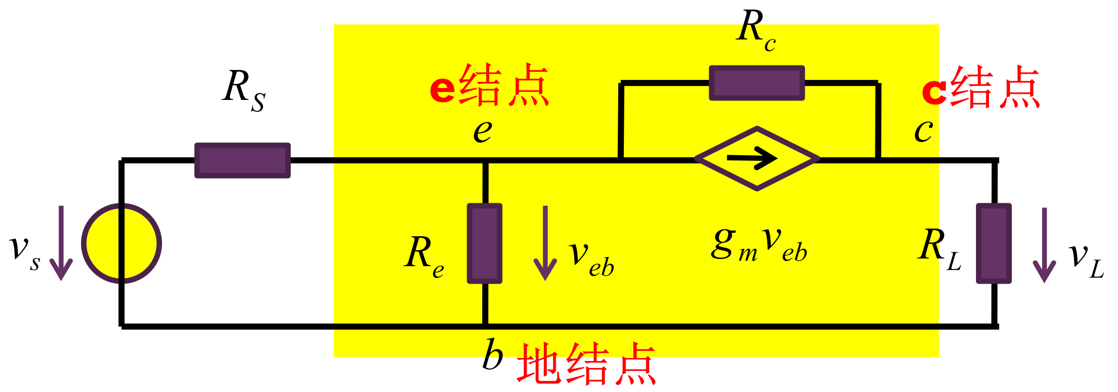
$$\begin{bmatrix} 0.0404 & -0.004 \\ -0.004 & 0.0404 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0200v_s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4997 \\ 0.0498 \end{bmatrix}v_s$$

对解进行解析

$$L=\frac{P_{S,\max}}{P_L}=\frac{\frac{V_{S,rms}^2}{4R_S}}{\frac{V_{L,rms}^2}{R_L}}=\frac{R_L}{4R_S}\left(\frac{V_{S,rms}}{V_{L,rms}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0.0498}\right)^2=100.63=20dB$$

这是一个衰减性系数为**20dB**的衰减器电路

回到例3：列写结点电压法电路方程



R_S=50Ω，
R_e=1kΩ，
R_c=100kΩ，
R_L=1kΩ，
g_m=100mS

KCL方程

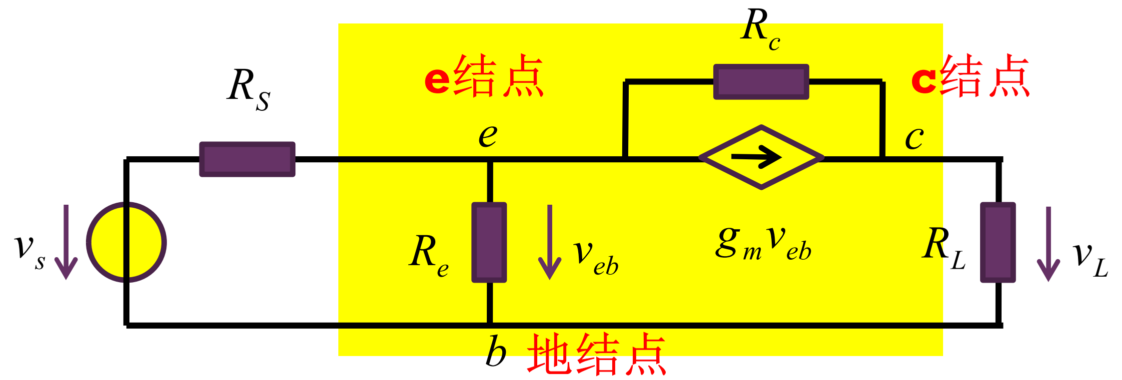
$$\begin{bmatrix} G_s + G_e + G_c & -G_c \\ -G_c & G_c + G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_s v_s - g_m v_e \\ g_m v_e \end{bmatrix}$$

流出结点电流等于流入结点电流

$$\begin{bmatrix} G_s + G_e + G_c + g_m & -G_c \\ -G_c - g_m & G_c + G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_s v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程左侧为未知量，方程右侧为激励量（已知量

求解电路方程



R_S=50Ω，
R_e=1kΩ，
R_c=100kΩ，
R_L=1kΩ，
g_m=100mS

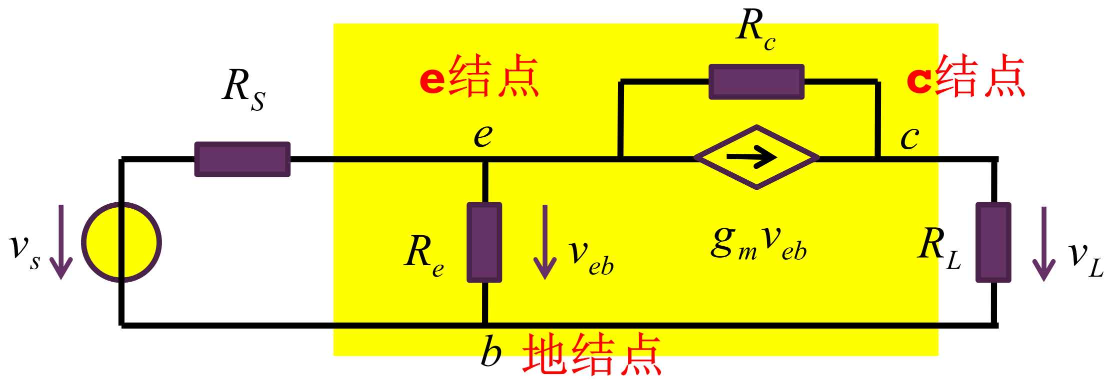
由结点电压法列写的电路方程

$$\begin{bmatrix} G_s+G_e+G_c+g_m & -G_c \\ -G_c-g_m & G_c+G_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_s v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

代入电路参量具体值

$$\begin{bmatrix} 20+1+0.01+100 & -0.01 \\ -0.01-100 & 0.01+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

对解进行解析



R_S=50Ω，
R_e=1kΩ，
R_c=100kΩ，
R_L=1kΩ，
g_m=100mS

$$\begin{bmatrix} 121.01 & -0.01 \\ -100.01 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0083 & 0.0001 \\ 0.8250 & 0.9983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20v_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 \\ 16.50 \end{bmatrix} v_s$$

$$v_L(t) = v_c(t) = 16.50 v_S(t)$$

这是一个电压增益为**24.35dB**的同相电压放大器

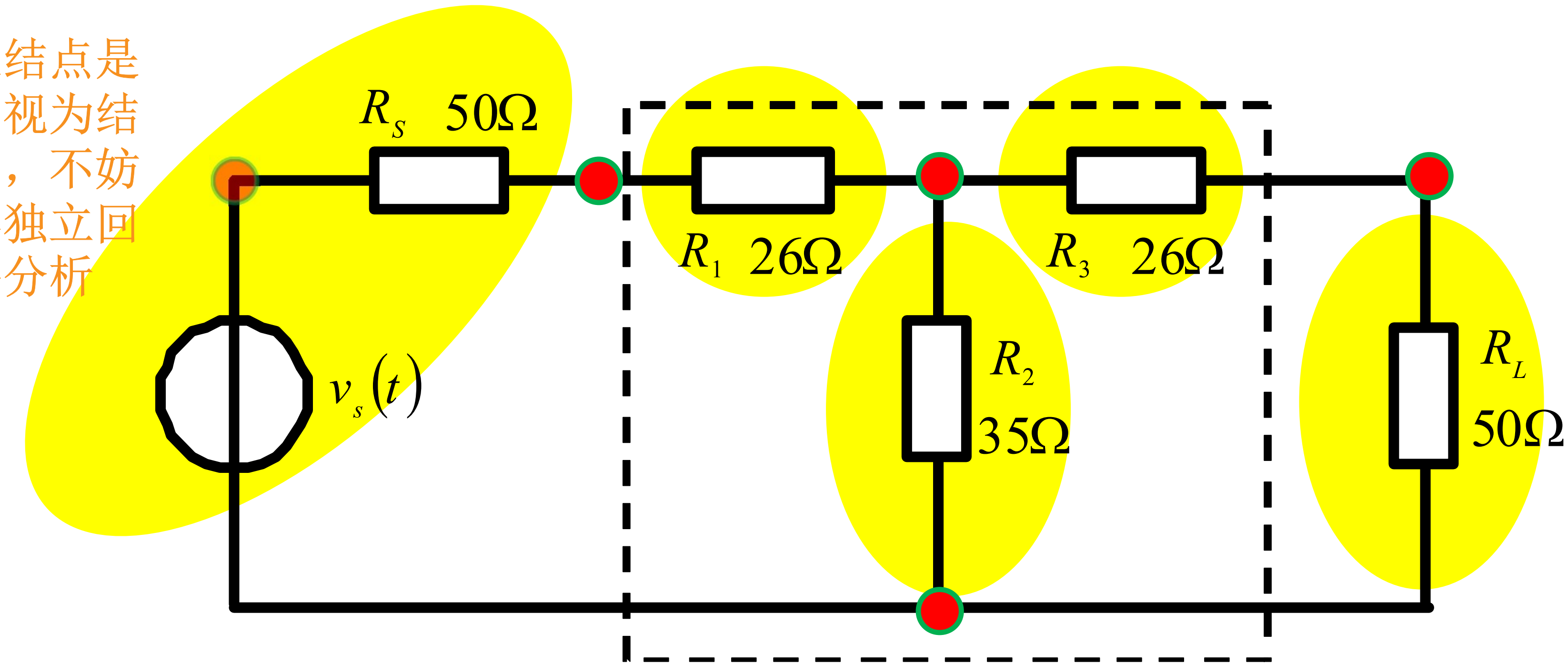
回路电流法
结点电压法的对偶表述

- 回路电流法是手工列写完备电路方程的一种常用方法
  - 分析电路拓扑结构，确定电路有b条支路和n个结点
  - 构造一个n结点连通树，树上有n-1个树支
    - 剩下的b-n+1个树外连支，均会与树支（或之前出现的连支）构成闭合回路，因而共有b-n+1个独立回路
  - 以这b-n+1个独立回路的回路电流为未知量，列写b-n+1个独立回路的KVL方程，方程列写同时，把和结点相连的支路（端口）约束方程（广义欧姆定律）自动代入
    - 这样b-n+1个回路电流未知量，b-n+1个独立KVL方程，方程是完备的
    - 如果某个回路中存在恒流源连接关系，那么这个回路可以取消，归并到和该回路有共同之路的其他回路中，共同支路上把该恒流考虑在内即可
      - 实际处理时，把恒流源回路中的所有支路上的恒流转化为与该支路串联的戴维南电压源（从而消除了恒流源回路）

例5 T型电阻衰减器

- 请用回路电流法分析如下T型电阻衰减网络的衰减系数

此结点是否视为结点，不妨碍独立回路分析



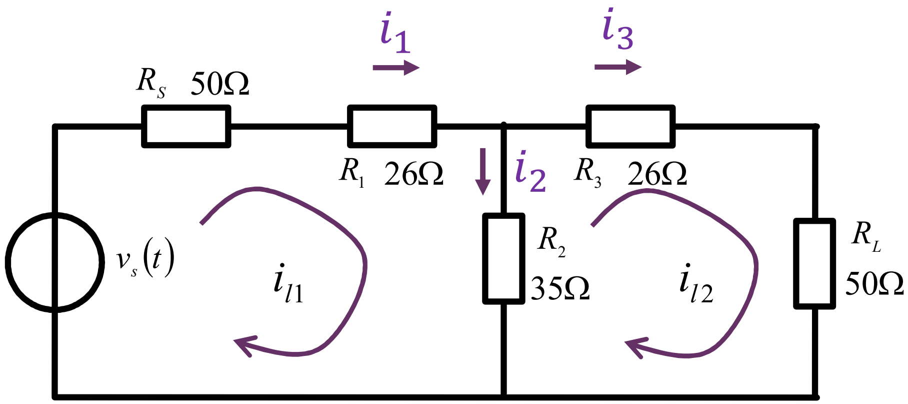
b=6 6条支路
n=5 5个结点

b=5 5条支路
n=4 4个结点

b-n+1=2各独立回路，**2**个**KVL**方程

b-n+1个独立回路的KVL方程

KCL方程自动满足，无需特意列写！



$$i_1 = i_{l1}$$

$$i_3 = i_{l2}$$

$$i_2 = i_{l1} - i_{l2} = i_1 - i_3$$

$$i_{l1}R_S + i_{l1}R_1 + (i_{l1} - i_{l2})R_2 = v_s$$

$$(i_{l2} - i_{l1})R_2 + i_{l2}R_3 + i_{l2}R_L = 0$$

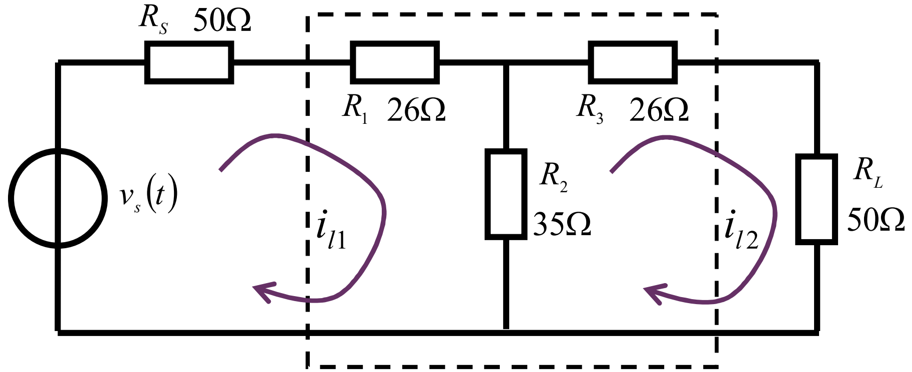
$$i_{l1}(R_S + R_1 + R_2) - i_{l2}R_2 = v_s$$

$$-i_{l1}R_2 + i_{l2}(R_2 + R_3 + R_L) = 0$$

KVL方程：此回路的电压之和等于此回路的电动势之和

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R_S + R_1 + R_2} & \boldsymbol{-R_2} \\ \boldsymbol{-R_2} & \boldsymbol{R_2 + R_3 + R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i_{l1}} \\ \boldsymbol{i_{l2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_s} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

解的解析



$$\begin{bmatrix} R_S+R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50+26+35 & -35 \\ -35 & 35+26+50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 111 & -35 \\ -35 & 111 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

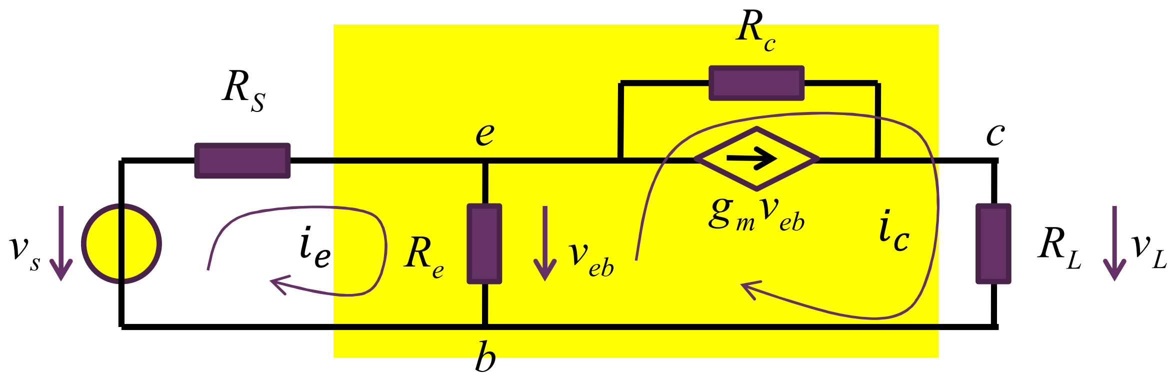
$$\begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 111 & -35 \\ -35 & 111 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0032 \\ 0.0032 & 0.0100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0100 \\ 0.0032 \end{bmatrix}v_s$$

$$v_L=i_{l2}R_L=0.1577v_S$$

$$L=\frac{P_{S,\max}}{P_L}=\frac{\frac{V_{S,rms}^2}{4R_S}}{\frac{V_{L,rms}^2}{R_L}}=\frac{R_L}{4R_S}\left(\frac{V_{S,rms}}{V_{L,rms}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0.1577}\right)^2=10.05=10dB$$

这是一个衰减性系数为**10dB**的匹配衰减器电路

回到例3：列写回路电流法电路方程



R_S=50Ω，
R_e=1kΩ，
R_c=100kΩ，
R_L=1kΩ，
g_m=100mS

KVL方程

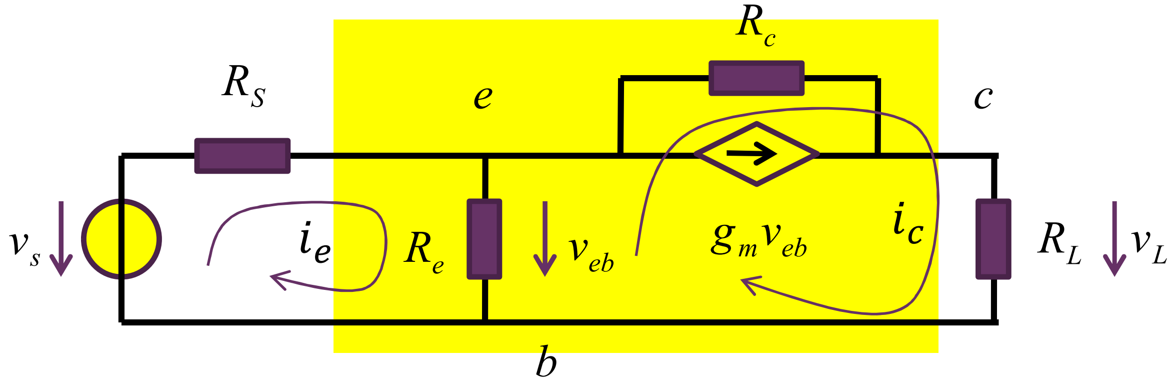
$$\begin{bmatrix} R_s+R_e & -R_e \\ -R_e & R_e+R_c+R_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_e \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ g_m v_{eb} R_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ g_m (i_e-i_c) R_e R_c \end{bmatrix}$$

回路电压之和等于回路电动势之和

$$\begin{bmatrix} R_s+R_e & -R_e \\ -g_m R_e R_c - R_e & g_m R_e R_c + R_e + R_c + R_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_e \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程左侧为未知量，方程右侧为激励量（已知量）

对解进行解析



R_S=50Ω，
R_e=1kΩ，
R_c=100kΩ，
R_L=1kΩ，
g_m=100mS

$$\begin{bmatrix} R_s+R_e & -R_e \\ -g_mR_eR_c-R_e & g_mR_eR_c+R_e+R_c+R_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_e \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.050+1 & -1 \\ -100\times1\times100-1 & 100\times1\times100+1+100+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_e \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16.67 & 0.001650 \\ 16.50 & 0.001732 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_c=16.50v_s$$

$$v_L=i_cR_L=16.50v_s(t)$$

这是一个电压增益为**24.35dB**的同相电压放大器

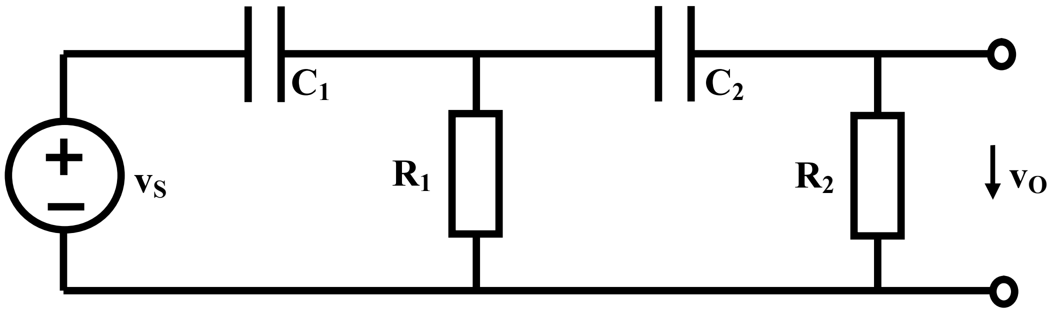
本节内容 小结

- 共轭匹配时，负载可以获得信源的额定功率
  - 共轭内蕴谐振，因此可用LC谐振网络实现最大功率传输匹配网络
    - 最大功率传输匹配网络设计公式：并大串小Q相等
    - 最大功率传输匹配网络是阻抗变换网络，其能够实现阻抗变换的根本在于端接不同阻抗的两个端口之间存在相互作用关系

- 受控源是描述多端口网络端口（支路）间作用关系的衍生元件
  - 四种受控源模型：压控压源、压控流源、流控压源、流控流源
    - 受控源的信号和能量均来自电路中的独立源，电路符号有别于独立源
  - 叠加定理中，总响应等于分响应之和，分响应的激励只能是独立源，不包含受控源，受控源不是激励，是对作用关系的一种源的等效
  - 戴维南定理中戴维南内阻是独立源不起作用（置零）时的端口阻抗，网络内的独立源需要置零，但受控源代表的支路间的作用关系始终存在，因而在求内阻时受控源不能置零，必须保留受控源的作用关系求内阻

- 当网络结构变得复杂，不能用简单的串联分压、并联分流概念分析时，则需回归到电路定律，用电路定律列写电路方程，结点电压法和回路电流法是两种最常见的列写完备方程组的方法
  - 结点电压法：以n-1个独立结点的结点电压为未知量，列写这n-1个独立结点上的KCL方程，代入GOL约束，KVL方程自动满足，无需特意列写
  - 回路电流法：以b-n+1个独立回路的回路电流为未知量，列写这b-n+1个独立回路的KVL方程，代入GOL约束，KCL方程自动满足，无需特意列写
  - 线性系统结点电压法和回路电流法可以用矩阵方程描述，作用矩阵中的非对角元素代表的就是支路间电压对电流的跨导作用关系（压控流源）和电流对电压的跨阻作用关系（流控压源）

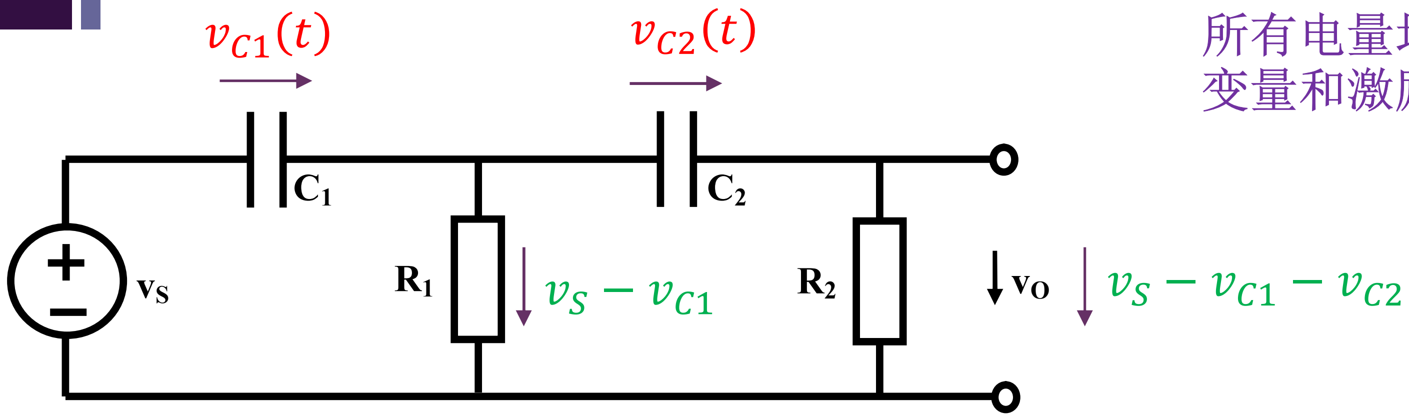
作业选讲：作业9.1 二阶RC高通滤波器



- 1、列写电路状态方程
- 2、列写以v_O为未知量的二阶微分方程
- 3、列写频域传递函数
- 4、从微分方程（或频域传递函数）说明关键参量：ξ，ω_0
- 5、假设两个电容初始电压均为0，激励源为阶跃信号源$v_S(t)=V_0U(t)$，用五要素法获得输出电压表达式（考察$R_1=R_2=R$，$C_1=C_2=C$的特殊情况）

状态方程：以状态变量为未知量

所有电量均可用状态
变量和激励量表述



$$C_2\frac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2} = i_{R2} = \frac{v_S - v_{C1} - v_{C2}}{R_2}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{v_S}{R_2C_2} - \frac{v_{C1}}{R_2C_2} - \frac{v_{C2}}{R_2C_2}$$

$$C_1\frac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1} = i_{R1} + i_{C2} = \frac{v_S - v_{C1}}{R_1} + \frac{v_S - v_{C1} - v_{C2}}{R_2}$$

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{v_S}{R_1C_1} + \frac{v_S}{R_2C_1} - \frac{v_{C1}}{R_1C_1} - \frac{v_{C1}}{R_2C_1} - \frac{v_{C2}}{R_2C_1}$$

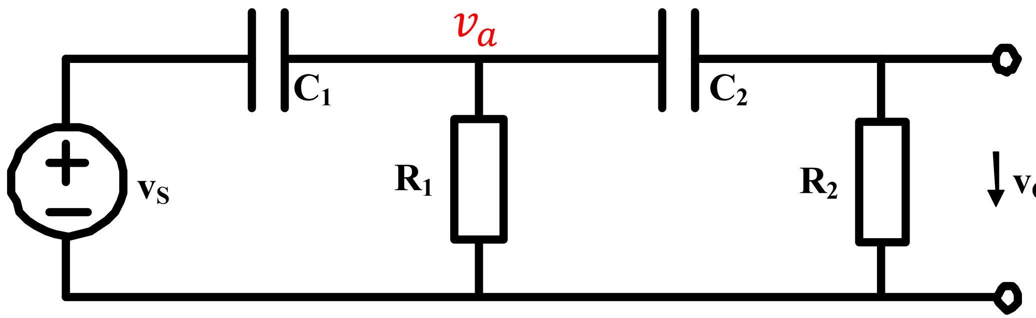
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} v_S$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

以vo为未知量的二阶微分方程

不妨从频域入手求

- 线性时不变系统相量域方法和线性电阻电路一样
  - 用简单分压概念求

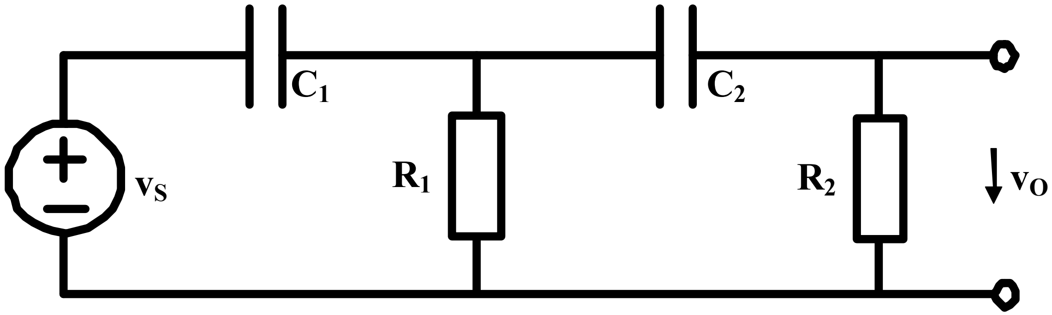


$$H(s) \overset{s=j\omega}{\triangleq} \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_s} = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_a} \cdot \frac{\dot{V}_a}{\dot{V}_s} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}}}{\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}}}$$

$$= \frac{sR_2C_2}{sR_2C_2 + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{sC_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{sC_2}{sR_2C_2 + 1}\right) + 1} = \frac{sR_2C_2}{sR_2C_2 + 1} \cdot \frac{sR_1C_1}{1 + \frac{sR_1C_2}{sR_2C_2 + 1} + sR_1C_1}$$

$$= \frac{s^2R_1C_1R_2C_2}{sR_2C_2 + 1 + sR_1C_2 + (sR_2C_2 + 1)sR_1C_1} = \frac{s^2R_1C_1R_2C_2}{1 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

针对LTI系统，从频域转时域是简单的



$$H(s) \overset{s=j\omega}{\triangleq} \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_s} = \frac{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{1 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$(1 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2 R_1R_2C_1C_2)\dot{V}_o = s^2 R_1C_1R_2C_2\dot{V}_s$$

$$R_1R_2C_1C_2 s^2\dot{V}_o + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s\dot{V}_o + \dot{V}_o = R_1C_1R_2C_2 s^2\dot{V}_s$$

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)\frac{d}{dt}v_o(t) + v_o(t) = R_1C_1R_2C_2\frac{d^2}{dt^2}v_s(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \frac{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v_o(t) = \frac{d^2}{dt^2}v_s(t)$$

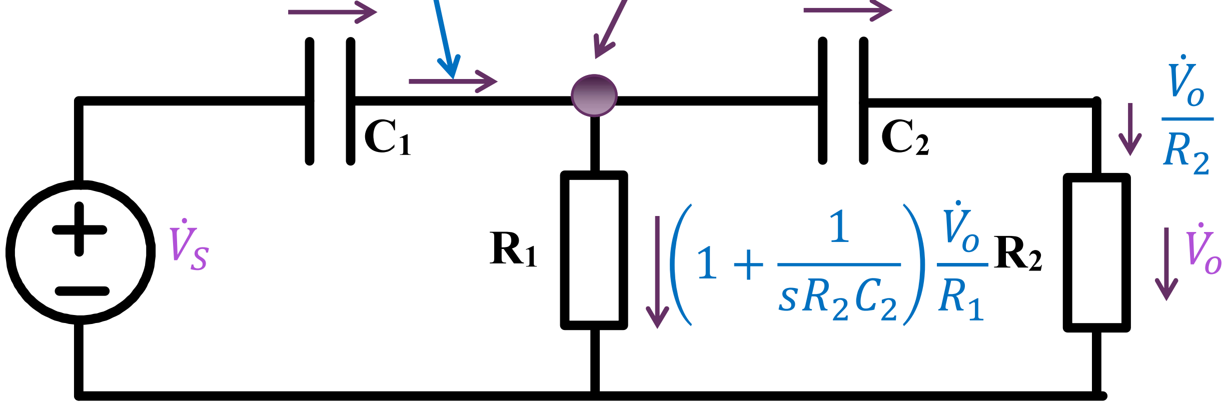
倒推法

$$\left(\left(1+\frac{1}{sR_2C_2}\right)\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\dot{V}_o \qquad \left(1+\frac{1}{sR_2C_2}\right)\dot{V}_o$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{sR_2C_2}\right)\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{sC_1}\dot{V}_o \qquad \frac{\dot{V}_o}{sC_2R_2}$$

利用串并联关系倒推

串联同电流，电压加
并联同电压，电流加



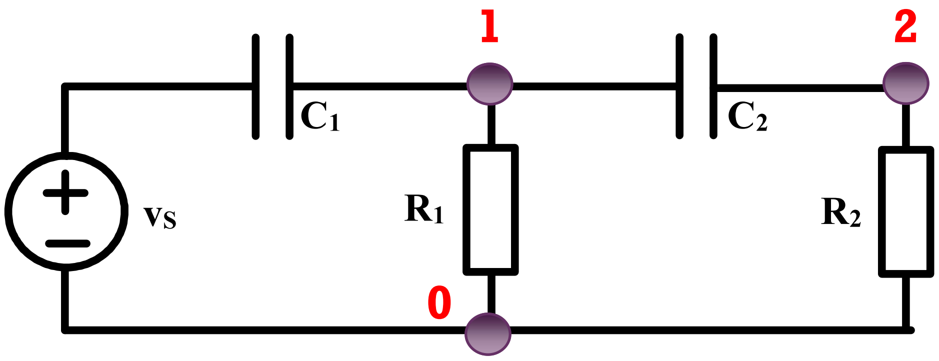
$$\dot{V}_S=\left(\left(1+\frac{1}{sR_2C_2}\right)\frac{1}{sR_1C_1}+\frac{1}{sR_2C_1}\right)\dot{V}_o+\left(1+\frac{1}{sR_2C_2}\right)\dot{V}_o$$

$$\left(1+\frac{1}{sR_2C_1}+\frac{1}{sR_1C_1}+\frac{1}{sR_2C_2}+\frac{1}{s^2R_1C_1R_2C_2}\right)\dot{V}_o=\dot{V}_S$$

$$\left(s^2+\left(\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}\right)\dot{V}_o=s^2\dot{V}_S$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t)+\left(\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)\frac{d}{dt}v_o(t)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v_o(t)=\frac{d^2}{dt^2}v_s(t)$$

结点电压法



$$\begin{bmatrix} sC_1+G_1+sC_2 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2+G_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot V_1\\ \dot V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sC_1\dot V_S \\ 0\end{bmatrix}$$

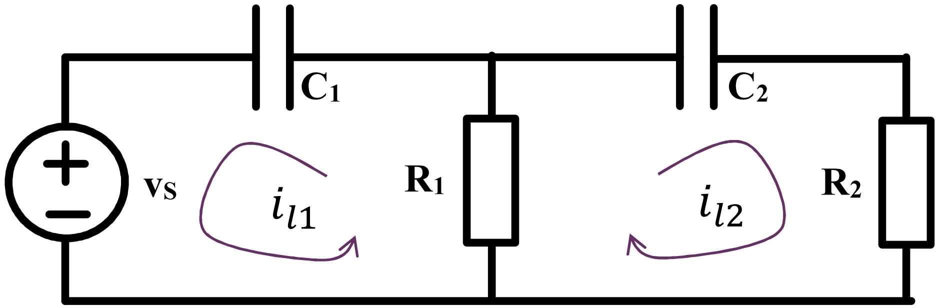
$$\begin{bmatrix}\dot V_1\\ \dot V_2\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} sC_2+G_2 & sC_2 \\ sC_2 & s(C_1+C_2)+G_1 \end{bmatrix}}{(s(C_1+C_2)+G_1)(sC_2+G_2)-(-sC_2)^2}\begin{bmatrix} sC_1\dot V_S \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\dot V_o=\dot V_2=\frac{sC_2sC_1\dot V_S}{(s(C_1+C_2)+G_1)(sC_2+G_2)-(-sC_2)^2}$$

$$=\frac{s^2C_1C_2}{s^2C_1C_2+s(C_2G_1+C_1G_2+C_2G_2)+G_1G_2}\dot V_S$$

$$=\frac{s^2}{s^2+s\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}\right)+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}\dot V_S$$

回路电流法



$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{sC_1} & R_1 \\ R_1 & R_1+R_2+\frac{1}{sC_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dot{V}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

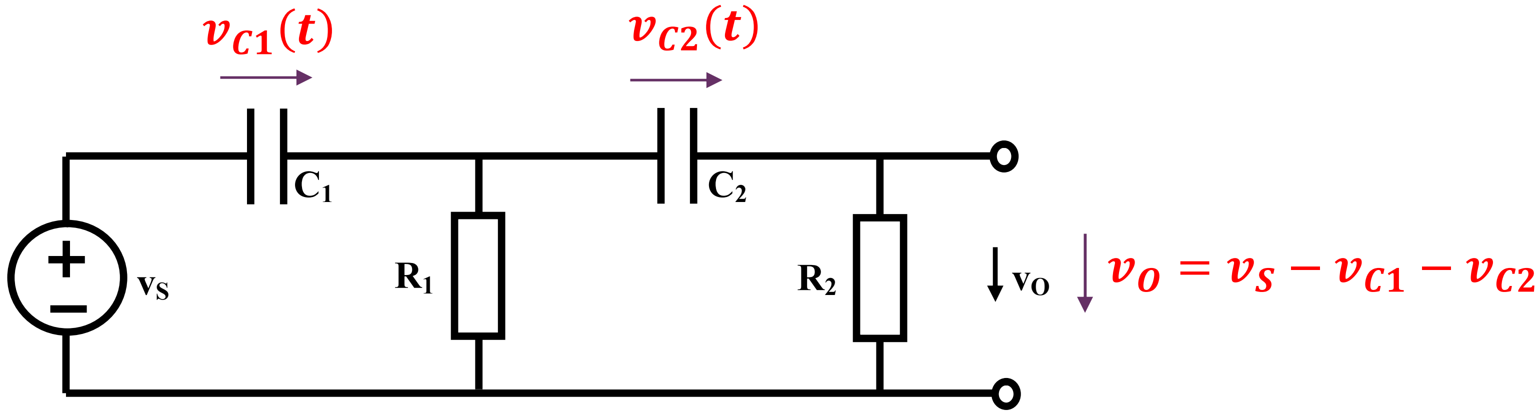
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} R_1+R_2+\frac{1}{sC_2} & -R_1 \\ -R_1 & R_1+\frac{1}{sC_1} \end{bmatrix}}{\left(R_1+\frac{1}{sC_1}\right)\left(R_1+R_2+\frac{1}{sC_2}\right)-R_1^2}\begin{bmatrix} -\dot{V}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_o=R_2\dot{I}_{l2}=\frac{R_2R_1\dot{V}_S}{R_1R_2+R_1\frac{1}{sC_2}+R_1\frac{1}{sC_1}+R_2\frac{1}{sC_1}+\frac{1}{sC_1}\frac{1}{sC_2}}$$

$$=\frac{s^2C_1C_2R_1R_2\dot{V}_S}{s^2C_1C_2R_1R_2+sC_1R_1+sC_2R_1+sC_2R_2+1}$$

$$=\frac{s^2}{s^2+s\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}\right)+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}\dot{V}_S$$

状态方程矩阵求逆



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} v_S$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} \qquad s\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{X}} + \dot{\boldsymbol{G}} \qquad (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{G}}$$

$$\begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{G}_1 \\ \dot{G}_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix}}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} \dot{G}_1 \\ \dot{G}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_O = \dot{V}_S - \dot{V}_{C1} - \dot{V}_{C2} = \dot{V}_S - \frac{(s - a_{22})\dot{G}_1 + a_{12}\dot{G}_2 + a_{21}\dot{G}_1 + (s - a_{11})\dot{G}_2}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1}-\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} v_S$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

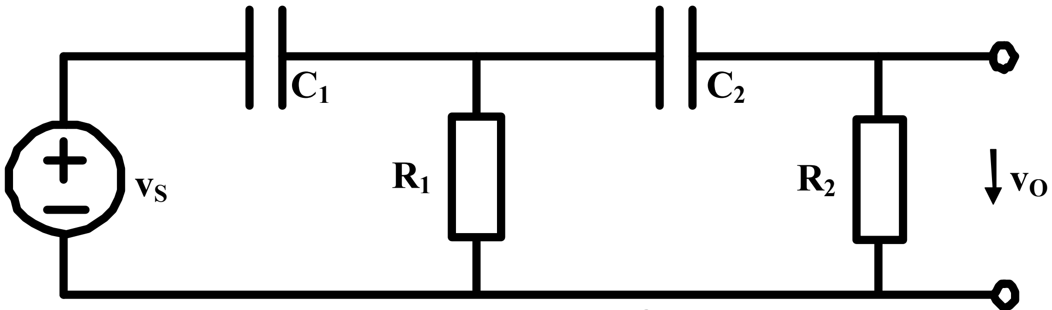
$$\dot{V}_O = \dot{V}_S - \dot{V}_{C1} - \dot{V}_{C2} = \dot{V}_S - \frac{(s-a_{22})\dot{G}_1 + a_{12}\dot{G}_2 + a_{21}\dot{G}_1 + (s-a_{11})\dot{G}_2}{s^2-(a_{11}+a_{22})s+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}$$

$$\dot{V}_O = \dot{V}_S - \frac{s\left(\dot{G}_1+\dot{G}_2\right) + (a_{21}-a_{22})\dot{G}_1 + (a_{12}-a_{11})\dot{G}_2}{s^2-(a_{11}+a_{22})s+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}$$

$$\dot{V}_O = \dot{V}_S - \frac{s\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)+0+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}\dot{V}_S$$

$$\dot{V}_O = \frac{s^2}{s^2+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}\dot{V}_S$$

系统参量



$$H(s)=\frac{\dot V_O}{\dot V_S}=\frac{s^2}{s^2+\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}=H_0\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t)+\left(\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)\frac{d}{dt}v_o(t)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v_o(t)=\frac{d^2}{dt^2}v_s(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t)+2\xi\omega_0\frac{d}{dt}v_o(t)+\omega_0^2v_o(t)=\frac{d^2}{dt^2}v_s(t)$$

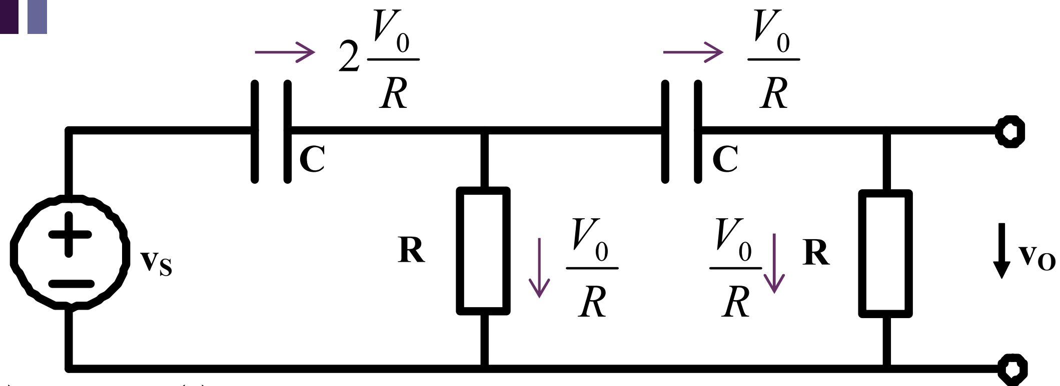
电路中只有线性**RC**（无源元件）的二阶动态电路只能是过阻尼的。要想实现欠阻尼，电路中需要**LC**：集成电路中电感不易集成，需要等效电感、等效负阻（含正反馈环路的受控源元件）以实现欠阻尼

$$H_0=1$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}$$

$$\xi=0.5\left(\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}+\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}+\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\right)\ge 0.5\left(2+\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\right)=1+0.5\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}>1$$

五要素法求解： $R_1=R_2=R, C_1=C_2=C$



$$v_S(t)=V_0\cdot U(t)$$

$$v_{O\infty}(t)=0$$

$$v_O(0^+)=V_0$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1C_1R_2C_2}}=\frac{1}{RC}$$

$$\xi=0.5\left(\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}+\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}+\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}\right)=1.5$$

$$\frac{d}{dt}v_O(0^+)=\frac{d}{dt}v_S(0^+)-\frac{d}{dt}v_{C1}(0^+)-\frac{d}{dt}v_{C2}(0^+)$$

$$=0-\frac{1}{C_1}i_{C1}(0^+)-\frac{1}{C_2}i_{C2}(0^+)$$

$$=-\frac{1}{C}2\frac{V_0}{R}-\frac{1}{C}\frac{V_0}{R}=-3\frac{V_0}{RC}=-3\omega_0V_0$$

$$v_O(t)=v_{O\infty}(t)+(V_{O0}-V_{O\infty0})e^{-\xi\omega_0t}\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0t+\left(\frac{\dot{V}_{O0}-\dot{V}_{O\infty0}}{\xi\omega_0}+V_{O0}-V_{O\infty0}\right)\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0t$$

$$=V_0e^{-\xi\omega_0t}\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0t-V_0\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0t$$

阶跃响应

过阻尼：指数衰减形态

$$v_O(t)=V_0e^{-\xi\omega_0 t}\cosh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t-V_0\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0 t}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t$$

$$=V_0e^{-\xi\omega_0 t}\frac{e^{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}+e^{-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}}{2}-V_0\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_0 t}\frac{e^{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}-e^{-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}}{2}$$

$$=V_0\frac{1}{2}\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right)e^{-\xi\omega_0 t+\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}+V_0\frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right)e^{-\xi\omega_0 t-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}$$

$$=-0.1708V_0e^{-\frac{t}{2.618RC}}+1.1708V_0e^{-\frac{t}{0.382RC}}$$

$$\omega_0=\frac{1}{RC}$$

$$\xi=1.5$$

长寿命项　　　　短寿命项

时频对应

$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{s^2}{s^2+3\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{s}H(s)=\frac{s}{s^2+3\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{s}{\left(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)\left(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)}$$

$$=\frac{a_1}{s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0}+\frac{a_2}{s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0}=\frac{a_1}{s+\frac{1}{2.618RC}}+\frac{a_2}{s+\frac{1}{0.382RC}}$$

$$=\frac{a_1\left(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)+a_2\left(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)}{\left(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)\left(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)}$$

$$=\frac{(a_1+a_2)s+a_1\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0+a_2\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0}{\left(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)\left(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0\right)}$$

$$a_1+a_2=1$$

$$a_1\frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0+a_2\frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0=0$$

$$a_1=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}=-0.1708$$

$$a_2=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}=1.1708$$

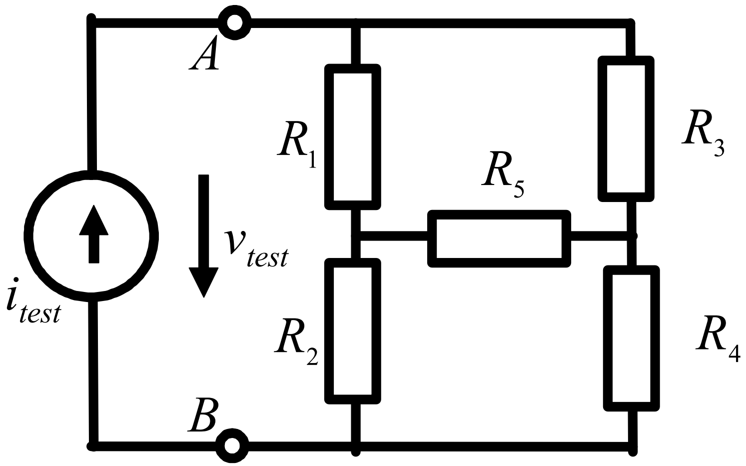
$$v_O(t)=-0.1708V_0e^{-\frac{t}{2.618RC}}U(t)$$

$$+1.1708V_0e^{-\frac{t}{0.382RC}}U(t)$$

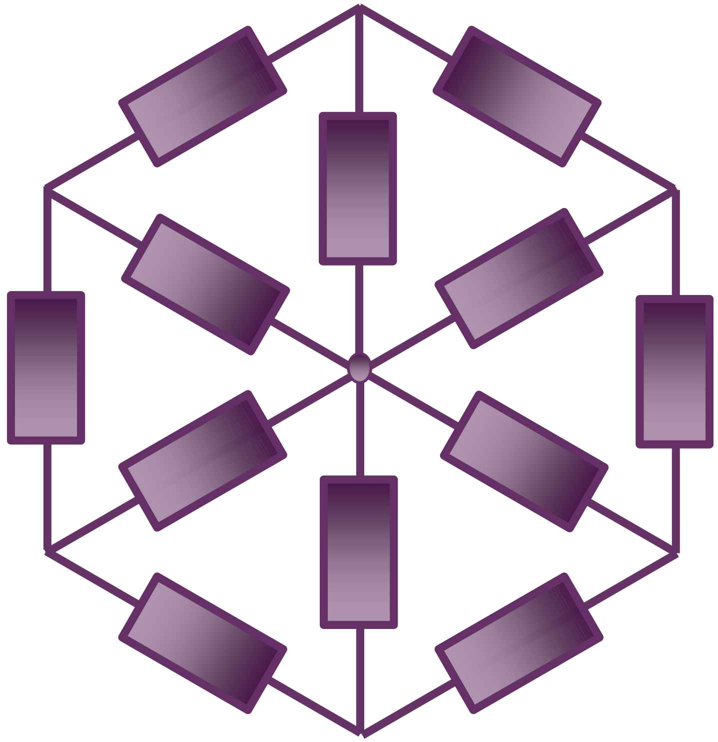
作业1 电桥分析

- 通过在AB端口加测试电流，获得AB端口电压，端口电压比端口电流即从AB端口看入的等效阻抗R_{AB}
  - 分析方法不限
  - 验证当电桥平衡时，桥中电阻R_5任意取值，都不影响R_{AB}

  - 也可在端口加压求流获得端口阻抗



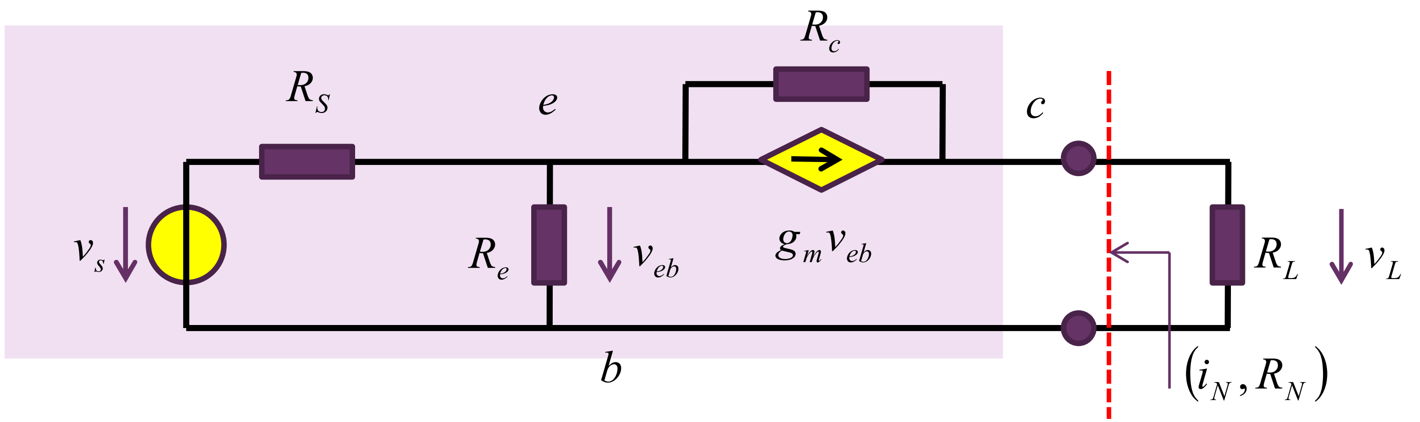
作业2 对称结构分析可以简化



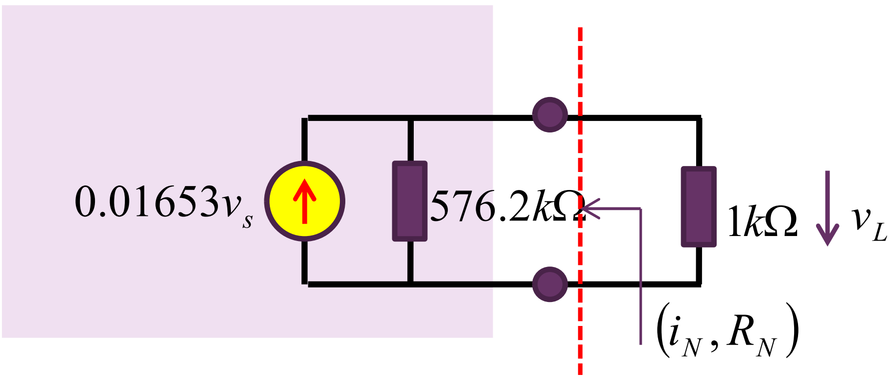
- 图中所有电阻均为1Ω电阻，求AB两点间总电阻
  - 方法不限
  - 可以利用对称性简化分析

作业3 戴维南定理

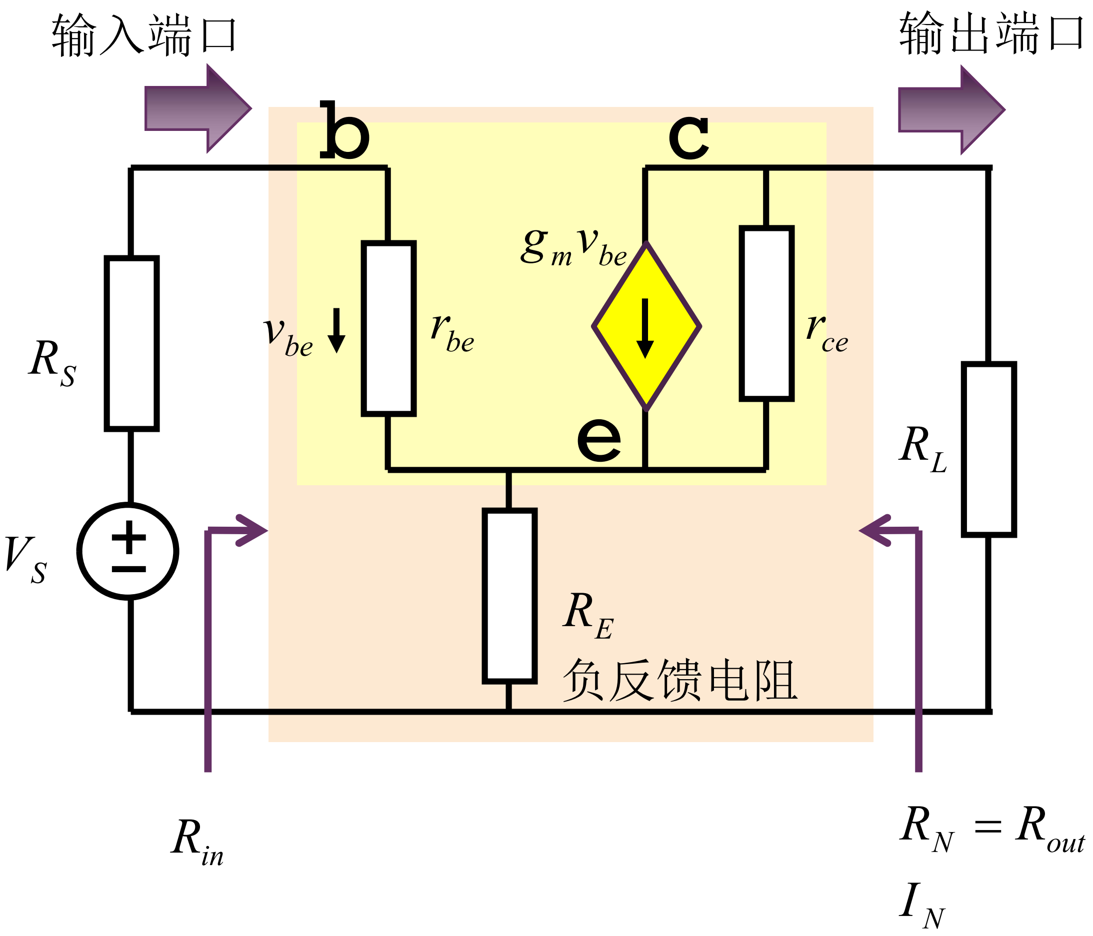
- 例题中将左侧电阻用诺顿定理做了诺顿等效分析，请用戴维南定理做戴维南等效分析



$$v_L = i_N \cdot (R_N || R_L)$$
$$= 16.53mS \times v_s \times \frac{576.2k\Omega \times 1k\Omega}{576.2k\Omega + 1k\Omega}$$
$$= 16.53mS \times 0.9983k\Omega \times v_s$$
$$= 16.50v_s$$

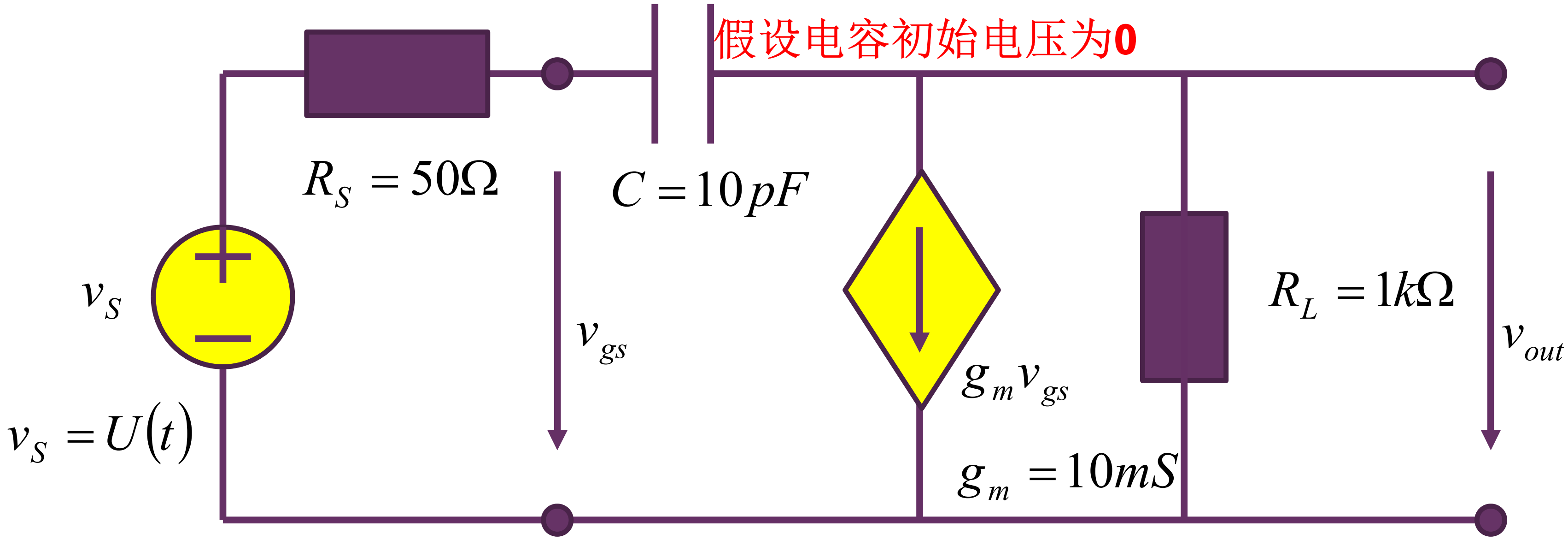


作业4 放大器分析



- **输入电阻**：放大器输入端口看入的电阻，考虑负载电阻影响
- **输出电阻**：放大器输出端口看入的电阻，是诺顿等效源内阻，考虑信源内阻影响（用诺顿定理时，只有独立源不起作用，受控源必须保留其作用）
- **等效诺顿电流**：输出端口等效诺顿源的源电流
- **电压放大倍数**：负载电阻电压与激励源电压之比

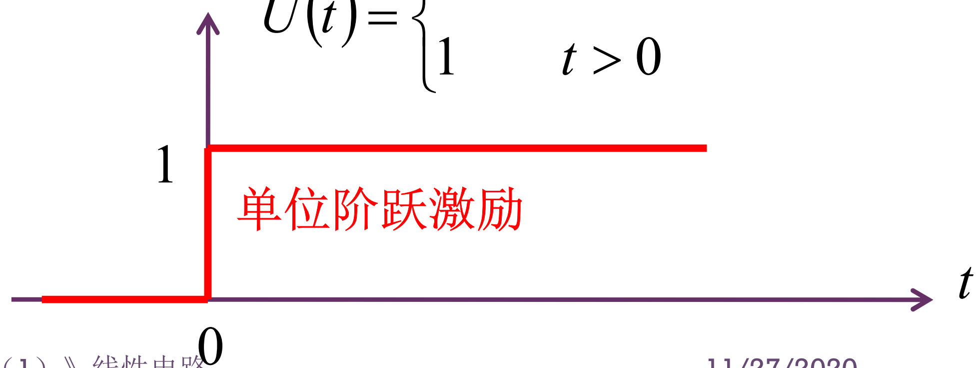
作业5 一阶RC电路都可用三要素法分析



1/用三要素法获得输出电压单位阶跃响应

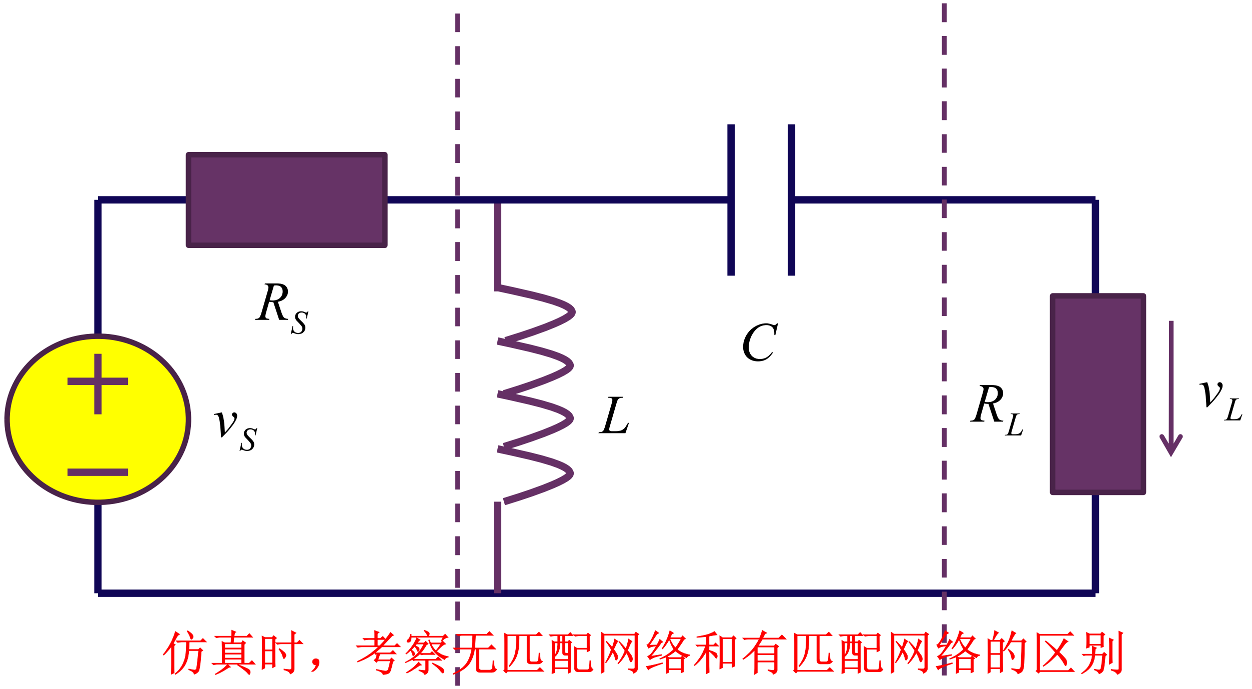
2/用任意方法在相量域获得电压增益传递函数

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



作业6 LC高通匹配网络

- 如果希望在10MHz频点上实现实现200Ω和50Ω阻抗之间的最大功率传输匹配，即希望负载获得信源的额定输出功率，电感L、电容C如何取值?
  - 选作：CAD确认你的设计是成功的（频域分析，给出幅频特性说明10MHz频点最大功率传输匹配；时域分析，仿真确认瞬态结束后，负载上的稳态正弦电压幅度表明负载获得了信源的额定功率）。

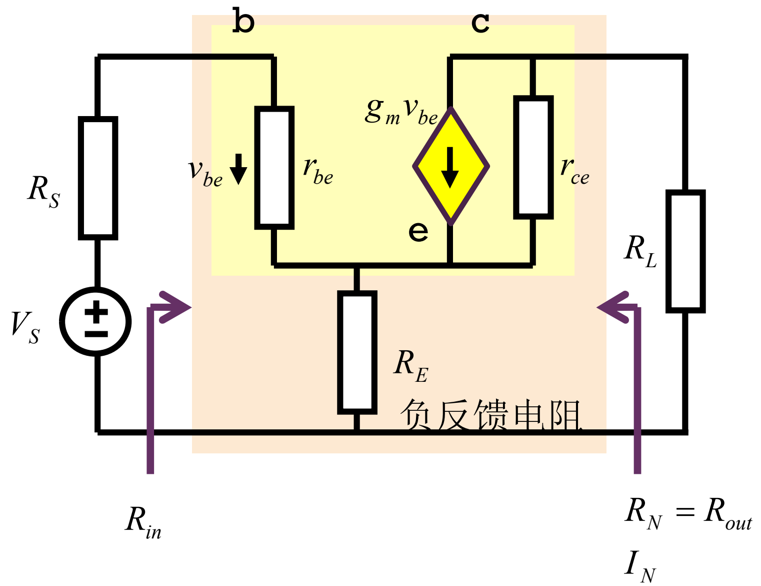


仿真时，考察无匹配网络和有匹配网络的区别

CAD

- 通过仿真
  - 确认作业4推导是正确的

$$r_{be} = 10k\Omega$$
$$r_{ce} = 100k\Omega$$
$$g_m = 40\text{mS}$$
$$R_E = 1k\Omega$$
$$R_S = 100\Omega$$
$$R_L = 10k\Omega$$



本节课内容在教材中的章节对应

- P808: 最大功率传输匹配，共轭匹配
- P828-833: LC阻抗匹配网络
- P121-127: 线性受控源引入
- P130-134: 含受控源在内的线性网络的戴维南-诺顿定理
- P95-99: 回路电流法、结点电压法列写电路方程

- 跳着看书：哪里有用看哪里，快速进入科研活动的必备能力